Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

A Propriedade do Normalizador e o Problema do Isomorfismo para Produtos Orlados de um Grupo Abeliano por um Nilpotente

Elisângela Silva Farias

Salvador-Bahia

Abril de 2006

A Propriedade do Normalizador e o Problema do Isomorfismo para Produtos Orlados de um Grupo Abeliano por um Nilpotente

Elisângela Silva Farias

Dissertação sob orientação do Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão que será apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão (Orientador)

Prof. Dr. Antonio Paques

Prof. Dr. David Arneson Hill

FARIAS, Elisângela Silva. *A Propriedade do Normalizador e o Problema do Isomorfismo para Produtos Orlados de um Grupo Abeliano por um Nilpotente*. Salvador-Ba, UFBA, 2006 (Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de pós-graduação em Matemática), 61 páginas.

PALAVRAS-CHAVE: Grupos, Anéis, Anéis de Grupo Integrais, Propriedade do Normalizador, Problema do Isomorfismo, Produto Orlado.

À mãezinha.

"Que a arte nos aponte uma resposta,
Mesmo que ela não saiba.
E que ninguém a tente complicar
Porque é preciso simplicidade para fazê-la florescer.
E que a minha loucura seja perdoada,
Porque metade de mim é amor,
E a outra metade... também."

(Oswaldo Montenegro)

Resumo

Neste trabalho, nosso principal objetivo é discutir a Propriedade do Normalizador e o Problema do Isomorfismo, duas questões de destaque na teoria dos Anéis de Grupo Integrais.

Faremos a investigação destas questões para grupos dados por produtos orlados; primeiramente, demonstraremos a Propriedade do Normalizador para produtos orlados de um grupo abeliano por um nilpotente. Em seguida, trataremos do Problema do Isomorfismo também para produtos orlados de um grupo abeliano por um nilpotente.

Apresentamos estes resultados com o intuito de que sejam um passo inicial para uma futura investigação das duas questões para produtos orlados entre grupos nilpotentes.

Abstract

In this work, our main objective is to discuss the Normalizer Property and the Isomorphism Problem, two questions of prominence importance in the theory of integrais group rings.

We investigated these questions for groups given by wreath products; first, we demonstrate the Normalizer Property for wreath product of an abelian group with a nilpotent group. After, we demonstrate the Isomorphism Problem for wreath product of an abelian group with a nilpotent group too.

We present these results with the aim to present an initial step for future investigation on the two questions for wreath products between nilpotents groups.

Sumário

Introdução

A dissertação ora apresentada investiga dois temas de grande importância na teoria dos anéis de grupo, a Propriedade do Normalizador e o Problema do Isomorfismo.

Um anel de grupo RG é um módulo livre tendo os elementos do grupo G como base e coeficientes no anel com unidade R com a adicional operação de multiplicação entre seus elementos, definida por distributividade. Em nosso trabalho, utilizaremos anéis de grupo em que o anel considerado é o dos inteiros, $\mathbb{Z}$, e o grupo G é finito, neste caso, teremos o chamado anel de grupo integral.

A teoria dos anéis de grupo possui várias questões interessantes; entre estas, o Problema do Isomorfismo destaca-se como central e consiste em verificar se dois grupos serão isomorfos sempre que seus anéis de grupo o forem. Esta questão vem sendo discutida desde 1940, a partir dos trabalhos de G. Higman utilizando-se diversos anéis de coeficientes, mas foi ao assumir o anel de grupo $\mathbb{Z}G$, ou seja, sendo os inteiros o anel de coeficientes, que chegou-se a diversos resultados relevantes, estabelecendo-se então a conjectura: os grupos finitos são determinados via isomorfismo pelos seus anéis de grupo integrais.

Outra questão de destaque na teoria dos anéis de grupo integrais sobre grupos finitos é a Propriedade do Normalizador que também foi apresentada como conjectura: o normalizador de G no grupo das unidades de $\mathbb{Z}G$ é exatamente o produto do grupo G pelo centro do grupo de unidades. Em 1995, M. Mazur revelou a existência de uma relação entre esta e o Problema do Isomorfismo no caso de alguns grupos infinitos, o que deu-lhe ainda mais destaque.

E desta forma, tanto o Problema do Isomorfismo quanto a Propriedade do Normalizador vem sendo investigados e muitas respostas positivas foram encontradas, até que, em 2001, M. Hertweck apresentou contra-exemplos para as duas questões, o que tirou-lhes o status de conjectura, porém não as tornaram menos importantes, apenas mudaram os rumos desta linha de pesquisa; agora, busca-se caracterizar as classes de grupos que são determinados pelos seus anéis de grupo integrais ou ainda as classes de grupos em que permanece válida a propriedade do normalizador.

As ações presentes nas diversas classes de grupos orlados têm se revelado de extrema importância nas investigações tanto no caso do normalizador quanto do isomorfismo, primeiramente devido ao fato de muitas outras ações poderem ser "inseridas"nestas, o que fica claro se relembrarmos que todo grupo finito é isomorfo a um subgrupo de um grupo de permutações e o produto orlado é uma forma de decompormos os subgrupos de Sylow dos grupos de permutação. Depois, temos o fato dos contra-exemplos encontrados até agora, para ambas as questões terem sido construídos tendo por base uma extensão de fatores iguais porém com ações diferentes, e isto nos leva a concluir que existe algo fundamental na forma como um anel de grupo integral determina estas ações, em particular os produtos semi-diretos.

Recentemente, Petit Lobão e Sehgal publicaram um resultado provando a Propriedade do Normalizador para grupos monomiais completos. Neste trabalho, é desenvolvida a demonstração da validade da propriedade do normalizador para a classe de grupos chamados monomiais completos, ou seja, dados pelo produto orlado de um grupo nilpotente na base e um simétrico no topo. Ele foi a principal inspiração para propormos o presente trabalho e é a principal fonte de referência para o desenvolvimento dos nossos resultados principais, pois utilizamos caminhos e argumentos semelhantes aos daquele.

Almejávamos inicialmente investigar a Propriedade do Normalizador e o Problema do Isomorfismo para produtos orlados de grupos nilpotentes, com esse intuito, seguimos por um caminho que baseava-se em propor e investigar outros resultados que se tornassem bases ou nos fornecessem ferramentas para chegar à nossa finalidade; ao traçar esse caminho, percebemos a importância desses resultados em si mesmos e então decidimos apresentá-los como principais, transferindo os resultados que almejávamos inicialmente para um trabalho futuro.

Em nossa dissertação, objetivamos investigar grupos dados por produtos orlados. Iremos apresentar resultados inéditos, nos quais propomos que a Propriedade do Normalizador e o Problema do Isomorfismo sejam válidos para produtos orlados de um grupo abeliano na base e um nilpotente no topo, com hipóteses adicionais sobre as ordens dos grupos. Destacamos que os resultados desenvolvidos possibilitam que sejam investigados através das mesmas técnicas os dois problemas, para o produto orlado entre grupos nilpotentes. Observamos porém que Roggenkamp e Scott já propuseram um resultado no qual demonstraram o Problema do Isomorfismo para uma extensão de um abeliano por um nilpotente sem nenhuma restrição das ordens, todavia a demonstração apresentada por eles utiliza teoria de rigidez, enquanto nossa demonstração foi realizada de maneira a ser utilizada numa sequente investigação do problema para o produto orlado entre grupos nilpotentes.

No primeiro capítulo, faremos uma exposição preliminar de definições e resultados acerca da teoria dos anéis de grupo, do isomorfismo entre anéis de grupo e do produto orlado. Destacaremos os resultados que julgamos essenciais para o desenvolvimento e entendimento dos resultados pretendidos em nosso trabalho.

No segundo capítulo, apresentaremos a Propriedade do Normalizador e todo o seu desenvolvimento, discutindo os resultados mais relevantes para nossa dissertação.

No terceiro capítulo, apresentaremos o Problema do Isomorfismo e da mesma forma, discutiremos os resultados mais relevantes para nossa dissertação.

Os resultados investigados e desenvolvidos neste trabalho, serão apresentados, por fim, no quarto capítulo, onde demonstraremos os dois teoremas que estamos propondo e que já foram citados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos definições e resultados importantes acerca da Teoria de Anéis de Grupos enfatizando a definição do normalizador do grupo base no grupo de unidades, do produto orlado e do isomorfismo entre anéis de grupos. Apresentaremos também as notações e símbolos que serão utilizados no decorrer do trabalho.

Ressaltamos que os resultados apresentados aqui poderão ser consultados pelo leitor em “An introduction to group rings”, de Polcino Milies e Sehgal, ou ainda em “Units in integral Group Rings”de Sehgal; conforme [13] e [15] .

1.1 DEFINIÇÃO. *Sejam G um grupo e R um anel com unidade. Um anel de grupo, denotado por RG, é o conjunto de todas as combinações lineares da forma*

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$$

onde $a_g \in R, g \in G$ e $a_g = 0$ para quase todos os g, isto é, apenas um número finito de coeficientes é diferente de 0 em cada uma dessas somas, com as seguintes operações:

(i) A soma de dois elementos em RG:

$$(\sum_{g \in G} a_g g) + (\sum_{g \in G} b_g g) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g.$$

(ii) O produto de dois elementos em RG :

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{g,h \in G} a_g b_h gh$$

ou, reordenando os termos na fórmula, podemos escrever o produto $\alpha\beta$ como

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{v \in G} c_v v \ \textit{onde} \ c_v = \sum_{gh=v} a_g b_h.$$

(iii) produto de elementos em RG por elementos $\lambda \in R$:

$$\lambda(\sum_{g \in G} a_g g) = \sum_{g \in G} (\lambda a_g) g.$$

Nesta dissertação, trabalharemos sempre com o chamado anel de grupo integral, isto é, em que o anel considerado é sempre o anel dos inteiros, $\mathbb{Z}$. Em seguida definiremos uma aplicação muito importante e de grande utilidade no estudo dos anéis de grupo.

1.2 Definição. *O homomorfismo de anéis $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ dado por*

$$\varepsilon(\sum_{g \in G} a_g g) = \sum_{g \in G} a_g$$

é chamado aplicação aumento de $\mathbb{Z}G$ e seu núcleo, denotado por $\Delta(G)$, é chamado ideal aumento de $\mathbb{Z}G$.

Note que se um elemento $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ pertence a $\Delta(G)$ então $\varepsilon(\sum_{g \in G} a_g g) = \sum_{g \in G} a_g = 0$; então podemos escrever α na forma

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g - \sum_{g \in G} a_g = \sum_{g \in G} a_g (g - 1).$$

Como claramente todos os elementos da forma $g - 1$, $g \in G$, pertencem a $\Delta(G)$, a observação acima mostra que $\{g - 1 : g \in G, g \neq 1\}$ é uma base de $\Delta(G)$ sobre $\mathbb{Z}$, e daí obtemos a seguinte caracterização para o ideal aumento:

1.3 Proposição. *O conjunto $\{g - 1 : g \in G, g \neq 1\}$ é uma base de $\Delta(G)$ sobre $\mathbb{Z}$, então podemos escrever*

$$\Delta(G) = \{\sum_{g \in G} a_g (g - 1) : g \in G, g \neq 1, a_g \in \mathbb{Z}\}$$

onde, como normalmente, assumimos que apenas um número finito de coeficientes a_g é diferente de 0.

Dados um grupo G e o anel $\mathbb{Z}$, denotaremos por $\mathcal{S}(G)$ o conjunto de todos os subgrupos de G e por $\mathcal{I}(\mathbb{Z}G)$ o conjunto de todos os ideais à esquerda de $\mathbb{Z}G$.

1.4 Definição. *Seja H um subgrupo de G e seja S um conjunto de geradores de H, então, $\Delta(G,H)$ é um ideal à esquerda de $\mathbb{Z}G$ gerado pelo conjunto $\{s-1 : s \in S\}$.*

Agora, daremos uma interpretação para $\Delta(G,H)$ quando H é um subgrupo normal de G. Se $H \lhd G$ então o homomorfismo canônico $\omega : G \to G/H$ pode ser estendido ao epimorfismo $\bar{\omega} : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}(G/H)$ tal que

$$\bar{\omega}(\sum_{g\in G} a_g g) = \sum_{g\in G} a_g \omega(g).$$

1.5 Proposição. *Com a notação anterior, $Ker(\bar{\omega}) = \Delta(G,H)$.*

1.6 Corolário. *Seja H um subgrupo normal de um grupo G, então, $\Delta(G,H)$ é um ideal bilateral de $\mathbb{Z}G$ e*

$$\frac{\mathbb{Z}G}{\Delta(G,H)} \simeq \mathbb{Z}\Big(\frac{G}{H}\Big).$$

Muitas informações obtemos a respeito de um anel analisando o conjunto dos seus elementos que possuem inverso multiplicativo, chamados unidades. Destacamos:

1.7 Definição. *Seja $\mathcal{A}$ um anel. O grupo multiplicativo das unidades de $\mathcal{A}$, denotado por $\mathcal{U}(\mathcal{A})$, é o conjunto*

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : \exists \quad y \in \mathcal{A} \quad e \quad xy = yx = 1\}.$$

Em particular, dados um grupo G e o anel $\mathbb{Z}$, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ denota o grupo das unidades do anel de grupo $\mathbb{Z}G$. Como a aplicação aumento $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, é um homomorfismo de anéis, segue que $\varepsilon(u) \in \mathcal{U}(\mathbb{Z})$, para todo $u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$.

Denotamos por $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ o subgrupo das unidades de aumento 1 em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, isto é, $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G) = \{u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) : \varepsilon(u) = 1\}$, chamado também de subgrupo das unidades normalizadas.

Para uma unidade u do anel de grupo integral $\mathbb{Z}G$ temos que $\varepsilon(u) = \pm 1$, então vemos que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm\, \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

Uma unidade trivial de $\mathbb{Z}G$ é um elemento da forma $\pm g,\ g \in G$.

Denotando por $\sim$ a relação de conjugação em G, destacamos o seguinte resultado:

1.8 PROPOSIÇÃO. *Seja G um grupo finito. Toda unidade central de $\mathbb{Z}G$ é trivial se e só se para qualquer $x \in G$ e todo número natural j relativamente primo a $|G|$, $x^j \sim x$ ou $x^j \sim x^{-1}$.*

As unidades de torção em $\mathbb{Z}G$, ou seja, as unidades com ordem finita, determinam um conjunto denotado por $T\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$; para as unidades de torção normalizadas, ou seja, tal que seu aumento seja 1, valem os resultados:

1.9 PROPOSIÇÃO (Berman e Higman). *Seja $\gamma = \sum_{g \in G} \gamma_g g$ uma unidade de torção, isto é, γ tem ordem finita em $\mathbb{Z}G$, e assumindo que o coeficiente de 1 é não-nulo, isto é, $\gamma_1 \neq 0$, então $\gamma = \gamma_1 = \pm 1$.*

1.10 COROLÁRIO. *Suponha que $\gamma = \sum_{g \in G} \gamma_g g$ é uma unidade central no anel de grupo integral $\mathbb{Z}G$ de um grupo finito G, com ordem finita, então γ é da forma $\gamma = \pm g$, com $g \in \zeta(G)$, o centro de G.*

Uma simples consequência é o famoso teorema de G. Higman que destacamos a seguir

1.11 TEOREMA. *Seja A um grupo abeliano finito. O grupo das unidades de torção do anel de grupo integral $\mathbb{Z}A$ é igual a $\pm A$.*

Pelo último teorema, já temos que, se G é um grupo abeliano, então toda unidade de torção de $\mathbb{Z}G$ é trivial. Observemos agora grupos G em que todas as unidades de $\mathbb{Z}G$ são triviais, ou seja tais que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm G$. Podemos desenvolver também esta condição em termos das unidades normalizadas, $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G) = G$.

1.12 LEMA. *Seja G um grupo de torção tal que $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G) = G$, então todo subgrupo de G é normal.*

A teoria dos anéis de grupo apresenta um resultado análogo ao teorema de Lagrange:

1.13 PROPOSIÇÃO. *Se u é uma torção normalizada em $\mathbb{Z}G$ cuja ordem é n, então n é um divisor da ordem de G.*

Quando estudamos o anel de grupo integral $\mathbb{Z}G$, a aplicação

$$^* : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G, \qquad definida \quad por \qquad (\sum_{g \in G} a_g g)^* = \sum_{g \in G} a_g g^{-1}$$

desempenha um papel essencial, ela é uma anti-involução que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $(\alpha+\beta)^* = \alpha^* + \beta^*$,

(ii) $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$,

(iii) $\alpha^{**} = \alpha$.

Temos também o seguinte resultado bastante usual em relação à * :

1.14 Proposição. *Seja $u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ tal que $u^*u = 1$, então, $u = \pm g, g \in G$.*

Vejamos agora algumas relações existentes entre os anéis de grupo integrais.

1.15 Definição. *Um isomorfismo $\psi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}H$ é chamado de Isomorfismo Normalizado se para todo elemento $\alpha \in \mathbb{Z}G$, temos que $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\psi(\alpha))$, ou equivalentemente, se para todo elemento $g \in G$ temos $\varepsilon(\psi(g)) = 1$.*

Observamos que, se existe um isomorfismo $\psi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}H$, então existe também um isomorfismo normalizado entre estes anéis de grupo. De fato, é suficiente considerar uma nova aplicação $\xi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}H$ dada da seguinte forma: para cada elemento $\alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i g_i \in \mathbb{Z}G$ definimos $\xi(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(\psi(g_i))^{-1} r_i \psi(g_i)$. (Note que, como $g \in G$ é inversível e ε é um epimorfismo, temos $\varepsilon(\psi(g))$ inversível em $\mathbb{Z}$.) Podemos ver que ξ é, de fato, um isomorfismo normalizado.

Seja $\mathcal{C}_g$ a classe de conjugação de g em G, para um $g \in G$. Seja $\hat{\mathcal{C}}_g = \sum_{x \in \mathcal{C}_g} x = \sum_{x \sim g} x$, então $y^{-1}\hat{\mathcal{C}}_g y = \hat{\mathcal{C}}_g$ para todo $y \in G$, o que implica que $\hat{\mathcal{C}}_g$ é central em $\mathbb{Z}G$.

Alguns resultados de D.Glauberman e D.Passman nos revelam a existência de uma correspondência bijetora entre as classes de conjugação de G e H que preserva algumas características destas classes, vejamos:

1.16 Proposição. *Se $\psi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}H$ é um isomorfismo e $\hat{\mathcal{C}}_g$ uma soma de classe em G, então $\psi(\hat{\mathcal{C}}_g)$ é uma soma de classe em H, isto é, existe x em H tal que $\psi(\hat{\mathcal{C}}_g) = \hat{\mathcal{C}}_x$; valem ainda :*

(i) $\psi(\hat{\mathcal{C}}_{g^n}) = \hat{\mathcal{C}}_{x^n}$ *para todo inteiro* n;

(ii) $o(g) = o(x)$ *e* $|\mathcal{C}_g| = |\mathcal{C}_x|$;

(iii) se $\psi(\hat{\mathcal{C}}_g) = \hat{\mathcal{C}}_x$ *e* $\psi(\hat{\mathcal{C}}_h) = \hat{\mathcal{C}}_y$ *então existem* ν *e* ω *em* H *tais que* $\psi(\hat{\mathcal{C}}_{gh}) = \hat{\mathcal{C}}_{xy^\nu} = \hat{\mathcal{C}}_{x^\omega y}$. *(Onde* $y^\nu = \nu^{-1}y\nu$ *e* $x^\omega = \omega^{-1}x\omega$*).*

Observamos que esta correspondência determina uma correspondência entre subgrupos normais de G e H.

Destacaremos agora, alguns resultados da Teoria de Grupos que consideramos relevantes para um bom desenvolvimento de nosso trabalho:

1.17 Definição. *Um grupo* G *é chamado de Grupo Metabeliano se contém um subgrupo normal* A *tal que ambos,* A *e* G/A *são abelianos.*

1.18 Definição. *Seja* G *um grupo. O subgrupo* $G' =< x^{-1}y^{-1}xy; x, y \in G >$ *é o subgrupo derivado de* G.

1.19 Lema. *Seja* H *um subgrupo normal do grupo* G *.* G/H *é abeliano se e somente se* $G' \subset H$.

1.20 Proposição. *Se* G *é metabeliano,* G' *é abeliano.*

1.21 Definição. K *é um subgrupo de Hall de um grupo* G *se sua ordem e índice em* G *são relativamente primos.*

1.22 Definição. *Se* G *é um grupo abeliano, então todos os seus subgrupos são normais. Um grupo* G *de torção não-abeliano tal que todos os seus subgrupos são normais é chamado Grupo Hamiltoniano. Ele é da forma,* $G = K_8 \times E \times A$*, onde* E *é um 2-grupo elementar,* A *é um grupo abeliano com todos os elementos de ordem ímpar e* K_8 *é um grupo quatérnio de ordem 8:* $K_8 = \langle a, b : a^4 = 1, a^2 = b^2, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$.

1.23 Definição. *Seja* H *um subgrupo de um grupo* G *, definimos o normalizador de* H *em* G*,* $\mathcal{N}_H(G)$*, por*

$$\mathcal{N}_H(G) = \{g \in G; g^{-1}Hg = H\}.$$

1.24 Definição. *Um grupo* G *é chamado Nilpotente se contém uma série de subgrupos:*

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset ... \subset G_n = G$$

tal que cada subgrupo G_{i-1} *é normal em* G *e cada quociente* $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ *está contido no centro de* $\frac{G}{G_{i-1}}, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Uma série de subgrupos de G com esta propriedade é chamada de Série Central de G.

A caracterização usual para grupos nilpotentes finitos é dada pelo seguinte teorema.

1.25 Teorema. *Seja G um grupo finito. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) G é nilpotente.

(ii) Todo subgrupo de Sylow de G é normal em G.

(iii) G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.

Destacamos alguns resultados interessantes a respeito dos grupos nilpotentes:

1.26 Lema. *Subgrupos e grupos quocientes de grupos nilpotentes são nilpotentes.*

1.27 Proposição. *Um p-grupo finito é nilpotente.*

1.28 Proposição. *Produtos diretos finitos de grupos nilpotentes são nilpotentes.*

Já descrevemos a importância do produto orlado na teoria dos anéis de grupo e a razão de sua escolha neste trabalho, vejamos suas definições:

1.29 Definição. *Seja Sym_n o grupo simétrico de n elementos, $L = G\ wr\ Sym_n$ é o produto orlado completo de um grupo finito G e Sym_n. Então, L é dado pelo produto semi-direto $L = G^n \rtimes Sym_n$ em que Sym_n age sobre G^n permutando os fatores.*

1.30 Definição. *Sejam G e H grupos finitos. $L = G\ wr\ H$ é o produto orlado de G por H dado por $L = G^{|H|} \rtimes H$ em que H age sobre $G^{|H|}$ com a permutação dada pela ação de H sobre o conjunto H.*

Vejamos alguns resultados também fundamentais no desenvolvimento dos teoremas que iremos propor:

1.31 Definição. *Dizemos que um subgrupo do produto direto A^m é extenso se ele intersecta não trivialmente todas as cópias de A,* $\quad (1, 1, \ldots, A, \ldots, 1)$.

1.32 Proposição (Dietzman). *Seja G um grupo e $X \subseteq G$ um subconjunto normal em G $(\forall y \in G, y^{-1}Xy = X)$, então $< X > \trianglelefteq G$.*

1.33 PROPOSIÇÃO (Petit Lobão e Sehgal). *Seja o isomorfismo* $\psi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}H$, *se* θ *denota a correspondência entre os subgrupos normais de* G *e* H , *e* $\mathcal{C}_\alpha$ *é uma classe de conjugação em* G *à qual corresponde a classe de conjugação* $\mathcal{C}_\beta$ *em* H , *então* θ *associa ao subgrupo normal* $< \mathcal{C}_\alpha >$ *em* G , *o subgrupo normal* $< \mathcal{C}_\beta >$ *em* H.

1.34 PROPOSIÇÃO (Schur-Zassenhaus). *Sejam* G *um grupo finito e* H *subgrupo normal de* G *tal que* $\frac{G}{H} \simeq N$ *para* H *e* N *grupos com ordens relativamente primas, então* $G \simeq H \rtimes N$.

1.35 PROPOSIÇÃO (Whitcomb). *Suponha que um elemento* γ *de* $\mathbb{Z}G$ *é tal que* $\gamma \equiv g \ mod \ \Delta(G, A)$ *onde* $g \in G$ *e* $A \triangleleft G$, *então* $\gamma \equiv ga_o \ mod \ \Delta(G)\Delta(A)$ *para um adequado* $a_o \in A$.

Sendo $\alpha = \sum \alpha_g g$ um elemento do anel de grupo RG , $\tilde{\alpha}_g = \sum_{h \sim g} \alpha(h)$ e $[RG,\ RG] = < [x, y] > = < xy - yx >$, apresentamos:

1.36 PROPOSIÇÃO. *Se* $\alpha \in [RG,\ RG]$ *então,* $\tilde{\alpha}(x) = 0$ *para todo* $x \in G$.

Capítulo 2

A Propriedade do Normalizador

Neste capítulo, apresentaremos formalmente a Propriedade do Normalizador, destacando seu surgimento e importância na teoria dos anéis de grupo.

A Propriedade do Normalizador tem sido tema de estudo entre alguns matemáticos e muitas descobertas tem sido feitas sobre ela. Apresentaremos aqui os resultados que consideramos mais relevantes para o desenvolvimento do trabalho proposto ou ainda, que apresentem semelhanças com o mesmo.

Considerando um anel de grupo $\mathbb{Z}G$, sabemos que podemos sempre tomar o grupo G como subgrupo do grupo das unidades de $\mathbb{Z}G$ e este fato nos leva implicitamente a um questionamento: Quem é o normalizador, $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, de G em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$?

A propriedade do normalizador surge então como uma resposta a esta questão. Formalmente, ela afirma:

Sejam G um grupo finito, $\mathbb{Z}G$ o seu anel de grupo integral, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ o grupo das unidades de $\mathbb{Z}G$ e $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$ o normalizador de G em $\mathcal{U}$. Sendo G um subgrupo de $\mathcal{U}$, a propriedade do normalizador diz:

$$\text{(Nor)} \qquad \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = G \cdot \zeta$$

onde ζ é o centro de $\mathcal{U}$

A propriedade é apresentada também por S. K. Seghal no livro Units in Integral Group Rings como a questão:

Se G é um grupo finito, vale $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = G \cdot \zeta$?

Essa questão foi também proposta por S. Jackowski e Z. Marciniak de forma distinta porém equivalente. Vejamos:

Dado um elemento u de $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, temos a aplicação φ_u em G definida por $\varphi_u(g) = u^{-1}gu$ para todo $g \in G$.

Se denotarmos por $Aut_{\mathcal{U}}(G)$ o conjunto dos automorfismos de G definidos acima, é imediato que $Aut_{\mathcal{U}}(G)$ é um grupo que contém como subgrupo o grupo dos automorfismos internos de G, $Inn(G)$. Temos a propriedade do normalizador verdadeira se, e somente se, para todo u em $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, $u = g_o c_o$, com g_o em G e c_o em ζ ; sendo assim, segue que $\varphi_u(g) = u^{-1}gu = {g_o}^{-1}gg_o$, pois c_o é central; o que equivale a afirmar que φ_u é um automorfismo interno de G. Em vista deste fato, os autores citados apresentam a questão do normalizador como:

Se G é um grupo finito, vale $Aut_{\mathcal{U}}(G) = Inn(G)$?

A primeira resposta afirmativa à questão do normalizador foi obtida por D. B. Coleman em 1964 num artigo em que ele trabalhava com álgebras de grupos modulares.

Desde então, muitos estudiosos têm se preocupado com esta questão para distintos grupos finitos. Analisaremos brevemente os mais relevantes para a nossa pesquisa, desta forma nos situaremos historicamente, perceberemos o desenvolvimento e o estado em que se encontra a pesquisa a respeito e nos apropriaremos ainda mais da importância e validade do nosso trabalho.

2.1 Os Resultados de Coleman

Em 1964, D.B.Coleman apresentou em um artigo o seguinte resultado:

2.1 TEOREMA (Coleman, 1964). *Seja G um p-grupo finito e K um corpo de característica p, então vale $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = G \cdot \zeta$ na álgebra de grupo KG.*

Adaptando a demonstração de Coleman, os autores Jackowski e Marciniak obtiveram uma extensão do resultado anterior para anéis de grupos integrais, o que representa um grande desenvolvimento para a pesquisa pois revela que a propriedade é verdadeira, em uma versão local, para todos os p-subgrupos de um grupo finito. Este resultado foi desenvolvido em Sehgal [15] como segue:

2.2 TEOREMA (Coleman, 1987). *Sejam P um p-subgrupo do grupo finito G e $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, existe então y em G tal que $\varphi_u(g) = y^{-1}gy$, para todo g em P .*

Demonstração. Para todo elemento $g \in G$, $\varphi_u(g) = u^{-1}gu$ é um elemento de G, pois u está em $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, logo

$$u = g^{-1}u\varphi_u(g).$$

Escrevendo $u = \sum_{g\in G} u(x)x$, temos $\sum_{g\in G} u(x)x = \sum_{g\in G} g^{-1}x\varphi_u(g)$.

Define-se então uma ação σ do subgrupo P sobre o conjunto G conforme : se $g \in P$ e $x \in G$, tem-se

$$\sigma_g(x) = g^{-1}x\varphi_u(g),$$

então a função $u : G \to \mathbb{Z}$ dada por $x \mapsto u(x)$ é constante nas órbitas da ação σ; uma vez que o comprimento destas órbitas é um divisor da ordem do p-subgrupo P, segue que este comprimento é uma potência de p. Sendo u uma unidade em $\mathbb{Z}G$, seu aumento, ϵ, obedece a:

$$\pm 1 = \epsilon(u) = \sum_i c_i p^{t_i},$$

em que $c_i = u(g_i)$ e p^{t_i} é o comprimento da órbita de g_i, sendo g_i um elemento em G. Segue, portanto, que existe uma órbita de comprimento um, pois do contrário o número primo p seria um divisor de ± 1, e isto é o mesmo que dizer que existe um elemento $x_0 \in G$ tal que $\sigma_g(x_0) = x_0$, para todo g em P.

Isto implica que

$$\sigma_g(x_0) = g^{-1}x_0\varphi_u(g) = x_0,$$

para todo g em P, ou ainda

$$\varphi_u(g) = x_0^{-1}gx_0,$$

para todo g em P.

■

Vale notar que o resultado, de fato, afirma que $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) \leq G \cdot \zeta$, uma vez que $u^{-1}gu = x_0^{-1}gx_0$, com $x_0 \in G$. Lembrando agora que o centralizador de G em $\mathcal{U}$ é precisamente o centro de $\mathcal{U}$, segue a nossa afirmação de que o mesmo aponta para uma solução local da propriedade para os p-subgrupos de G.

Aplicando o teorema anterior, é possível obter a validade da propriedade para a importante classe dos grupos nilpotentes finitos, como segue:

2.3 Corolário. *Seja G um grupo nilpotente finito, então $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = G \cdot \zeta$*

Demonstração. Sendo G um grupo nilpotente finito, podemos escrevê-lo como um produto de seus p-subgrupos de Sylow. Aplicamos então o teorema anterior a cada um destes subgrupos de Sylow, P_i. Segue que $u^{-1}gu = x^{-1}gx$ para todo $g \in G$ com $x = \prod x_i, x_i \in P_i$ e $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$.

■

2.2 Os Resultados de Jackowisk e Marciniak

O artigo de Jackowski e Marciniak, de 1987, talvez tenha sido a primeira vez em que apareceu explicitamente na literatura o interesse por uma solução geral da questão do normalizador para grupos finitos.

Seus resultados favoreceram a propriedade do normalizador, mostrando que era válida seu estabelecimento como conjectura assim como debruçar-se na busca de uma prova de sua veracidade.

Destacamos que seus resultados são também de fundamental importância para o desenvolvimento do resultado principal desta dissertação, o que justifica uma análise detalhada.

Seja u uma unidade no normalizador de G em $\mathcal{U}$ e seja $\varphi_u : G \to G$ o automorfismo dado por $\varphi_u(g) = u^{-1}gu$.

2.4 Lema. *A ordem de φ_u é divisível apenas pelos primos que dividem a ordem de G.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que a ordem de φ_u seja relativamente prima à ordem de G. Podemos assumir que $\varphi_u^p = id$, para um adequado primo p que não divide a ordem de G. Consideremos o subgrupo dos elementos de G fixados por φ_u, $H = \{g \in G; \varphi_u(g) = g\}$.

Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjugação em G, como as somas de classe são elementos centrais dos anéis de grupo, temos $u^{-1}(\sum_{g \in \mathcal{C}} g)u = \sum_{g \in C} g$.

Portanto, φ_u age em $\mathcal{C}$. Como a ordem de $\mathcal{C}$ divide a ordem de G que é relativamente prima à ordem de φ_u, segue que existe em C um ponto fixado por φ_u, isto diz que $H \cap \mathcal{C}$ é não vazia, então, $G = \bigcup_y y^{-1}Hy$, o que é uma contradição pois H tem $[G : \mathcal{N}_G(H)]$ conjugados e como $H \subseteq \mathcal{N}_G(H)$, $[G : \mathcal{N}_G(H)] \leqslant [G : H]$ e assim $G = \bigcup_y y^{-1}Hy$, possui no máximo $1 + (|H| - 1)[G : H]$ elementos. Isto induz $G = H$, ou seja, $\varphi_u = id$. ■

No próximo lema, * denota a involução em $\mathbb{Z}G$, mencionada no primeiro capítulo e que opera como $^*(\sum_g a_g g) = \sum_g a_g g^{-1}$.

2.5 LEMA. *Se u é uma unidade de $\mathbb{Z}G$, então u pertencerá ao normalizador $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$ se e somente se, u^*u for central em $\mathbb{Z}G$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, para $g \in G$ temos $\varphi_u(g) = u^{-1}gu$, aplicando * em ambos os membros da igualdade, obtemos $[\varphi_u(g)]^* = u^*g^{-1}(u^{-1})^*$ e substituindo g por g^{-1} obtemos $\varphi_u(g) = (u^*)g(u^*)^{-1}$ ou $g = (u^*)^{-1}\varphi_u(g)u^*$; consequentemente

$$(uu^*)^{-1}g(uu^*) = (u^*)^{-1}u^{-1}guu^* = (u^*)^{-1}\varphi_u(g)u^* = g,$$

ou seja, uu^* é central. Mas,

$$u^*u = u^{-1}uu^*u = uu^*.$$

Reciprocamente, suponha uu^* central. Para todo $g \in G$ devemos verificar que $u^{-1}gu \in G$. Como $u^*u = uu^*$, obtemos, para todo g em G ,

$$(u^{-1}gu)(u^{-1}gu)^* = u^{-1}guu^*g^{-1}(u^{-1})^* = u^{-1}uu^*(u^{-1})^* = u^*(u^*)^{-1} = 1;$$

pela proposição 1.14 na página 8 temos que $u^{-1}gu = \pm g_o$, mas ao aplicarmos ϵ em ambos os membros da igualdade acima, obteremos $1 = \epsilon(u^{-1})\epsilon(g)\epsilon(u) = \epsilon(g) = \epsilon(\pm g_o)$ segue que $u^{-1}gu$ está em G ; isto é, u pertence a $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$.

Os lemas anteriores permitem-nos chegar aos resultados que seguem.

2.6 PROPOSIÇÃO (Krempa). *Se u pertence a $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, então u^2 estará em $G \cdot \zeta$.*

Demonstração. Consideremos a unidade $v = u^*u^{-1}$. Temos, pelo último lema,

$$vv^* = u^*u^{-1}(u^{-1})^*u = u^*(u^*u)^{-1}u = u^*u(u^*u)^{-1} = 1.$$

Novamente pela proposição 1.14 na página 8 , temos que v é uma unidade trivial; e como $\epsilon(v) = 1$, concluímos que $v = g_0$, para g_0 em G. Consequentemente,

$$u^* = g_0u \text{ e } g_0u^2 = u^*u \in \zeta.$$

Portanto, u^2 pertence a $G \cdot \zeta$, pois u^*u é central. ∎

2.7 TEOREMA (Jackowski e Marciniak, 1987). *Se G é um grupo de ordem ímpar, vale a propriedade do normalizador para G.*

Demonstração. Se u está em $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, pela proposição anterior, φ_u^2 é um automorfismo interno de G. Sendo a ordem de G ímpar, a ordem , t, de φ_u também o será pelo lema 2.4. Deste modo, t e 2 serão primos relativos; então existem r e s, números inteiros, tais que $2 \cdot r + t \cdot s = 1$, e portanto

$$\varphi_u = {\varphi_u}^{2r+ts} = \varphi_u^{2r} \cdot \varphi_u^{ts} = \varphi_u^{2r};$$

já que φ_u^2 é um automorfismo interno, φ_u será também um automorfismo interno de G. Segue então o resultado, pela reformulação equivalente da propriedade. ∎

Devido a este último resultado, temos que, ao investigarmos a propriedade do normalizador, é necessário analisar apenas os grupos finitos de ordem par. Os autores Jackowski e Marciniak, investigando grupos com tal ordem, obtiveram uma solução para a propriedade com uma dada restrição para os grupos. Discutiremos aqui o processo que foi utilizado e veremos o resultado que é de fundamental importância para o presente trabalho.

Primeiramente, observamos que verificar a propriedade do normalizador reduz-se à análise de um determinado conjunto de unidades u de $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$; ou, equivalentemente, de automorfismos φ_u em $Aut_{\mathcal{U}}(G)$.

Para um 2-subgrupo de Sylow, S , fixado em G , define-se o subconjunto I_S de $Aut_{\mathcal{U}}(G)$ como segue

$$I_S = \{\varphi_u \in Aut_{\mathcal{U}}(G) : \varphi_u^2 = i, \varphi_u|_S = i\};$$

isto é, o subconjunto de automorfismos de G, determinados por unidades normalizadoras, tal que estes automorfismos sejam involuções e a restrição dos mesmos a um 2-subgrupo de Sylow fixado, a identidade. Vale para este conjunto o resultado a seguir:

2.8 TEOREMA. *Se I_S está contido em $Inn(G)$ - o subgrupo dos automorfismos internos de G - para um 2-subgrupo de Sylow S de G, então vale a propriedade do normalizador para o grupo G.*

Demonstração. Supondo que I_S esteja contido em $Inn(G)$ e que φ_u, pertencente a $Aut_{\mathcal{U}}(G)$, seja um automorfismo determinado por u em $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, a estratégia da prova consistirá em demonstrar-se a existência de ψ, em $Inn(G)$, tal que $\psi \cdot \varphi_u$ esteja em I_S.

O resultado seguirá do fato de que φ_u será, deste modo, um automorfismo interno de G; uma vez que, como já mencionado, a propriedade do normalizador decorre de $Aut_{\mathcal{U}}(G)$ ser um subgrupo de $Inn(G)$.

Do teorema 2.2 na página 14, segue que existe g_1 em G tal que $\varphi_u(h) = g_1^{-1}hg_1$, para todo h em S; definindo um automorfismo interno de G como $\gamma(g) = g_1gg_1^{-1}$, para todo g em G, conclui-se que a composição $\gamma \cdot \varphi_u$ é a identidade quando restrita a S. Denotando ug_1^{-1} por ν, é imediato que ν pertence a $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$ e $\gamma \cdot \varphi_u = \varphi_\nu$ pertencerá a $Aut_{\mathcal{U}}(G)$.

A proposição 2.6 na página 17 afirma, em sua demonstração, que existe f em G tal que $v^* = fv$; ademais, como $\nu^*\nu$ é central,pelo lema 2.5 na página 16 para todo g em G, vale

$$\varphi_\nu^2(g) = fgf^{-1}.$$

Tomemos o grupo cíclico $< f >$; se notarmos por $S_2(f)$ e $S_{2'}(f)$ os $2-$ *subgrupo* de Sylow e $2' -$ *subgrupo* de Hall, respectivamente, de $< f >$, teremos:

$$< f >= S_2(f) \times S_{2'}(f);$$

como ambos são cíclicos, $S_2(f) =< f_1 >$ e $S_{2'}(f) =< f_2 >=< f_2^2 >$; daí a conclusão: $f = f_1 \cdot f_2^2$, em que f_1 é um $2 -$ *elemento* e 2 não divide a ordem de f_2.

Definimos então δ em $Inn(G)$ como:

$$\delta(g) = f_2^{-1} g f_2,$$

para todo g em G; lembrando que $\nu^* = f\nu$, e aplicando $*$' $\nu = \nu^* f^{-1} = f\nu f^{-1}$, ou seja, f comuta com ν e, já que $f_2 \in < f >$, decorre que

$$\delta\varphi_\nu = \varphi_\nu \delta.$$

Mais ainda, uma vez que f está em $C_G(S)$, o centralizador de S em G - pois sendo φ_ν a identidade quando restrita a S, φ_ν^2 também o será - segue então que δ fixa S pontualmente. Consequentemente, o automorfismo $\theta = \delta \cdot \varphi_\nu$ satisfaz, como se pode facilmente verificar:

(I) $\theta(h) = h$, para todo h em S;

(II) $\theta^2(g) = f_1 g f_1^{-1}$, para todo g em G , sendo f_1 um $2-elemento$.

Analogamente, fazendo $\omega = \nu f_2$, segue que $\theta = \varphi_\omega$ está em $Aut_{\mathcal{U}}(G)$. Como f_1 centraliza S e sendo f_1 um $2 - elemento$, obtemos que f_1 pertence a $\zeta(S)$, o centro de S - basta observar que $< S, f_1 >$ é um $2 - subgrupo$ de G.

Já que para todo h em S, $\varphi_\omega(h) = h$, tem-se

$$\omega = \sum_{g\in G} a_g g = \sum_{g\in G} a_g h^{-1} g h;$$

Observamos portanto que, em relação a ação de S sobre G determinada por conjugação, a função $a : G \to \mathbb{Z}$, em que $a(g) = a_g$, é constante nas órbitas da mesma; como 2 não divide $\epsilon(\omega) = \pm 1$, existe necessariamente um ponto, g_o, fixado pela ação, no suporte de ω; evidentemente g_o pertence a $C_G(S)$.

Seja ω_o a projeção linear de ω no subanel $\mathbb{Z}C_G(S)$ de $\mathbb{Z}G$; como g_o está em $supp(w)$, segue que ω_o não é 0. Denotamos ainda por $\bar{\omega_o}$ a redução módulo 2 de ω a $\mathbb{Z}_2 C_G(S)$.

Do fato de $\bar{\omega}_o$ pertencer a $\mathbb{Z}_2 C_G(S)$, concluímos que o cardinal do suporte de $\bar{\omega}$ é igual a $\epsilon(\bar{\omega})$; por outro lado, é óbvio que $\epsilon(\bar{\omega}_o) \equiv \epsilon(\omega_o) \pmod 2$. Para g em $supp(\omega)$, teremos que g pertencerá ou não a $C_G(S)$; no primeiro caso, g é um ponto fixo para a ação em tela; no segundo, a órbita de g tem comprimento potência de 2 - pois S é um $2 - grupo$ e, como já mencionado, os coeficientes dos elementos em uma mesma órbita são iguais - consequentemente

$\epsilon(\omega_o) \equiv \epsilon(\omega) \pmod 2$. Por fim, como $\epsilon(\omega) = \pm 1$, resumimos estes dados como:

$$card(supp(\bar{\omega}_o)) = \epsilon(\bar{\omega}_o) \equiv \epsilon(\omega_o) \equiv \epsilon(\omega) \equiv 1 \pmod 2;$$

ou seja, o suporte de $\bar{\omega}_o$ é constituído por um número ímpar de elementos em $C_G(S)$.

De $\omega = \nu f_2$, $\nu^* = f\nu$ e $f = f_1 f_2^2$, segue que

$$\omega^* = f_2^{-1}\nu^* = f_2^{-1} f_1 f_2^2 \nu = f_1 \omega;$$

pois f comuta com ν e f_1 pertence a $< f >$. Vale para a projeção ω_o de $\omega : \omega_o^* = f_1\omega_o$; donde decorre que

$$\bar{\omega}_o^* = f_1 \bar{\omega}_o. \tag{2.1}$$

Tomemos um elemento h_1 no suporte de $\bar{\omega}_o$; segue de 2.1 que $f_1 h_1 = h_2^{-1}$ para algum h_2 também no suporte de $\bar{\omega}_o$; sendo assim, $f_1 h_2 = f_1(h_1^{-1} f_1^{-1}) = h_1^{-1}$. Concluímos então que o suporte de $\bar{\omega}_o$ é a união disjunta de conjuntos da forma $\{h_1, h_2\}$, com $f_1 h_1 = h_2^{-1}$. Ora, já foi visto que o cardinal do suporte de $\bar{\omega}_o$ é ímpar, logo, para ao menos um destes conjuntos, deve valer $f_1 h_1 = h_1^{-1}$, ou seja, $f_1 = h_1^{-2}$; porém f_1 é um $2-$ elemento , isto implica que h_1 também o é, e, já que h_1 está em $C_G(S)$, segue que h_1 pertence a $\zeta(S)$.

Definimos por fim, um automorfismo interno de G como

$$\psi(g) = h_1 g h_1^{-1}, \text{ para todo } g \text{ em } G.$$

Observamos agora que a composição $\psi \cdot \varphi_\omega$ é tal que:

(I) Para todo h em S :

$$\psi \cdot \varphi_\omega(h) = h_1 \omega^{-1} h \omega h_1^{-1} = h,$$

pois já foi visto que ω comuta com os elementos de S; ademais h_1 pertence a $\zeta(S)$.

(II) Para todo g em G :

$$(\psi \cdot \varphi_\omega)^2(g) = h_1 \omega^{-1} h_1 \omega^{-1} g \omega h_1^{-1} \omega h_1^{-1};$$

lembrando agora que h_1 pertence a $\zeta(S)$, ω comuta com os elementos de S, além de que $\omega = \nu f_2$ e que, para todo g em G, vale $\nu^{-2} g \nu^2 = f g f^{-1}$, em que $f = f_1 f_2^2$ e f comuta com ν, segue:

$$(\psi \cdot \varphi_\omega)^2(g) = h_1^2 \omega^{-2} g \omega^2 h_1^{-2}$$

$$= f_1^{-1}(\nu f_2)^{-2} g (\nu f_2)^2 f_1$$
$$= f_1^{-1} f_2^{-2} \nu^{-2} g \nu^2 f_2^2 f_1$$
$$= f_1^{-1} f_2^{-2} f g f^{-1} f_2^2 f_1 = g.$$

Logo a composição $\psi \cdot \varphi_\omega$ é um elemento de I_S; uma vez que I_S está contido em $Inn(G)$ por hipótese, é forçoso que φ_ω seja automorfismo interno, pois ψ assim o é. Retrocedendo na demonstração, vemos que $\varphi_\omega = \delta \cdot \varphi_\nu$, com δ em $Inn(G)$; como também $\varphi_\nu = \gamma \cdot \varphi_u$, em que γ é também um automorfismo interno, a conclusão é, pois, que φ_u pertence a $Inn(G)$. ■

O resultado anterior é a ferramenta principal que possibilitou aos autores, via a aplicação da teoria de cohomologia de grupos, estabelecer o teorema a seguir, cuja demonstração não será apresentada aqui por utilizar teorias não abordadas em nosso trabalho e poderá ser consultada em [4].

2.9 TEOREMA. *(Jackowski e Marciniak, 1987) Se o grupo finito G possui um 2-subgrupo de Sylow normal, então vale a propriedade do normalizador para G.*

2.3 Os Grupos de Blackburn

Em 1998, Y. Li, M. M. Parmenter e S. Seghal demonstraram a propriedade para mais uma classe de grupos, a qual é chamada de classe dos grupos de Blackburn. Analisaremos brevemente os resultados desenvolvidos por estes autores em [6], que representam um avanço no trabalho com a questão do normalizador.

Um grupo é chamado de grupo Dedekind se todos os seus subgrupos são normais. Para grupos desta forma, sabemos que a propriedade do normalizador é válida, pois sendo a ordem destes grupos ímpar, ele será necessariamente abeliano para o qual já temos o resultado e se a ordem for par, ele terá um 2-subgrupo de Sylow normal e também neste caso já temos uma resposta afirmativa. Vemos assim que os resultados de Jackowski e Marciniak garantem que a classe dos grupos cujos subgrupos são normais representa uma solução à questão do normalizador. Por esta razão, Li, Parmenter e Sehgal assumiram trabalhar com uma classe de grupos bastante diversa da classe de Dedekind e denotaram por $R(G)$ a intersecção de todos os subgrupos não-normais de um dado grupo G.

A classe dos grupos finitos para os quais a intersecção dos seus subgrupos não-normais é não trivial, foi completamente descrita por Blackburn em [1]; sendo assim, referiremos estes grupos como grupos de Blackburn.

É interessante notar o fato elementar a seguir.

2.10 TEOREMA. *Se G é um grupo de Blackburn, então $R(G)$ é um subgrupo cíclico e característico em G.*

Objetivando atacar os grupos de Blackburn, os autores citados desenvolveram dois resultados preliminares que são de grande importância em si mesmos.

2.11 TEOREMA. *Seja $G =< H, g >$, em que H é um subgrupo abeliano de índice 2, então vale a propriedade do normalizador para G.*

Vale observar que este resultado inclui os grupos diedrais.

2.12 TEOREMA. *Seja G o produto direto dos grupos G_1 e G_2, $G = G_1 \times G_2$, então vale a propriedade do normalizador para G se, e somente se, a mesma vale para G_1 e para G_2.*

Blackburn descreve os grupos que levam seu nome segundo os cinco exaustivos casos abaixo:

a) G possui um subgrupo abeliano A de expoente kp^n, sendo $n \geq 1; p$ é primo e $(k, p) = 1$. G/A é cíclico de ordem p^r e, se Au gera $G/A, u$ pode ser escolhido de modo que u^{p^r} tenha ordem p^n. Existe um inteiro $\xi \equiv 1(p^n)$ tal que $x^u = x^\xi$ para todo $x \in A$.

b) G é o produto direto de um grupo abeliano de ordem ímpar por um grupo de uma das formas a seguir:

b1) o produto direto de um grupo quatérnio de ordem 8, um grupo cíclico de ordem 4 e um grupo abeliano elementar;

b2) o produto direto de dois quatérnios de ordem 8 e um grupo abeliano elementar.

c) G possui um subgrupo H do tipo descrito em a), com $p = 2$ e $r = 1$. H tem índice 2 em G, e se G for gerado por H e t, t pode ser escolhido de modo que $u^t = u^{-1}$, $t^2 = u^{2^n}$ e $x^t = x^\eta$, para algum $\eta \equiv -1(2^n)$.

d) G possui um subgrupo abeliano de índice 2. G é gerado por A e t em que t^2 é um elemento de A de ordem 2. Se x é um elemento de A, $x^t = x^\zeta$ para algum $\zeta \equiv -1(2^n)$.

e) G é o produto direto de H por um grupo quatérnio de ordem 8 e um 2-grupo abeliano elementar, em que H é de ordem ímpar e do tipo descrito em a).

De posse desta classificação, analisando caso a caso os grupos descritos, Li, Parmenter e Sehgal obtiveram o resultado central de seu artigo:

2.13 TEOREMA. *Seja G um grupo finito, se $R(G)$ é não trivial, então a propriedade do normalizador é válida para G.*

Estes resultados ampliam consideravelmente a classe dos grupos finitos para os quais é válida a propriedade do normalizador; além disso, é uma consequência do mesmo que, se G é um contra-exemplo para a propriedade, é necessário que G possua ao menos dois subgrupos cíclicos não normais, sendo que ao menos um deles é um 2-grupo.

2.4 Os Grupos de Frobenius

Em 1999, Petit Lobão e Polcino Milies publicaram um trabalho em que provaram a propriedade do normalizador para uma classe de grupos conhecida como de Frobenius, ver [10].

Um grupo G é chamado grupo de Frobenius se ele contém um subgrupo próprio H tal que $H \cap H^x = 1$ para todo $x \in G \setminus H$, sendo $H^x = x^{-1}Hx$. Notando que os grupos de Blackburn não são de Frobenius, podemos afirmar que o resultado obtido engrandeceu a classe de grupos nos quais vale a propriedade do normalizador. Analisemos brevemente.

Alguns fatos básicos nos grupos de Frobenius, apresentados no próximo teorema foram observados preliminarmente como fator essencial para um bom desenvolvimento e entendimento do resultado principal, sendo-nos igualmente útil.

2.14 TEOREMA. *Seja G um grupo de Frobenius e seja H um subgrupo tal que $H \cap H^g = 1$, para todo $g \in G \setminus H$. Escreva $H^* = H \setminus \{1\}$. Então:*

(i) $K = G \setminus (\bigcup_{x \in G} (H^*)^x)$ é um subgrupo característico de G, $(|K|, |H|) = 1$ e $G = K \rtimes H$.

(ii) K é nilpotente

(iii) Se $|H|$ é par, então existe um único elemento z de ordem 2 em H, este elemento é central e $z^{-1}kz = k^{-1}$ para todo k em K. Ademais, K é abeliano.

(iv) Se $h^{-1}kh = k$ para $h \in H^*$ e $k \in K$, então $k = 1$.

Pode ser mostrado que o subgrupo K no teorema acima é unicamente determinado, ele é chamado núcleo de Frobenius de G. Um subgrupo H tal que $G = K \rtimes H$ é chamado complemento de Frobenius de G.

O principal resultado obtido é:

2.15 TEOREMA. *Vale a propriedade do normalizador para os grupos de Frobenius.*

2.5 Os Grupos Monomiais Completos

Em 2002, Petit Lobão e S. Sehgal apresentaram um resultado que demonstrava a validade da Propriedade do Normalizador para Grupos Monomiais Completos com base Nilpotente, ou seja, o produto orlado de um grupo nilpotente finito pelo simétrico de m letras, ver [12].

Este resultado, como já citado anteriormente, inspirou o presente trabalho; utilizamos na investigação de nossos resultados principais, argumentos e procedimentos semelhantes aos utilizados em seu desenvolvimento, por esta razão, o apresentamos:

2.16 TEOREMA. *Seja $G = N \text{ wr } Sym_m$, onde N é um grupo nilpotente finito e Sym_m é o grupo de todas as permutações de m letras, então a Propriedade do Normalizador vale para G.*

Para provar este teorema, os autores utilizaram a reformulação de Jackowski e Marciniak para a Propriedade, e o teorema 2.8 na página 18, provando , em vista disso, apenas o teorema abaixo. Eles provaram de forma preliminar o teorema para o caso especial do grupo base ser abeliano.

2.17 TEOREMA. *Seja G o produto orlado N wr $Sym_m = N^m \rtimes Sym_m$ com N nilpotente. Seja S o fixado $2-$ subgrupo de Sylow $S = S_2 \rtimes S(1\,2)$, o então o conjunto $I_S = \{\varphi_u \in Aut_{\mathcal{U}}(G) : \varphi_u^2 = i, \varphi_u|_S = i\}$ consiste de automorfismos internos de G. Além disso, para todo φ_u em I_S, existe σ em Sym_m , $b \in N^m$ de maneira que $\varphi_u(g) = b^{-1}\sigma^{-1}g\sigma b$, para todo g em G, com $b(1) = b(2) = 1$.*

Observação: S_2 é o 2-subgrupo de Sylow de N^m e $S(1\,2)$ é o 2-subgrupo de Sylow de Sym_m que contém a transposição $(1\,i)$.

Demonstração. Usaremos indução sobre $|G|$ e assumiremos N não abeliano.

Seja $\varphi_u \in I_S$, primeiramente, vamos analisar como φ_u age em Sym_m. Para qualquer $\delta \in Sym_m$, temos que $\varphi_u(\delta) \sim \delta$ em G pois como $\varphi_u(g) - g = u^{-1}gu = [u^{-1},\, gu] \in [\mathbb{Z}G,\, \mathbb{Z}G]$, usamos a proposição 1.36 na página 11 e chegamos à afirmação. Então, temos $a_\delta \in N^m$ e $\tau_\delta \in Sym_m$, ambos dependendo de δ, tal que

$$\varphi_u(\delta) = a_\delta^{-1}\tau_\delta^{-1}\delta\tau_\delta a_\delta, \ \ \forall\, \delta \in Sym_m.$$

Pelo corolário 1.6 na página 6, podemos tomar $\frac{\mathbb{Z}G}{\Delta(G,N^m)} \simeq \mathbb{Z}\left(\frac{G}{N^m}\right) = \mathbb{Z}\overline{G}$, temos que $\bar{u}$ normaliza $\overline{G}$ e podemos observar que $\bar{\varphi}_u$ é interno pois a propriedade vale para os grupos simétricos. Assim, existe $\lambda \in Sym_m$ tal que

$$\bar{\varphi}_u(\delta) = \bar{u}^{-1}\delta\bar{u} = \lambda^{-1}\delta\lambda, \qquad \forall\, \delta \in Sym_m, \tag{2.2}$$

com λ fixo em Sym_m e $\lambda^2 = 1$ pois $\bar{\varphi}^2 = id$, e daí, $u^{-1}\delta u \equiv \lambda^{-1}\delta\lambda \mod \Delta(G, N^m) \qquad \forall\delta \in Sym_m$. Então $\tau_\delta^{-1}\delta\tau_\delta = \lambda^{-1}\delta\lambda$ e concluímos que

$$u^{-1}\delta u = a_\delta^{-1}\lambda^{-1}\delta\lambda a_\delta \qquad \forall\delta \in Sym_m, \tag{2.3}$$

com $a_\delta \in N^m$, dependendo de δ.

Vamos agora analisar como φ_u age em N^m :

Como N^m é nilpotente, iremos escrevê-lo como um produto $N^m = P_1 \times ... \times P_r$ de seus subgrupos de Sylow e observar o que ocorre com os elementos em cada um deles. Seja $x \in P_i$, então pelo teorema 2.2 , existe $\tau_i \in Sym_m$ e $a_i \in N^m$ tais que $u^{-1}xu = a_i^{-1}\tau_i^{-1}x\tau_i a_i \qquad \forall x \in P_i$.

Sejam x no centro do grupo nilpotente P_i e y no centro de $P_j, i \neq j$. Assumindo que $a_i \in P_i$, temos

$$u^{-1}xu = \tau_i^{-1}x\tau_i \text{ e } u^{-1}yu = \tau_j^{-1}y\tau_j.$$

Mas, $\varphi_u(xy) \sim xy$ em G, então existe $\tau \in Sym_m$ e $n \in N$ tal que

$$u^{-1}xyu = \tau^{-1}n^{-1}xyn\tau = \tau^{-1}xy\tau = \tau_i^{-1}x\tau_i \cdot \tau_j^{-1}y\tau_j$$

e portanto

$$\tau_i\tau^{-1}x\tau\tau_i^{-1} = x \text{ e } \tau_j\tau^{-1}y\tau\tau_j^{-1} = y.$$

Mas os centros de P_i e P_j são extensos em N^m e apenas a identidade fixa elementos de subgrupos extensos, então $\tau_i = \tau = \tau_j$.

Concluímos que

$$u^{-1}nu = a^{-1}\tau^{-1}n\tau a, \forall n \in N^m \text{ com } a = a_1...a_r. \tag{2.4}$$

Seja ζ o centro de N . Então $\frac{N}{\zeta} \neq 1$ e $|\frac{N}{\zeta}| < |N|$ e por indução, para $\overline{G} = \frac{G}{\zeta^m} \simeq \left(\frac{N^m}{\zeta^m}\right) \rtimes Sym_m$, temos que existe $\bar{b}$ em $\left(\frac{N^m}{\zeta^m}\right)$ e σ em Sym_m tal que $\sigma^2 = 1$ e

$$\bar{u}^{-1}\bar{g}\bar{u} = \bar{b}^{-1}\sigma\bar{g}\sigma\bar{b} \qquad \forall \quad \bar{g} \in \frac{G}{\zeta^m}$$

com $\bar{b}(1) = 1 = \bar{b}(2)$.

Tomamos $\bar{g} = \delta$ em Sym_m e chegaremos por 2.2 em

$$u^{-1}\delta u = a_\delta^{-1}\sigma\delta\sigma a_\delta \qquad \forall\delta \in Sym_m.$$

Agora, de 2.2, deduzimos que $\bar{u} = \sigma \cdot z$, onde z é uma unidade central de $\mathbb{Z}(Sym_m)$. Como $m > 2$, segue da proposição 1.8 na página 7 que $z = \pm 1$, então $\bar{u} = \pm\sigma$ e

$$u = \pm\sigma + \xi, \text{ com } \xi \in \Delta(G, N^m).$$

Pelo argumento de Whitcomb , ver 1.35 na página 11, obtemos

$$u \equiv \sigma \cdot a_o \bmod \Delta(G)\Delta(G, N^m)$$

com a_o fixado em N^m. Segue que

$$u^{-1}\delta u = a_o^{-1}\sigma\delta\sigma a_o \qquad \forall \quad \delta \in Sym_m.$$

Portanto, em $\frac{G}{\zeta^m}$, para todo $\delta \in Sym_m$, temos

$$\bar{a}_o^{-1}\sigma\delta\sigma\bar{a}_o = \bar{b}^{-1}\sigma\delta\sigma\bar{b}.$$

Segue que $\bar{b}\bar{a}_o^{-1}$ pertence ao subgrupo diagonal do quociente $\frac{N^m}{\zeta^m}$. Então , concluímos que $a_o = dbc_o$ com d no subgrupo diagonal de N^m e c_o no centro de N^m. Portanto para todo $\delta \in Sym_m$, temos

$$u^{-1}\delta u = c_o^{-1}b^{-1}\sigma\delta\sigma bc_o. \qquad (2.5)$$

Agora, seja $\bar{g} = \bar{n}, n \in N^m$, por 2.4 , $\bar{u}^{-1}\bar{n}\bar{u} = \bar{b}^{-1}\sigma\bar{n}\sigma\bar{b} = \bar{a}^{-1}\tau^{-1}\bar{n}\tau\bar{a}$, o que implica em $\sigma\bar{a}\bar{b}^{-1}\sigma\bar{n}\sigma\bar{b}\bar{a}^{-1}\sigma = \sigma\tau^{-1}\bar{n}\tau\sigma$.

Sendo N^m não abeliano e $\sigma^2 = 1$, se $\sigma \neq \tau, \tau\sigma$ "moveria" algumas coordenadas de $\bar{n}$, e teríamos uma contradição à igualdade acima. Portanto $\sigma = \tau$ e temos, para todo n em N^m,

$$u^{-1}nu = a^{-1}\sigma n\sigma a.$$

Mas, $\bar{u}^{-1}\bar{n}\bar{u} = \bar{a}^{-1}\sigma\bar{n}\sigma\bar{a} = \bar{b}^{-1}\sigma\bar{n}\sigma\bar{b}$, o que significa que $\bar{a}\bar{b}^{-1}$ pertence ao centro de $\frac{N^m}{\zeta^m}$ e $ab^{-1} \in \zeta_2^m$, o segundo centro de N^m. Então, para todo $n \in N^m$, temos

$$u^{-1}nu = c^{-1}b^{-1}\sigma n\sigma bc \text{ com } c \in \zeta_2^m \qquad (2.6)$$

Lembremos que $\bar{b}(1) = 1 = \bar{b}(2)$ e que a permutação é uma involução tal que $\sigma(1) = 1$ e $\sigma(2) = 2$ ou $\sigma(1) = 2$ e $\sigma(2) = 1$; além disso, $\sigma\bar{b}$ fixa $S(1\,2)$. Portanto $\sigma\bar{b}\sigma(1) = 1$, daí $\sigma\bar{b}\sigma\bar{b}(1) = 1$. Como $\bar{u}^2$ é central, $\sigma\bar{b}\sigma\bar{b}$ também o é. Portanto ele pertence ao subgrupo diagonal e por isso $\sigma\bar{b}\sigma\bar{b} = 1$.

Como N^m é um subgrupo característico e u^2 é central, segue, de 2.6 que, para todo $n \in N^m$, temos

$$n = c^{-1}b^{-1}\sigma c^{-1}b^{-1}\sigma n\sigma bc\sigma bc.$$

E usando novamente 2.6, substituindo n por $\sigma n\sigma$ e usando também 2.5 e a centralidade de c_o em N^m, chegaremos a $\sigma bcb^{-1}\sigma bc^{-1}b^{-1} \in \zeta(N^m)$, que multiplicando pelo elemento central $c^{-1}b^{-1}\sigma c^{-1}b^{-1}\sigma$, obtemos $c^{-1}b^{-1}\sigma b^{-1}\sigma bc^{-1}b^{-1}$ no centro de N^m. No quociente $\frac{G}{\zeta^m}$, temos

$$\bar{c}^{-1}\bar{b}^{-1}\sigma\bar{b}^{-1}\sigma\bar{b}\bar{c}^{-1}\bar{b}^{-1} = \bar{1}.$$

Como c está em ζ_2^m, $\bar{c}$ é central e assim

$$\bar{c}^{-2} = \sigma\bar{b}\sigma\bar{b}.$$

Como $\sigma\bar{b}\sigma\bar{b} = \bar{1}$, segue que $\bar{c}^2 = \bar{1}$, isto é, $c^2 \in \zeta^m$.

Como N^m é nilpotente, podemos decompor c em fatores pertencentes aos seus subgrupos de Sylow. Então concluímos que os fatores "ímpares"de c são centrais.

a) Vamos primeiro supor que o 2-subgrupo de Sylow de N^m, S_2, é abeliano. Então c é central em N^m. Portanto, para todo $n \in N^m$:

$$u^{-1}nu = c^{-1}b^{-1}\sigma n\sigma bc = b^{-1}\sigma n\sigma b.$$

Mas podemos reescrever esta igualdade como $u^{-1}nu = c_o^{-1}b^{-1}\sigma n\sigma bc_o$, pois c_o é central em N^m. Daí, e de 2.5, podemos escrever para todo $g \in G$:

$$u^{-1}gu = c_o^{-1}b^{-1}\sigma g\sigma bc_o,$$

de maneira que φ_u é um automorfismo interno de G. Vamos agora verificar a trivialidade dos dois primeiros elementos. Vamos escrever $h = bc_o$. Como $\bar{b}(1) = \bar{b}(2) = 1$ e c_o é central, temos que $h(1)$ e $h(2)$ são centrais em N^m. Como φ_u fixa elemento-a-elemento o 2-subgrupo de Sylow $S = S_2 \rtimes S(1\,2)$ de G, temos

$$u^{-1}(1\,2)u = h^{-1}\sigma(1\,2)\sigma h = h^{-1}(1\,2)h = (1\,2).$$

E assim, vemos que $h(1) = h(2)$ está no centro de N.

Vamos agora definir um elemento f de N^m da seguinte forma: $f(1) = 1$, $f(i) = h^{-1}h(i)$ para $2 \leqslant i \leqslant m$. Considerando o elemento diagonal $h_o = (h(1), ..., h(1))$, central em G, temos $f = h_o^{-1}h$. Portanto, para todo $g \in G$,

$$u^{-1}gu = f^{-1}\sigma g\sigma f,$$

com $f(1) = f(2) = 1$, provando o teorema neste caso.

b) Supomos agora que S_2 é não abeliano, em particular, $S_2 \neq 1$. Seja N' o subgrupo comutador de N. O grupo quociente

$$\frac{G}{(N')^m} \simeq \Big(\frac{N}{N'}\Big) \text{ wr } Sym_m \simeq \frac{N^m}{(N')^m} \rtimes Sym_m$$

é um produto orlado.

Para $n \in N^m$, temos

$$u^{-1}nu = c^{-1}b^{-1}\sigma n\sigma bc \equiv \sigma n\sigma \bmod \Delta(G, (N')^m).$$

Se $n \in S_2$, teremos

$$\sigma n \sigma \equiv n \bmod \Delta(G, (N')^m).$$

Então, no grupo quociente $\frac{G}{(N')^m}$, $\sigma n \sigma = n$, logo $\sigma = 1$ pois o 2-subgrupo de Sylow de $\frac{N^m}{(N')^m}$ é extenso. Assim, temos neste caso:

$$u^{-1}\delta u = c_o^{-1} b^{-1} \delta b c_o \qquad \forall\, \delta \in Sym_m \text{ e}$$

$$u^{-1} n u = c^{-1} b^{-1} n b c \qquad \forall\, n \in N^m,$$

com $c_o \in \zeta^m$ e $c \in \zeta_2^m$. Em $\frac{G}{\zeta^m}$, temos $\sigma b \sigma b \equiv 1$. Como $\sigma = 1$, temos $b^2 \equiv 1.$, o que significa que b^2 pertence a ζ^m. Ademais, $c^2 \in \zeta^m$. Assim, os fatores ímpares de b e c são centrais. Lembrando também que φ_u fixa o 2-subgrupo de Sylow S_2. Isto significa que

$$u^{-1} n u = n \qquad \forall\, n \in N^m.$$

Escrevendo $h = bc_o$, temos para todo $\delta \in Sym_m$:

$$u^{-1}\delta u = h^{-1}\delta h$$

Vamos verificar como u age na transposição $(1\, i)$. Como $S_2 \rtimes S(1\, i)$ é um 2-subgrupo de Sylow de G, sabemos pelo teorema 2.2 na página 14, que existem elementos $e_i \in N^m$ e $\tau_i \in Sym_m$ tais que, para todo $x \in S_2 \rtimes S(1\, i,)$ temos:

$$u^{-1} x u = e_i^{-1} \tau_i^{-1} x \tau_i e_i.$$

Para todo $x \in S_2$, no quociente $\frac{G}{(N')^m}$, temos

$$\tau_i^{-1} x \tau_i \equiv x \bmod N'.$$

Como a projeção de S_2 é extensa neste quociente, concluímos que $\tau_i = 1$. Além disso, como φ_u fixa elemento-a-elemento do subgrupo S_2, temos que e_i centraliza S_2. Então, para todo $x \in S_2 \rtimes S(1\, i)$,

$$u^{-1} x u = e_i^{-1} x e_i,$$

com e_i no centralizador $C_{N^m}(S_2)$. Observamos que os fatores ímpares de e_i não são percebidos na ação de e_i no grupo base S_2; no grupo de cima, temos

$$e_i^{-1} x e_i = h^{-1} x h,$$

com $h = bc_o$, $c_o \in \zeta^m$. Também percebemos que os fatores ímpares de b são centrais. Como e_i centraliza S_2, podemos escolher e_i sendo central em N^m. Como φ_u fixa $S(1\ 2)$ elemento-a-elemento, podemos tomar $e_2 = 1$. Mais ainda,

$$u^{-1}(1\ 2)u = h^{-1}(1\ 2)h = (1\ 2)$$

e assim, $h(1) = h(2)$. E, para $2 \leqslant i \leqslant m$, temos $h^{-1}(1\ i)h = e_i^{-1}(1\ i)e_i$, desta forma obtemos

$$h^{-1}(1) \cdot h(i) = e_i^{-1}(1) \cdot e_i(1).$$

Definimos um elemento $f \in N^m$ por $f = h_o^{-1}h$ onde $h_o = (h(1), ..., h(1))$, então $f(1) = f(2) = 1$ e f é central em N^m. Para todo $\delta \in Sym_m$ temos:

$$u^{-1}\delta u = h^{-1}\delta h = f^{-1}\delta f.$$

Daí, temos para todo $g \in G$,

$$u^{-1}gu = f^{-1}gf$$

com f um elemento fixo de N^m. Como $f(1) = 1 = f(2)$, concluímos a prova. ■

Capítulo 3

O Problema do Isomorfismo

Dentre as várias questões da teoria dos anéis de grupo, o Problema do Isomorfismo destaca-se como uma questão importante e central na teoria. Ele aparece primeiramente considerando anéis de grupo integrais, na tese de doutorado de Higman , em 1940 onde ele diz:

"Se é possível que dois grupos não-isomorfos tenham anéis de grupo integrais isomorfos, eu não sei; mas "certos"resultados sugerem que isso é improvável."

Isto foi apresentado como um problema na Conferência de Álgebra em Michigan em 1947 por M. Thrall, que o formulou nos seguintes termos:

"Dados um grupo G e um corpo K , determinar todos os grupos H tais que $KG \simeq KH$."

As questões sobre quais propriedades de um grupo finito G se refletem sobre o anel de grupo RG , no entanto, já eram investigadas por W. Burnside, G. Frobenius e I. Chur. Com respeito a grupos finitos, é imediato que se dois grupos são isomorfos, os seus anéis de grupo, determinados a partir de um mesmo anel de coeficientes, também o serão.

Em 1950, S. Perlis e G. Walker provaram que os grupos abelianos finitos são determinados pelos seus anéis de grupo sobre o corpo dos números racionais e logo em seguida, em 1956, W. E. Deskins mostrou que p-grupos abelianos finitos são determinados pelos seus anéis sobre algum corpo de característica p. Nesta direção, alguns resultados parciais considerando grupos finitos não-abelianos foram obtidos por D. B. Coleman e D. S. Passman.

Estes resultados parecem sugerir que, para uma dada família de grupos, poderia ser possível obter um corpo adequado para o qual teríamos uma resposta positiva para o Problema do Isomorfismo. Entretanto, em 1972, E. C. Dade deu um exemplo de dois grupos metabelianos finitos não isomorfos cujas álgebras de grupo, definidas sobre qualquer corpo, são isomorfas. Também outro fato mostrava que nem sempre um grupo é determinado pelo seu anel de grupo sobre um corpo, este é, se G e H são dois grupos abelianos finitos de mesma ordem, então $\mathbb{C}G \simeq \mathbb{C}H$, sendo $\mathbb{C}$ o corpo dos complexos. A partir de então, pensou-se que melhores resultados seriam obtidos a partir de outros anéis de coeficientes.

Deste modo, a questão a ser examinada poderia ser formulada como:

Se G é um grupo finito, H um outro grupo qualquer e R um anel com unidade tais que $RG \simeq RH$, será então que $G \simeq H$?

Os trabalhos de G. Higman e S. D. Berman acerca das unidades de anéis de grupo, levam à conclusão que se G é um grupo abeliano finito e $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então $G \simeq H$. Em 1968, A. Whitcomb obteve resultados que implicavam: se G é um grupo metabeliano finito e $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então $G \simeq H$. Os grupos nilpotentes finitos também representam uma solução positiva sobre o anel dos inteiros, conforme demonstraram A. Weiss, K. Roggenkamp e L. L. Scott. A classe dos grupos circulares oferece outra solução ao problema do isomorfismo para $\mathbb{Z}$, segundo R.Sandling, outras soluções do problema foram igualmente obtidas com diversos grupos, como os simétricos, diedrais, todos para o anel $\mathbb{Z}$.

É importante também observarmos que a existência do isomorfismo $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, mesmo não implicando a princípio numa solução do problema do isomorfismo para grupos finitos, acarreta uma série de semelhanças entre os grupos G e H. Para citar as semelhanças mais interessantes temos, por exemplo, que a ordem, os centros e os segundos centros dos dois grupos serão isomorfos; características como abelianidade, nilpotência e solubilidade são compartilhadas pelos dois grupos, isto porque a isomorfia dos anéis de grupo integrais determina uma correspondência entre as séries centrais e derivadas dos dois grupos, também é preservado entre os grupos, o reticulado de subgrupos normais.

As inúmeras semelhanças entre os dois grupos finitos impostos pelo isomorfismo de seus anéis de grupos integrais sugeriram que se conjecturasse que o Problema do Isomorfismo para estes anéis de grupos integrais tem resposta positiva para todos os grupos finitos. E esta questão se tornou conhecida como o Problema do Isomorfismo (Iso), ou seja:

$$(Iso) \qquad \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H \Rightarrow G \simeq H$$

O seguinte resultado nos apresenta ainda uma outra razão para nos concentrarmos na questão usando $\mathbb{Z}$ como o anel de coeficientes.

3.1 PROPOSIÇÃO. *Sejam G e H dois grupos. Se $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então $RG \simeq RH$ para um anel comutativo R (como R-álgebra).*

Analisaremos agora algumas classes de grupos nas quais o problema do isomorfismo já foi provado.

3.1 Grupos Abelianos e Hamiltonianos

Usando um fato já descrito no capítulo 1, que afirma: Se G é um grupo abeliano finito, então toda unidade de ordem finita em $\mathbb{Z}G$ é trivial, Higman apresentou uma prova simples para anéis de grupo integrais isomorfos de grupos abelianos.

3.2 TEOREMA. *Sejam G um grupo abeliano finito e H um outro grupo. Se $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então $G \simeq H$.*

Demonstração. Se $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, podemos assumir que existe um isomorfismo normalizado, ψ. Se G é um grupo abeliano, então o anel de grupo $\mathbb{Z}G$ é comutativo, e segue que H é também abeliano. Como o posto de um módulo livre sobre $\mathbb{Z}$ é invariante, segue imediatamente que H é também finito e que $|H| = |G|$. Para cada elemento $g \in G$ temos que $\psi(g)$ é uma unidade normalizada de ordem finita em $\mathbb{Z}H$. Segue do teorema 1.11 na página 7 que $\psi(g) \in \pm H$ e como ψ é normalizada, vemos que $\psi(g) \in H$. Isto mostra que $\psi(G) \subset H$ e, como $|G| = |H|$, temos que $\psi(G) = H$. Em outras palavras, a restrição de ψ a G concede um isomorfismo de grupo entre G e H. ■

3.3 TEOREMA. *Sejam G um 2-grupo Hamiltoniano e H um outro grupo. Se $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então $G \simeq H$.*

Demonstração. Se G é um grupo 2-Hamiltoniano, então todas as unidades do anel de grupo integral $\mathbb{Z}G$ são triviais. Então, o número das unidades em $\mathbb{Z}G$ é $2|G|$. Daí também o número das unidades em $\mathbb{Z}H$ é $2|G| = 2|H|$, então também todas as unidades de $\mathbb{Z}H$ são triviais e segue que H é um grupo 2-Hamiltoniano. Como no teorema anterior, segue que se $\psi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}H$ é um isomorfismo normalizado, então $\psi(G) = H$, e a restrição de ψ a G nos dá o isomorfismo de grupo desejado. ■

3.2 Outras soluções e algumas propriedades

Outra classe de grupos também muito importante é a dos grupos metabelianos. Estes também são determinados pelos seus anéis de grupo integral, e isso foi mostrado por Whitcomb. Para isso, são necessários alguns resultados técnicos. Primeiro, notemos que se $g, h \in G$, então temos a seguinte identidade:

$$gh - 1 = (g-1) + (h-1) + (g-1)(h-1).$$

Como $(g-1)(h-1) \in \Delta^2(G)$, esta identidade implica

$$gh - 1 \equiv (g-1) + (h-1) \quad (mod\, \Delta^2(G)).$$

Tomando $h = g^{-1}$, vemos que $g^{-1} - 1 \equiv -(g-1) \quad (mod\, \Delta^2(G))$, então, para algum inteiro a,

$$g^a - 1 \equiv a(g-1) \quad (mod\, \Delta^2(G)).$$

Daí, a aplicação $\phi : G \to \frac{\Delta(G)}{\Delta^2(G)}$ dado por $G \ni g \mapsto (g-1) + (\Delta^2(G))$ é realmente um homomorfismo de G no grupo aditivo $\frac{\Delta(G)}{\Delta^2(G)}$. Devemos usar esta observação para mostrar que o $\frac{G}{G'}$ é invariante sob o isomorfismo de anel de grupo.

3.4 Lema. *Sejam G um grupo e G' o subgrupo comutador, então:*

$$\frac{G}{G'} \simeq \frac{\Delta(G)}{\Delta^2(G)}.$$

3.5 Proposição. *Sejam G um grupo e G' seu subgrupo comutador, então*

$$G \cap (1 + \Delta^2(G)) = G'.$$

3.6 Proposição. *Sejam G e H tais que $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então*

$$\frac{G}{G'} \simeq \frac{H}{H'}$$

Demonstração. Seja $\psi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}H$ um isomorfismo normalizado. Como $\Delta(G)$ e $\Delta(H)$ são núcleos das respectivas aplicações aumento e ψ é normalizado, $\psi(\Delta^2(G)) = \Delta^2(H)$, portanto,

$$\frac{G}{G'} \simeq \frac{\Delta(G)}{\Delta^2(G)} \simeq \frac{\Delta(H)}{\Delta^2(H)} \simeq \frac{H}{H'}.$$

■

3.7 Lema. *Seja N um subgrupo normal de um grupo G. Se um elemento $g \in G$ é tal que $g - 1 \in \Delta(G)\Delta(G, N)$, então $g \in N'$.*

3.8 Proposição. *Seja N um subgrupo normal de um grupo G, então*

$$\frac{N}{N'} \simeq \frac{\Delta(N)}{\Delta(G)\Delta(G,N)}.$$

Pelo teorema 1.16 na página 8 demonstra-se a existência de uma correspondência entre os subgrupos normais de G e H, que de fato é um isomorfismo entre estes reticulados, sempre que $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$. Além disso, grupos normais correspondentes apresentam uma série de semelhanças. Escreveremos aqui $\widehat{N} = \sum_{x \in N} x$ para um subgrupo (ou subconjunto) N de G.

3.9 Proposição. *Sejam G e H grupos finitos tais que $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$. Seja N um subgrupo normal de G e seja M o subgrupo correspondente de H, então*

(i) $\mathbb{Z}(\frac{G}{N}) \simeq \mathbb{Z}(\frac{H}{M})$;

(ii) $\frac{N}{N'} \simeq \frac{M}{M'}$;

(iii) se N é abeliano, então M também é abeliano;

(iv) $\psi(\widehat{N}) = \widehat{M}$;

(v) $|N| = |M|$;

(vi) $\psi(\Delta(G, N)) = \Delta(H, M)$.

3.10 Teorema. *(Whitcomb,1968) Sejam G um grupo finito e H outro grupo tal que $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então*

$$G/G'' \simeq H/H'',$$

onde G'' e H'' são os subgrupos comutadores de G' e H' respectivamente.

3.11 COROLÁRIO. *Sejam G um grupo metabeliano finito e H um outro grupo. Se $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então $G \simeq H$.*

Demonstração. Como G é metabeliano, G' é abeliano. Por causa do isomorfismo dado na hipótese, temos $|G| = |H|, \frac{G}{G'} \simeq \frac{H}{H'}$, então $|G'| = |H'|$. Além disso, pelo corolário 3.8, concluímos que

$$G' \simeq \frac{\Delta(G, G')}{\Delta(G)\Delta(G, G')} \simeq \frac{\Delta(H, H')}{\Delta(H)\Delta(H, H')} \simeq H'/H''.$$

Segue que $H'' = 1$. Daí, o resultado é imediato. ■

Note que os argumentos acima permitem-nos mostrar que o centro de um grupo finito, $\zeta(G)$ e o segundo centro $\zeta_2(G)$ são invariantes sob o isomorfismo de anéis de grupo.

3.12 TEOREMA. *Sejam G um grupo finito e H outro grupo. Se $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então $\zeta(G) \simeq \zeta(H)$ e $\zeta_2(G) \simeq \zeta_2(H)$.*

Demonstração. Seja $\psi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}H$ o isomorfismo normalizado. Pelo teorema 1.11 na página 7, as unidades centrais de torção de $\mathbb{Z}G$ são triviais, temos então

$$\psi(\zeta(G)) = \zeta(H).$$

Segue que $\zeta(G) \simeq \zeta(H)$. Além disso, tomando os quocientes de G e H pelos seus respectivos centros, $\bar{G} = G/\zeta(G)$ e $\bar{H} = H/\zeta(H)$, ψ induz um isomorfismo, $\bar{\psi}$

$$\bar{\psi} : \mathbb{Z}(\bar{G}) = \mathbb{Z}(\frac{G}{\zeta(G)}) \to \mathbb{Z}(\frac{H}{\zeta(H)}) = \mathbb{Z}(\bar{H}).$$

Pela mesma razão acima, $\bar{\psi}(\zeta(\bar{G})) = \zeta(\bar{H})$. Daí, se $g \in \zeta_2(G)$, temos $\bar{\psi}(\bar{g}) = \bar{h}$ para algum $\bar{h} \in \zeta(\bar{H})$. Segue que $\psi(g) = h + \delta$, $\delta \in \Delta(H, \zeta(H))$. Agora, podemos concluir que se $g \in \zeta_2(G)$, então

$$\psi(g) \equiv h_g \quad mod \Delta(H)\Delta(H, \zeta(H))$$

para um único $h_g \in \zeta_2(H)$. Finalmente, segue da mesma forma que $g \to h_g$ é um isomorfismo e $\zeta_2(G) \simeq \zeta_2(H)$. ■

3.13 TEOREMA. *Seja G um grupo nilpotente finito, então $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$ implica que H é também nilpotente e $\mathbb{Z}G_p \simeq \mathbb{Z}H_p$ para todo p-subgrupo de Sylow G_p e H_p de G e H respectivamente.*

Demonstração. Seja $\psi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}H$ o isomorfismo dado. Suponha que P é um p-subgrupo de Sylow de G. Então pela proposição 3.9, $\psi(\widehat{P}) = (\widehat{P_1})$ para algum $P_1 \lhd H$ com $|P| = |P_1|$. Assim, temos que os p-subgrupos de Sylow de H são normais para todo p e H é nilpotente. Além disso, se escrevermos $G = P \times Q, H = P_1 \times Q_1$ então, novamente pela proposição 3.9, $\psi(\widehat{Q}) = \widehat{Q_1}$ e $\mathbb{Z}P \simeq \mathbb{Z}(\frac{G}{Q}) \simeq \mathbb{Z}(\frac{H}{Q_1}) \simeq \mathbb{Z}P_1$. Isto prova o teorema. ■

O último teorema reduz o problema do isomorfismo para grupos nilpotentes finitos para p-grupos. Roggenkamp e Scott provaram que $\mathbb{Z}P \simeq \mathbb{Z}P_1 \Rightarrow P \simeq P_1$ se P é um p-grupo.

3.14 TEOREMA (Sehgal-Sehgal-Zassenhaus). *: Suponha que G é um grupo finito que é uma extensão de um grupo abeliano A por um grupo nilpotente B. Suponha que mdc $(|A|, |B|) = 1$. Então $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H \Rightarrow G \simeq H$.*

É conhecido da classificação dos grupos simples finitos que, exceto para poucas exceções, diferentes grupos simples tem diferentes ordens. Esse é o principal argumento para o seguinte resultado:

3.15 TEOREMA. *Seja G um grupo finito simples, então $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H \Rightarrow G \simeq H$.*

Destacamos os resultados que consideramos mais relevantes até hoje desenvolvidos tanto para a Propriedade do Normalizador quanto para o Problema do Isomorfismo, já que existem muitos outros. Apesar de haver inúmeras classes de grupo para os quais temos resposta afirmativa de ambos os problemas, recentemente, Martin Hertweck apresentou dois resultados que constituem-se em contra-exemplos para ambas as questões. Faremos uma breve descrição:

3.3 Os Contra-exemplos

3.16 TEOREMA. *(M. Hertweck, 2001): Existe um grupo finito G com um automorfismo de grupo não-interno τ, tal que $\tau(g) = u^{-1}gu$ com $u \in \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$, para todo $g \in G$. O grupo G tem ordem $2^{25} \cdot 97^2$, um 97-subgrupo de Sylow normal, e é metabeliano.*

Obtemos assim um grupo G tal que $Aut_U(G) \nsubseteq Inn(G)$.

3.17 TEOREMA. *(M. Hertweck, 2001): Existe um grupo solúvel X, que é o produto semi-direto de um subgrupo normal G e um subgrupo cíclico $\langle c\rangle$, tal que*

(i) Existe um automorfismo não interno τ em G e uma unidade $t \in \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ tal que $\tau(g) = g^t$ para todo $g \in G$;

(ii) Em $\mathbb{Z}X$, o elemento c inverte o elemento t;

(iii) O subgrupo $Y = \langle G, tc\rangle$ de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}X)$ tem a mesma ordem de X mas não é isomorfo a X;

(iv) A ordem de X é $2^{21} \cdot 97^{28}$. O grupo X tem um 97-subgrupo de Sylow normal e o comprimento da série derivada de X é 4.

E, $\mathbb{Z}X \simeq \mathbb{Z}Y$ mas X não é isomorfo a Y.

Observamos que o grupo G dado no teorema 3.16 é diferente do grupo G dado no teorema 3.17. O primeiro grupo é, de estrutura mais simples e propicia uma boa introdução para o grupo G usado no teorema 3.17. Está claro que o teorema 3.16 nos fornece um contra-exemplo para a propriedade do normalizador e o teorema 3.17 nos fornece um contra-exemplo para o problema do isomorfismo e devemos destacar que os principais elementos para o teorema 3.17, já aparecem na prova do teorema 3.16, com detalhes inteiramente semelhantes. Na verdade, este foi o processo utilizado por Hertweck para o resultado que realmente era objetivado, o contra-exemplo para o Problema do Isomorfismo.

Além do fato do Problema do Isomorfismo ser uma questão central na teoria dos anéis de grupos, como já citado, e da imensa importância que ele tem no desenvolvimento e norteamento das pesquisas na teoria dos anéis de grupos, há ainda uma outra característica fundamental e esta é a descoberta de Mazur em 1995 da existência de uma relação entre este problema e a questão do normalizador no que diz respeito a algumas extensões infinitas de grupos finitos; de fato, ele obteve o seguinte teorema.

3.18 TEOREMA. *Se G é um grupo finito e C_∞ representa um grupo cíclico infinito, então o problema do isomorfismo para $\mathbb{Z}(G \times C_\infty)$ tem resposta afirmativa se, e somente se, tem resposta afirmativa para G e vale a conjectura do normalizador em G.*

Este teorema foi generalizado por E. Jespers e O. S. Juriaans, que obtiveram o mesmo resultado substituindo C_∞ por um grupo abeliano finitamente gerado e posteriomente por Hertweck, que obteve um caso de extensão por um grupo finito, argumento fundamental para os contra-exemplos citados.

Capítulo 4

Resultados Propostos

Com o objetivo principal de investigar a Propriedade do Normalizador e o Problema do Isomorfismo para extensões orladas de um grupo abeliano por um nilpotente, nós propomos e investigamos alguns resultados, que agora apresentaremos e desenvolveremos.

4.1 Uma solução para a Propriedade do Normalizador

Nosso primeiro resultado é a investigação da Propriedade do Normalizador, para grupos dados pelo produto orlado de um grupo abeliano na base e um nilpotente no topo. Na sua demonstração, utilizaremos a formulação dado por Jackowski e Marciniak para a Propriedade.

4.1 TEOREMA (A). *Seja G um grupo finito dado pelo produto orlado de um grupo abeliano A e um nilpotente N, $G = A \ wr \ N = A^{|N|} \rtimes N$, com $mdc(|A|, |N|) = 1$, então a propriedade do normalizador vale para G.*

Demonstração. Provaremos este teorema mostrando que o conjunto

$$I_S = \{\varphi_u \in Aut_{\mathcal{U}}(G) : \varphi_u^2 = i, \varphi_u|_S = i\}$$

de automorfismos de G está contido em $Inn(G)$, utilizando o teorema 2.8 na página 18.

Estamos supondo $|G|$ par, pois o resultado é válido para todo grupo com ordem ímpar, ver teorema 2.7 na página 17.

Devido à hipótese $mdc(|A|,|N|) = 1$, obtemos duas possibilidades para as ordens dos grupos A^m e N, sendo m a ordem de N. Analisemos o resultado em cada um dos casos:

Caso 1) $|A^m|$ é par e $|N|$ é ímpar: trivial pois neste caso G possui um $2-subgrupo$ de Sylow normal, ver teorema 2.9 na página 21.

Caso 2) $|A^m|$ é ímpar e $|N|$ é par:

Seja $\varphi_u \in I_S$. Primeiramente, verifiquemos a ação de φ_u em A^m. Seja $\alpha = (a_1, ..., a_m)$ um elemento de A^m , tomamos $g = \alpha$ em A^m, lembrando que $\varphi_u(g) \sim g$ em G, como visto na demonstração do teorema 2.17 na página 25, temos que existem $x_\alpha \in A^m$ e $y_\alpha \in N$, ambos dependendo de α, tais que

$$u^{-1}\alpha u = \varphi_u(\alpha) = (x_\alpha y_\alpha)^{-1}\alpha(x_\alpha y_\alpha) = y_\alpha^{-1}x_\alpha^{-1}\alpha x_\alpha y_\alpha = y_\alpha^{-1}\alpha y_\alpha$$

pois $x_\alpha^{-1}\alpha x_\alpha \in A^m$, que é abeliano. Logo,

$$u^{-1}\alpha u = y_\alpha^{-1}\alpha y_\alpha \quad \textit{com}\; y_\alpha \in N \text{ dependendo de } \alpha.$$

Como A é abeliano, podemos escrevê-lo como produto direto de seus p-subgrupos de Sylow.

Analisemos o que ocorre em cada subgrupo:

Seja P um p-subgrupo de Sylow de A^m, então, pelo teorema 2.2 na página 14, para todo $x \in P$, existe $g_P = a_P n_P \in G$, com $a_P \in A^m$ e $n_P \in N$ tal que

$$u^{-1}xu = n_P^{-1}a_P^{-1}xa_P n_P = n_P^{-1}xn_P,$$

sendo a última igualdade devido à abelianidade de A^m.

Seja Q um q-subgrupo de Sylow de A^m, com $q \neq p$, então para todo $y \in Q$, existe $g_Q = a_Q n_Q \in G$, com $a_Q \in A^m$ e $n_Q \in N$ tal que

$$u^{-1}yu = n_Q^{-1}a_Q^{-1}ya_Q n_Q = n_Q^{-1}yn_Q,$$

sendo a última igualdade devido à abelianidade de A^m.

Considerando $A^m \ni a = xy \in P \times Q$, e sendo $\varphi_u(a) \sim a$ em G, temos que existe $a_o n_o \in G$ com $a_o \in A^m \; e \; n_o \in N$, ambos dependendo de xy tal que

$$u^{-1}xyu = n_o^{-1}a_o^{-1}xya_o n_o = n_o^{-1}xyn_o,$$

a última igualdade devido à abelianidade de A^m.

Mas, $n_o^{-1}xn_on_o^{-1}yn_o = n_o^{-1}xyn_o = u^{-1}xyu = u^{-1}xuu^{-1}yu = n_P^{-1}xn_Pn_Q^{-1}yn_Q$, então $n_o^{-1}x^{-1}n_on_P^{-1}xn_P = n_o^{-1}yn_on_Q^{-1}y^{-1}n_Q$, sendo o primeiro membro da igualdade um elemento de P e o segundo, um elemento de Q, que são p_i-subgrupos de Sylow distintos, então

$$n_o^{-1}x^{-1}n_on_P^{-1}xn_P = 1 = n_o^{-1}yn_on_Q^{-1}y^{-1}n_Q,$$

o que implica em

$$n_Pn_o^{-1}xn_on_P^{-1} = x \quad e \quad n_Qn_o^{-1}yn_on_Q^{-1} = y$$

com $x \in P, y \in Q$ *e* $n_on_Q^{-1}, n_on_P^{-1} \in N$. Mas os p_i-subgrupos de Sylow são extensos, logo, pelas propriedades do produto orlado, as igualdades acima só ocorrem se $n_on_P^{-1} = 1$ *e* $n_on_Q^{-1} = 1$ o que implica em $n_P = n_o = n_Q$. Então, para qualquer $\alpha \in A^m$:

$$\varphi_u(\alpha) = n_o^{-1}\alpha n_o \quad com \quad n_o \in N.$$

Sendo $A^m \lhd G$, temos $n_o^{-1}\alpha n_o \in A^m$ e assim, ao conjugar por u a última igualdade obtemos $u^{-2}\alpha u^2 = un_o^{-1}\alpha n_ou = n_o^{-2}\alpha n_o^2$.

Como $u^2 = id$ em I_S, temos $\alpha = n_o^{-2}\alpha n_o^2 \Rightarrow n_o^2 = 1$ pois n_o centraliza A^m.

$$u^{-1}\alpha u = n_o^{-1}\alpha n_o \qquad com \quad n_o^2 = 1, \forall \alpha \in A^m. \tag{4.1}$$

Verifiquemos agora a ação de φ_u em N.

Como N é nilpotente, podemos escrevê-lo como produto direto dos seus p-subgrupos de Sylow.

Escolhamos P_1 o 2-subgrupo de Sylow de G, fixado em I_S que está inteiramente em N pois A tem ordem ímpar, então pelo teorema 2.2 na página 14 temos que para todo $x \in P_1$, existe $g_P = a_{P_1}n_{P_1} \in G$, com $a_{P_1} \in A^m$ e $n_{P_1} \in N$ tal que

$$u^{-1}xu = n_{P_1}^{-1}a_{P_1}^{-1}xa_{P_1}n_{P_1} = x,$$

esta última igualdade devido ao fato de $u|_{P_1} = id$ em I_S.

Seja Q_1 um q-subgrupo com $q \neq 2$, então para todo $y \in Q_1$, existe $g_{Q_1} = a_{Q_1}n_{Q_1} \in G$, com $a_{Q_1} \in A^m$ e $n_{Q_1} \in N$ tal que

$$u^{-1}yu = n_{Q_1}^{-1}a_{Q_1}^{-1}ya_{Q_1}n_{Q_1}. \tag{4.2}$$

Sendo $A^m \lhd G$, podemos tomar o quociente $\overline{G} = G/A^m = (A^m \rtimes N)/A^m \simeq N$.

A propriedade é válida para grupos nilpotentes, então, em $\overline{G}$, temos que existe $n_* \in N$ tal que:

$$\bar{u}^{-1}t\bar{u} = n_*^{-1}tn_*, \ \forall\, t \in N \text{ com } \bar{u} \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\bar{G}).$$

Conjugando novamente por u, obtemos:

$$t = \bar{u}^{-2}t\bar{u}^2 = n_*^{-2}tn_*^2 \Rightarrow n_*^2 \in \zeta(N).$$

Os elementos n_* *e* n_*^2 são da forma $n_* = n_1n_2$ *e* $n_*^2 = n_1^2n_2^2$ *com* $n_* \in N$, $n_1 \in P_1$, $n_2 \in Q$, sendo Q o produto de subgrupos de Sylow não par, $n_*^2 \in \zeta(N)$, $n_1^2 \in \zeta(P_1)$ *e* $n_2^2 \in \zeta(Q)$.

Como $n_2^2 \in \zeta(Q)$ e Q tem ordem ímpar, n_2 comuta com os elementos de Q, por outro lado n_2 também comuta com os elementos de P_1 por causa do produto direto. Daí, $n_*^{-1}tn_* = n_2^{-1}n_1^{-1}tn_1n_2 = n_1^{-1}tn_1$

Temos, então para qualquer $N \ni t = t_1t_2$, $t_1 \in P_1$, $t_2 \in Q$:

$$\bar{u}^{-1}t\bar{u} = n_*^{-1}t_1n_*n_*^{-1}t_2n_* = n_1^{-1}t_1n_1n_1^{-1}t_2n_1 = t_1t_2 = t,$$

a penúltima igualdade devido ao fato de P_1 ser fixado por $\bar{u}$ e n_1 comutar com t_2.

Obtemos assim, para qualquer $y \in Q_1$, $\bar{u}^{-1}y\bar{u} = y$ em $\overline{G}$, isso implica que, em G, $u^{-1}yu = \alpha_{Q_1}^{-1}y\alpha_{Q_1}$ *com* $\alpha_{Q_1} \in A^m$.

Conjugando 4.2 por u, temos

$$y = u^{-2}yu^2 = n_o^{-1}\alpha_{Q_1}^{-1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1}y\alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}n_o \quad \forall y \in Q_1$$

Sendo $n_o^2 = 1$, $n_o \in P_1$ e assim y comuta com n_o, e daí
$y = n_oyn_o^{-1} = n_on_o^{-1}\alpha_{Q_1}^{-1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1}y\alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}n_on_o^{-1} = \alpha_{Q_1}^{-1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1}y\alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}$ o que implica em y comutar com $\alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}$.

Conjugando por u a igualdade $y\alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1} = \alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}y$, obtemos

$\alpha_{Q_1}^{-1}y\alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}n_on_o^{-1}n_o\alpha_{Q_1}n_o = n_o^{-1}\alpha_{Q_1}n_on_o^{-1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}n_o\alpha_{Q_1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1}y\alpha_{Q_1}$

$\alpha_{Q_1}^{-1}y\alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}n_o\alpha_{Q_1}n_o = n_o^{-1}\alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1}y\alpha_{Q_1}$

$\alpha_{Q_1}^{-1}\alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}yn_o\alpha_{Q_1}n_o = n_o^{-1}\alpha_{Q_1}yn_o\alpha_{Q_1}n_o = n_o^{-1}\alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1}y\alpha_{Q_1}$

$n_oy\alpha_{Q_1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1} = n_o^{-1}\alpha_{Q_1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1}y$

$y\alpha_{Q_1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1} = \alpha_{Q_1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1}y.$

Logo, y também comuta com $\alpha_{Q_1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1}$, daí, y comuta com o produto de $\alpha_{Q_1}n_o\alpha_{Q_1}^{-1}$ por $\alpha_{Q_1}n_o^{-1}\alpha_{Q_1}$ que é igual a $\alpha_{Q_1}^2$.

Sejam $\alpha_{Q_1} = (a_1, ...a_m), \quad \alpha_{Q_1}^2 = (a_1^2, ...a_m^2) \quad e \quad u^{-2}yu^2 = \alpha_{Q_1}^{-2}y\alpha_{Q_1}^2 = y.$

O fato de y comutar com $\alpha_{Q_1}^2$ implica em α_{Q_1} pertencer ao 2-subgrupo de Sylow de A^m que neste caso é a identidade, logo $u^{-1}yu = \alpha_{Q_1}^{-1}y\alpha_{Q_1} = y$. E assim :

$$u^{-1}nu = n, \qquad \forall n \in N. \tag{4.3}$$

Podemos ver que neste caso, $n_o \in \zeta(N)$:

Para qualquer $m \in N$ e qualquer $\alpha \in A^m$, temos

$$g = m\alpha = \beta m \text{ logo } \alpha = m^{-1}\beta m, \; com \; \beta \in A^m,$$

seu inverso é $g^{-1} = \alpha^{-1}m^{-1} = m^{-1}\beta^{-1}$, conjugando por u, obtemos

$$u^{-1}m\alpha u = mn_o^{-1}\alpha n_o$$

e

$$u^{-1}m^{-1}\beta^{-1}u = m^{-1}n_o^{-1}\beta^{-1}n_o \text{ o que implica em } mn_o^{-1}\alpha n_o m^{-1}n_o^{-1}\beta^{-1}n_o = 1.$$

Daí, $n_o^{-1}\alpha n_o = m^{-1}n_o^{-1}\beta n_o m = m^{-1}n_o^{-1}mm^{-1}\beta mm^{-1}n_o m$, o que implica $\alpha = n_o m^{-1}n_o^{-1}m\alpha m^{-1}n_o mn_o^{-1}$, logo, pelas propriedades do produto orlado,

$$m^{-1}n_o mn_o^{-1} = 1 \text{ logo } mn_o = n_o m \text{ e assim, } n_o \in \zeta(N),$$

como afirmamos; logo a expressão 4.3 pode ser escrita como $u^{-1}nu = n_o^{-1}nn_o$.

Assim, temos por 4.1 e 4.3, que

$$u^{-1}gu = n_o g n_o \quad , \quad \forall g \in G$$

Concluímos então que φ_u é um automorfismo interno de G, como queríamos. ■

4.2 Uma solução para o Problema do Isomorfismo

À seguir, apresentaremos nosso segundo resultado principal, neste, investigamos o Problema do Isomorfismo para produtos orlados de um grupo abeliano na base por um nilpotente no topo.

4.2 Teorema (B). *Seja G um grupo finito dado pelo produto orlado de um grupo abeliano A e um nilpotente N, $G = A$ wr $N = A^{|N|} \rtimes N$, com mdc $(|A|, |N|) = 1$ e seja H um grupo. Se $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então $G \simeq H$.*

Demonstração. Seja m a ordem de N, temos pela proposição 3.9 na página 35, que, para $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}(A^m \rtimes N) \simeq \mathbb{Z}H$ e $A^m \lhd G$, existe um subgrupo B normal em H com $|B| = |A^m|$ e B abeliano, tal que $\mathbb{Z}(G/A^m) \simeq \mathbb{Z}N \simeq \mathbb{Z}(H/B)$.

Como N é nilpotente e temos a validade de (Iso) para a classe destes grupos, então $N \simeq H/B$.

Sendo $mdc(|B|, |N|) = 1 \quad e \quad N \simeq H/B$, então podemos utilizar o resultado de Schur-Zassenhaus,(ver proposição 1.34 na página 11) e concluir que $H = B \rtimes N$.

Devemos agora verificar se $A^m \simeq B$ e se as ações de N sobre B e de N sobre A^m são as mesmas.

Tomaremos as somas de classes de conjugação em $G, \widehat{\mathcal{C}_g}$ com $g \in A^m$, pela proposição 1.16 na página 8 temos que, para cada $g \in A^m$ existe $h \in H$ tal que $\psi(\hat{\mathcal{C}}_g) = \hat{\mathcal{C}}_h \quad com \quad o(g) = o(h)$, para $\psi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}H$, a isomorfia entre os anéis de grupo integral.

Afirmamos que o elemento h obtido acima pertence inteiramente ao grupo B, vejamos:

Pelo resultado de Dietzman,(ver proposição 1.32 na página 10) $\mathcal{C}_g \subseteq G$ implica em $< \mathcal{C}_g > \lhd G$. Pelas proposições 1.16 e 3.9, nas páginas 8 e 35 respectivamente, temos o correspondente $\mathcal{C}_h \subseteq H$ e um subgrupo normal em H, mas pelo resultado de Petit Lobão e Sehgal, (ver proposição 1.33 na página 11) temos que este subgrupo é $< \mathcal{C}_h > \lhd H$. Sendo $g \in A^m$, temos $\mathcal{C}_g \subseteq A^m$ e $< \mathcal{C}_g > \lhd A^m$ pois A^m é abeliano e como B é o subgrupo normal de H correspondente a A^m, pelo reticulado de subgrupos normais temos $< \mathcal{C}_h > \lhd B$, logo $h \in B$.

Como A é abeliano, podemos escrevê-lo como produto direto de seus subgrupos cíclicos:

$$A = C_1 \times ... \times C_r \quad com \quad C_i =< a_i >,\ i = 1, ..., r,$$

e então, podemos escrever A^m da seguinte forma:

$$A^m = A \times ... \times A = {C_1}^m \times ... \times {C_r}^m$$

com $C_i^m =< (a_i, 1, ..., 1), (1, a_i, 1, ..., 1), ..., (1, ..., 1, a_i) >$

Chamando $\alpha_{i1} = (a_i, 1, ..., 1), \alpha_{i2} = (1, a_i, 1, ..., 1), ..., \alpha_{im} = (1, ..., 1, a_i)$ podemos perceber que cada uma das m-uplas $\alpha_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant r, m$ pertence à classe de conjugados de α_{i1} em G, que são obtidos pela ação dada pelo produto orlado, os quais geram ${C_i}^m$, isto é,

$$< \mathcal{C}_{\alpha_{i1}} >=< \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{im} >= {C_i}^m,\ \text{com } |{C_i}^m| = |{a_i}^m|.$$

Sendo $\mathcal{C}_{\alpha_{i1}} \subset G$, novamente pela proposição 1.33, existe $< \mathcal{C}_{\beta_{i1}} > \lhd H$, mas $< \mathcal{C}_{\alpha_{i1}} > \lhd A^m$, então $< \mathcal{C}_{\beta_{i1}} > \lhd B$ com $\beta_{i1} \in B$ associado a $\alpha_{i1} \in A^m$ pela correspondência de classes de conjugação. Determinamos então os β_{ij} a partir de β_{i1} pela ação do mesmo elemento de N que conjuga α_{i1} determinando α_{ij}. Ademais, temos β_{ij} independentes, devido à independência dos α_{ij} e à proposição 1.16 na página 8 , item (iii).

Temos então para cada ${C_i}^m =< \mathcal{C}_{\alpha_{i1}} >$ em A^m um subgrupo correspondente $< \mathcal{C}_{\beta_{i1}} >$ em B, com $o(\alpha_{i1}) = o(\beta_{i1})$ para cada $i = 1, ..., r$.

$${C_i}^m =< \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{im} > \ \text{ e } \ < \mathcal{C}_{\beta_{i1}} >=< \beta_{i1}, \beta_{i2}, ..., \beta_{im} >.$$

Sendo $A \simeq C_1 \times ... \times C_r$ escrevemos,

$$A^m = A \times A \times ... \times A \simeq A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$$

onde cada índice $j = 1, ..., m$ indica a posição de A no produto direto externo.

Desta forma, temos

$$A_1 \simeq C_1 \times ... \times C_r =< \alpha_{11}, \alpha_{21}, ..., \alpha_{r1} > \text{ onde } \alpha_{i1} = (a_i, 1, ..., 1), \quad i = 1, ..., r$$

$$\vdots$$

$$A_m \simeq C_1 \times ... \times C_r =< \alpha_{1m}, \alpha_{2m}, ..., \alpha_{rm} > \text{ onde } \alpha_{im} = (1, 1, ..., 1, a_i), \quad i = 1, ..., r.$$

Tomando então os elementos $\beta_{11}, \beta_{21}, ..., \beta_{r1}$, podemos gerar, devido às suas ordens e à independência dos β_{i1} um grupo isomorfo a A_1 :

$$< \beta_{11}, \beta_{21}, ..., \beta_{r1} >\simeq B_1 \simeq A_1.$$

Tomando agora os conjugados dos β_{i1}, por um determinado elemento de N, iremos gerar um outro subgrupo isomorfo a B_1 :

$$< \beta_{12}, \beta_{22}, ..., \beta_{r2} >\simeq B_2 \simeq A_2.$$

E sucessivamente, tomando os conjugados dos β_{i1}, por todos os elementos de N, obteremos m subgrupos isomorfos a B_1, da seguinte forma:

$$< \beta_{13}, \beta_{23}, ..., \beta_{r3} >\simeq B_3 \simeq A_3$$

$$\vdots$$

$$< \beta_{1m}, \beta_{2m}, ..., \beta_{rm} >\simeq B_m \simeq A_m.$$

Como os B_j, $j = 1, ..., m$ são gerados por elementos β_{ij} independentes e B é abeliano, teremos $B_1 \times ... \times B_m \simeq B$ Logo, $A^m \simeq A \times ... \times A \simeq B_1 \times ... \times B_m \simeq B$.

E assim, concluímos que A^m é isomorfo a B.

Percebemos ainda que a ação da conjugação dos elementos de B_j é a realizada pelo mesmo elemento de N que conjuga os respectivos elementos de A_j, dada pelo produto orlado, sendo assim a ação de N sobre B a mesma de N sobre A^m, ou seja, a ação orlada,

$$G = A \text{ wr } N \simeq B \text{ wr } N = H.$$

■

Conclusão

Neste trabalho, fizemos uma investigação de duas questões de destaque na teoria dos anéis de grupo integral, a Propriedade do Normalizador e o Problema do Isomorfismo.

Primeiramente, apresentamos ambas as questões e analisamos os resultados mais relevantes desenvolvidos sobre tais.

Nosso intuito inicial era investigar a Propriedade do Normalizador para produtos orlados de grupos Nilpotentes, mas, no percurso para tal, percebemos a importância e validade dos outros resultados que estávamos desenvolvendo como preliminares e imaginávamos óbvios. Traçamos então um novo roteiro e este, que cumprimos integralmente, foi: propusemos e demonstramos a Propriedade do Normalizador para o produto orlado de um grupo abeliano na base por um nilpotente no topo. Devemos observar que acreditamos ser este processo, com os mesmos argumentos, que nos levarão à verificação da questão para o produto orlado entre nipotentes, depois de uma devida investigação pormenorizada em seus elementos.

Devido à relação existente entre a questão do Normalizador e o Problema do Isomorfismo, objetivamos fazer um estudo paralelo. Desta forma, propusemos e demonstramos o Problema do Isomorfismo para produtos orlados de um grupo abeliano por um nilpotente. Também no caso do Isomorfismo, observamos que o resultado que desenvolvemos poderá ser estendido para o produto orlado entre grupos nilpotentes, justificando assim sua apresentação mesmo já se tendo o resultado desenvolvido por RoggenKamp e Scott verificando esta questão para a mesma classe de grupos e sem a hipótese adicional sobre as ordens.

Desta forma, vemos então neste trabalho o desenvolvimento de uma pesquisa em relação à Propriedade do Normalizador e do Problema do Isomorfismo, que nos apresenta um caminho traçado para a verificação das duas questões para produtos orlados de grupos nilpotentes, que certamente engrandece a lista da classe de grupos que são determinados por seus anéis de grupo e nos quais a Propriedade do Normalizador é válida.

Referências Bibliográficas

[1] Blackburn, N., Finite groups in the nonnomal subgroups have nontrivial intersection, J. Alg. 3, pp 30-37 (1996).

[2] Giambruno, A., Sehgal e Valenti, Automorphisms of the integral group rings of some wreath products, Comm. Alg. 19 pp 519-534(1991).

[3] Hertweck, M., A counterexample to the isomorphism problem for integral group rings, Ann Math 154(1), pp 115-138(2001).

[4] Jackowski, S. e Marciniak, Z., Group automorphisms inducing the identity map on cohomology; J Pure App. Alg. 44, pp 241-250(1987).

[5] Kurosh,A.G., The theory of groups; Chelsea Publishing Company, New York(1956).

[6] Li, Y. e Parmenter, M. M. e Sehgal, S. K., On the Normalizer Property for Integral Group Rings; Comm. Alg. 27(9), pp 4217-4223(1999).

[7] Neumann, P. M., On the structure of standard wreath products of groups; Math. Zeitschr.84, pp 343-373(1964).

[8] Passman, D. S., The Algebriac Structure of Group Rings; R.E.Krieger Publ., Malabar (1985).

[9] Petit Lobão, T., Frobenius groups and the isomorphism problem;Mat. Cont. 21,147-156(2001).

[10] Petit Lobão, T. e Polcino Milies, F.C., The normalizer property for integral group rings of Frobenius group; J. Alg. 256,1-6(2002).

[11] Petit Lobão e Sehgal, S.K.,The isomorphism problem for some complete monomial groups (preprint)

[12] Petit Lobão e Sehgal, S.K., The normalizer property for integral group rings of complete monomial groups; Comm. Alg. 31, 2971-2983(2003).

[13] Polcino Milies, F.C. e Sehgal, S.K., An introduction to group rings; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht(2002).

[14] Roggenkamp, K. W. e Scoot, L. L., Isomorphisms for p-adic group rings, Ann. Math. 126(1987), 593-647

[15] Sehgal, S. K., Units in integral Group Rings; Longman Scientific and Technical, Essex, 1993.

Índice Remissivo