Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Linear response formula para dinâmicas expansoras suaves

Cleidiane Araújo Brito

Salvador-Bahia
2018

Linear response formula para dinâmicas expansoras suaves

Cleidiane Araújo Brito

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Bomfim São Luiz Nunes.

Salvador-Bahia
2018

Brito A., Cleidiane.

Linear response formula para dinâmicas expansoras suaves / Cleidiane Araújo Brito. – Salvador, 2018.

74 f. : il.

Orientador: Thiago Bomfim São Luiz Nunes.

Dissertação (Mestrado - Matemática) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, 2018.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Linear response. 3. Transformações expansoras. 4. Formalismo Termodinâmico. 5. Gap espectral I. Bomfim, Thiago. II. Título.

CDU : 517.98

: 519.218.84

Linear response formula para dinâmicas expansoras suaves

Cleidiane Araújo Brito

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 27 de fevereiro de 2018.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago Bomfim São Luiz Nunes (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Junior
UFBA

Prof. Dr. Antonio Teófilo Ataide do Nascimento
UNEB

A Cosme e Maria, meus pais, por sua dedicação e doação em toda etapa da minha vida.

Agradecimentos

Agradecer é admitir que houve um momento em que se precisou de alguém. Ninguém se faz sozinho, sempre é preciso um olhar de apoio, uma palavra de incentivo, um gesto de compreensão, uma atitude de amor. Agradeço a todos aqueles que de alguma forma colaboraram com essa parte da minha vida acadêmica.

Primeiro agradeço a Deus pelo dom da vida, por sempre está presente iluminando meus caminhos e minhas escolhas e por me permitir finalizar mais uma etapa acadêmica. Uma folha não cai da árvore sem o seu consentimento.

Aos meus pais, *Cosme e Maria*, por sempre acreditarem em mim e me apoiarem, por todo amor e carinho e pelas renúncias para que eu pudesse realizar mais um sonho. Por todos ensinamentos durante toda a minha vida.

Ao meu companheiro, *Paulo César*, por se fazer presente durante toda esta caminhada, uma parte dela distante fisicamente. Por tornar esta caminhada menos árdua, por aturar minhas crises, pelos conselhos, palavras de apoio, broncas, por segurar minha mão nas vezes que pensei em desistir. Enfim, por todo seu companheirismo.

Ao meu orientador, *Thiago Bomfim*, por acreditar em meu potencial, por sua paciência em me orientar e por vezes me explicar a mesma coisa mais de uma vez até de fato eu compreender.

Aos professores, *Armando Castro* e *Antônio Teófilo*, por aceitarem compor a banca examidora deste trabalho e por suas contribuições.

Às minhas BFF's, *Ciéli* e *Driu*, pelo companheirismo e amizade que apesar dos momentos de ausência mantemos sempre a amizade viva mostrando que podemos contar umas com as outras sempre que precisamos.

Aos amigos que a Matemática me deu, *Jadson* e *Dodô*, por sempre acreditarem em mim, me apoiarem e, mesmo distantes, compartilharem comigo as angústias de um mestrado acadêmico.

Ao irmão que a UFBA me deu, *Ênio* (Chorênio), por estar sempre comigo desde o início desta etapa, por chorar junto comigo, escutar minhas lamentações e aturar meus dramas.

Aos colegas do Instituto de Matemática e Estatística da UFBA, em especial aos colegas de turma *Carlos (Rasta)*, *Afonso*, *Edgard*, *Pedro Henrique* e *Pedro Paulo* pelos momentos de estudo, a *Crísia*, por sempre me escutar, e *Yure*, por sempre me socorrer e sanar a maioria de minhas dúvidas.

Ao departamento de Matemática da UFBA, em especial aos professores que pude ter contato direto e contribuíram em minha formação enquanto pesquisadora matemática, e ao coordenador do programa de Mestrado, professor *Joilson* por ser humano e compreender as dificuldades de cada um.

À secretaria de pós-graduação da UFBA, em especial a *Davilene* e *Kléber* por sempre me atenderem e resolverem minhas solicitações.

Por fim, à CAPES pelo apoio financeiro.

"Faça as coisas o mais simples que você puder, porém não se restrinja às mais simples."

(Albert Einstein)

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal provar resultados de regularidade para a pressão topológica, para a densidade, para o estado de equilíbrio e para a medida conforme em relação a dinâmicas expansoras e potenciais suaves, e além disso, obter fórmulas para suas derivadas. Tais resultados são conhecidos como linear response formula. Neste sentido estudamos o espectro do operador de transferência e provamos a propriedade de gap espectral para tal operador através da técnica de cones e métricas projetivas. Como consequência do resultado de linear response obtemos resultados de estabilidade de leis estatísticas. Provamos que a correlação é C^1 em relação à dinâmica e que sua derivada vai a zero quando n cresce. Por fim, provamos que a média e a variância dados pelo teorema central do limite variam C^{r-1} em relação à dinâmica expansora e ao potencial suaves.

Palavras-chave: Formalismo Termodinâmico; Aplicações expansoras; Operador de Ruelle-Perron-Frobenius; Gap espectral.

Abstract

The present work has as main objective to prove regularity results for the topological pressure, density, for equilibrium states and conformal measure with respect to the smooth expanding dynamics and potentials, and also to obtain formulas for its derivatives. Such results are known as linear response formula. In this sense we study the spectrum of the transfer operator and we prove the spectral gap property for such operator through the technique of projective cones and metrics. As a consequence of the linear response result, we obtain results of statistical law stabilities. We prove that the correlation is C^1 with respect to the dynamics and that its derivative goes to zero as n goes to infinity. Finally, we prove that the mean and the variance given by the central limit theorem vary by C^{r-1} with respect to the smooth expanding dynamics and potentials.

Keywords: Thermodynamic Formalism; Expanding applications; Operator of Ruelle-Perron-Frobenius; Gap spectral.

Sumário

Introdução

O objetivo dos Sistemas Dinâmicos é descrever a evolução a longo prazo de sistemas para qual uma regra de evolução a curtíssimo prazo é conhecida. Esse tipo de questão apresenta-se naturalmente em diversas áreas como: Física, Química, Meteorologia, Ecologia, Economia, e etc.

Em alguns casos, a mudança no sistema é observada via uma regra que é aplicada a intervalos regulares; a que dizemos tratar-se de um sistema com tempo discreto. Já outros, são sistemas em tempo contínuo cuja evolução irá ser apresentada por meio de uma equação diferencial; mesmo nesse caso em muitas situações é conveniente considerar como primeira aproximação um modelo em tempo discreto. Mais precisamente, dado um espaço de fase M, a regra de evolução de um sistema discreto é dada por uma transformação $f : M \to M$ que diz ao estado $x \in M$ qual será o seu futuro em uma unidade de tempo. Assim um problema possível consiste em descrever o comportamento, quando o tempo converge para o infinito, da maioria das órbitas; no contexto atual maioria pode significar um conjunto de probabilidade total. Um outro problema importante é saber se o comportamento assintótico da transformação é estável sob pequenas mudanças na lei de evolução. Ambas as questões são cruciais já que estamos interessados em usar um modelo matemático para simplificar um sistema real.

Inicialmente para solução de problemas dinâmicos havia uma prevalência em tentar encontrar as trajetórias, através das expressões analíticas das equações diferenciais, e tentava-se descrever o comportamento futuro; porém em muitos casos não se conseguia sequer encontrar a expressão analítica que descrevia o fenômeno estudado e mesmo quando se tinha a expressão analítica era extremamente difícil descrever o comportamento global. No final do século XIX, Poincaré propôs utilizar métodos que até então não vinham sendo utilizados, como argumentos de Topologia e Teoria da Medida, para encontrar informação quantitativa sobre a dinâmica sem precisar encontrar as soluções das equações diferenciais. Essa proposta de Poincaré evoluiu ao longo de seus trabalhos culminando numa contribuição revolucionária para Mecânica Celeste, esta contribuição é considerada como o nascimento dos Sistemas Dinâmicos como disciplina matemática.

Como desencadeamento natural das ideias introduzidas por Poincaré, modernamente temos a chamada Teoria Ergódica que se ocupa de entender os sistemas dinâmicos através de ideias e argumentos de Teoria da Medida.

Dado uma dinâmica $f : M \to M$ mensurável, μ uma probabilidade $f-$invariante e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ um observável integrável, o Teorema Ergódico de Birkhoff nos diz que $\exists \lim \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(f^i(x))$ para $\mu-$q.t.p. $x \in M$. Além disso se μ também for $f-$ergódica temos que de fato tal limite é exatamente $\int \varphi d\mu$. Vemos então que probabilidades invariantes nos dão informação sobre a dinâmica estudada as custas de tal informação a princípio só puder ser obtida para um conjunto de pontos relevantes para a probabilidade. Note que a medida de Dirac suportada em um ponto fixo de f é uma probabilidade invariante e ergódica para f porém só da informação sobre um ponto, sendo assim é importante encontrar probabilidades invariantes que enxerguem alguma informação "relevante" acerca da dinâmica.

Consideremos $f : M \to M$ uma aplicacão contínua sobre um espaço métrico compacto. Para cada probabilidade $f-$invariante μ associamos a chamada *entropia métrica* $h_\mu(f)$ de μ que, pelo Teorema de Brin-Katok, é a taxa exponencial assintótica de decrescimento da medida de bolas dinâmicas de f. O princípio variacional para entropia nos diz que $\sup\{h_\mu(f);\quad \mu \quad \text{é uma probabilidade} \quad f-\text{invariante}\}$ é a *entropia topológica* $h_{top}(f)$ de f, um invariante para qualquer sistema topologicamente conjugado a f. Quando adicionamos ao nosso problema um potencial contínuo $\phi : M \to \mathbb{R}$, que faz o papel de dar pesos a diferentes regiões do espaço M, temos um princípio variacional análogo para a *pressão topológica* de f, que é igual ao supremo das pressões métricas de medidas $f-$invariantes com respeito a ϕ:

$$P_{top}(f,\phi) = \sup\{h_\mu(f) + \int \phi d\mu; \quad \mu \quad \text{é uma probabilidade} \quad f - \text{invariante }\}.$$

Quando uma probabilidade $f-$invariante atinge o supremo acima, então dizemos que ela é um *estado de equilíbrio* para f com respeito a ϕ e, no caso particular de ϕ ser identicamente nulo, dizemos que ela é uma *medida de máxima entropia* para f. Os estados de equilíbrio, quando existem, são probabilidades invariantes importantes, pois carregam consigo informações topológicas e combinatórias do sistema dinâmico. Em Teoria Ergódica, o Formalismo Termodinâmico se ocupa da obtenção de estados de equilíbrio, e do estudo de suas *propriedades estatísticas* (decaimento exponencial de correlações, Teorema Central do Limite, Grandes Desvios) e de *regularidade* (estabilidade estatística, diferenciabilidade das medidas de estado de equilíbrio, e das taxas de decaimento de correlações e de Grandes Desvios com respeito ao potencial e à dinâmica).

Quando temos uma classe $\mathcal{F}$ de dinâmicas e potenciais em que sabemos que para $(f,\phi) \in \mathcal{F}$ temos a existência e unicidade do estado de equilíbrio $\mu_{f,\phi}$ uma pergunta natural é sobre a regularidade de $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \to \mu_{f,\phi}$ ou de $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \to P_{top}(f,\phi)$. Quando mostramos que tais funções são contínuas obtemos um resultado do tipo estabilidade estatística, o próximo passo natural é perguntar sobre resultados de maior regularidade. Quando mostramos que as funções são suaves e obtemos fórmulas para as derivadas obtemos um resultado do tipo *linear response formula* (fórmula de resposta linear).

As fórmulas de resposta linear foram obtidas principalmente para difeomorfismos e fluxos hiperbólicos em [KKPW89], [Rue97] e [GL06], para medidas SRB de alguns difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em [Dol04] e para aplicações expansoras unidimensionais e quadráticas em [Rue05], [BaS08], [BS09] e [BS12]. Mesmo no caso de expansoras e para qualquer estado de equilíbrio, ainda há muito o que se desenvolver.

Em [BCV16] foram obtidos linear response fórmula, continuidade e diferenciação de várias quantidades termodinâmicas e teoremas do limite central para uma classe robusta de aplicações não uniformemente expansoras. No contexto específico de dinâmicas expansoras e potenciais Holder, sabe-se que existe um único estado de equilíbrio (veja por exemplo [PU10]). O resultado de linear response formula em [BCV16] foi obtido para qualquer dinâmica expansora suave, mas esses reultados só lidam com potenciais suaves próximos a uma função constante.

Neste trabalho, com base em [BC17], nosso objetivo principal é provar os resultados de linear response para qualquer estado de equilíbrio associado a uma dinâmica expansora suave f e qualquer potencial suave ϕ. Isto é, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Se $r \geq 2$ então as seguintes aplicações variam analiticamente com relação ao potencial ϕ e C^{r-1} com relação à dinâmica f:*
i. $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto P_{top}(f, \phi)$;
ii. $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto \nu_{f,\phi} \in (C^1)^*$;
iii. $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto h_{f,\phi}(f) \in C^{r-1}$;
iv. $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto \mu_{f,\phi} \in (C^1)^*$.

Além disso, iremos obter fórmulas explícitas para algumas derivadas de primeira ordem. Nesta direção, estudaremos o espectro do operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi}$, pois se queremos encontrar um estado de equilíbrio para uma dinâmica $f : M \to M$ e um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$, temos que procurar uma probabilidade da forma $\mu_{f,\phi} = h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$, onde $h_{f,\phi}$ é uma função positiva tal que $h_{f,\phi} \in Ker(\mathcal{L}_{f,\phi} - \lambda_{f,\phi}I)$ e $\nu_{f,\phi}$ é uma probabilidade tal que $\nu \in Ker(\mathcal{L}^*_{f,\phi} - \lambda_{f,\phi}I)$, onde $\lambda_{f,\phi}$ é o raio espectral do operador $\mathcal{L}_{f,\phi}$ e de $\mathcal{L}^*_{f,\phi}$. Veremos também que $\lambda_{f,\phi} = e^{P_{Top}(f,\phi)}$. Mostraremos que tal operador de transferência tem a propriedade de gap espectral, ou seja, provaremos que o espectro do operador de transferência $spec(\mathcal{L}_{f,\phi}|_{C^r})$ pode ser decomposto em dois subconjuntos compactos, onde um deles é $\{e^{P_{Top}(f,\phi)}\}$ e o outro compacto Σ_0 está contido na bola centrada no zero e de raio estritamente menor que o raio espectral. Para isso, utilizaremos a técnica de cones e métricas projetivas introduzida originalmente em [Bir57]. Definiremos cones que são estritamente invariantes pelo operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi}$ que foram originalmente introduzidos em [Bom14].

Além disso, obteremos uniformidade no gap espectral para dinâmicas e potenciais próximos. No entanto, pelo exemplo descrito originalmente em [CV13], o operador de transferência em geral não varia continuamente com respeito à dinâmica e, portanto, não podemos utilizar a teoria espectral perturbativa clássica. Mas, veremos que a uniformidade do gap espectral nos permitirá utilizar uma teoria perturbativa desenvolvida em [GL06] para concluir nosso resultado de linear response.

Como consequência do resultado de linear response, obteremos resultados de estabilidades de leis estatíscas, ou seja, provaremos regularidade da correlação em relação à dinâmica expansora e, além disso, que a derivada da correlação vai a zero quando n cresce. Obteremos também resultados do teorema central do limite, provaremos que a média e a variância do teorema central do limite variam C^{r-1} em relação à dinâmica,expansora suave ao potencial suave. .

Organizamos este trabalho em 3 capítulos. No primeiro capítulo abordamos elementos da teoria ergódica, a teoria de cones e métricas projetivas, elementos da teoria espectral, funções analíticas e o espaço de aplicações C^r. Estes elementos serão importantes para o desenvolvimento dos nossos resultados. O segundo capítulo é destinado às transformações expansoras, definimos e exemplificamos as transformações expansoras topológicas e expansoras suaves e mostramos que toda dinâmica expansora suave é expansora no sentido da definição topológica. Por fim, o capítulo 3 é destinado aos nossos resultados principais que já foram apresentados anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo abordaremos alguns resultados e elementos da teoria ergódica, bem como uma breve introdução da teoria espectral e funções analíticas. Tais resultados e definições irão auxilar em nossos resultados principais. Vale ressaltar que não faremos a demonstração de todos os resultados enunciados neste capítulo, pois fogem do objetivo do nosso trabalho.

1.1 Teoria Ergódica

Os resultados e definições utilizados nesta seção podem ser encontrados em [Vi97].

1.1.1 Medidas invariantes e o Teorema ergódico de Birkhoff

Definição 1.1. *Dado um subconjunto $A \subset M$. Uma álgebra de M é uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de M tal que:*

- $\emptyset \in \mathcal{B}$*;*
- $A \in \mathcal{B}$ *implica* $A^c \in \mathcal{B}$*;*
- $A \in \mathcal{B}$ *e* $B \in \mathcal{B}$ *implica* $A \cup B \in \mathcal{B}$*.*

Segue então da definição que dados $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ e $A \setminus B = A \cap B^c$ também estão em $\mathcal{B}$. Além disso, a união e a interseção de qualquer número finito de elementos de $\mathcal{B}$ também estão em $\mathcal{B}$, por associatividade.

Definição 1.2. *Uma álgebra diz-se uma σ-álgebra de subconjuntos de M se também for fechada para as uniões enumeráveis, ou seja,*

$$A_j \in \mathcal{B} \quad para \quad j = 1, \cdots, n, \cdots \quad implica \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}.$$

Observe também que uma *σ-álgebra* $\mathcal{B}$ também é fechada para as interseções enumeráveis, pois se $A_j \in \mathcal{B}$ para $j = 1, \cdots, n, \cdots$ então $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c)^c$ também está em $\mathcal{B}$.

Definição 1.3. *Um espaço mensurável é uma dupla $(M, \mathcal{B})$ onde M é um conjunto e $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de M.*

Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados *conjuntos mensuráveis* do espaço.

Definição 1.4. *Seja $(M, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma medida em $(M, \mathcal{B})$ é uma função $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e*

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

para quaisquer coleção de $A_j \in \mathcal{B}$ disjuntos dois-a-dois.

A tripla $(M, \mathcal{B}, \mu)$ é chamada *espaço de medida.* Quando vale $\mu(M) < \infty$ dizemos que μ é uma medida finita e se $\mu(M) = 1$ dizemos que μ é uma *probabilidade.* Neste último caso, $(M, \mathcal{B}, \mu)$ é um *espaço de probabilidade.*

Definição 1.5. *Dados espaços mensuráveis $(M, \mathcal{B})$ e $(Y, \mathcal{C})$, dizemos que aplicação $f : M \to Y$ é mensurável se $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ para todo $C \in \mathcal{C}$.*

A definição acima nos diz que aplicações mensuráveis preservam conjuntos mensuráveis.

Definição 1.6. *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é invariante por f se*

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \quad \text{para todo conjunto mensurável} \quad E \subset M$$

.

Em outras palavras, a definição de medida invariante nos diz que f preserva a medida de um conjunto.

Definição 1.7. *Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante por f. μ é dita ergódica para f se dado $A \subset M$ mensurável tal que $f^{-1}(A) = A$ temos que $\mu(A) = 1$ ou $\mu(A) = 0$.*

A definição acima nos diz que medidas ergódicas são aquelas que dão peso total ou nulo a todo subconjunto mensurável de M invariante por f.

A seguir, enunciaremos o teorema ergódico de Birkhoff. Este teorema é o ponto de partida para os principais resultados a serem demonstrados no capítulo 3 e nos garante a existência da média temporal, isto é, uma média do tempo em que quase todo ponto retorna ao conjunto.

Teorema 1.1. *Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante por f. Dada qualquer função integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$, o limite*

$$\overline{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

existe em μ-quase todo ponto $x \in M$. Além disso, a função $\overline{\varphi}$ definida desta forma é integrável e satisfaz

$$\int \overline{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

Se além disso, μ é f-ergódica, então $\overline{\varphi}(x) = \int \varphi(x) d\mu(x)$ em μ-quase todo ponto $x \in M$.

Através deste teorema podemos ver que probabilidades invariantes nos dão informações sobre a dinâmica estudada, porém nem toda informação é relevante. Podemos notar que uma medida dirac suportada em um ponto fixo de f é uma probabilidade invariante mas nos dá informação sobre um ponto do conjunto. Dessa forma, buscamos encontrar medidas que enxerguem informações importantes com relação à dinâmica. Nesta direção, daremos as noções de entropia e pressão na seção seguinte.

1.1.2 Entropia e Pressão

Nesta seção, introduziremos o conceito de entropia que é uma medida do grau de desordem do sistema. Inicialmente seguiremos a definição de entropia métrica dada por Kolgomorov através de partições e em seguida, veremos uma segunda versão da ideia de entropia através do teorema de Brin-Katok. Por fim, faremos a relação de entropia e pressão por meio do princípio variacional.

Definição 1.8. *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ uma família finita ou enumerável tal que $P_i \subset M$ é mensurável para todo i. Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma partição de M se:*
i) $P_i \in \mathcal{P}$ são disjuntos dois-a-dois
ii) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i) = \mu(M)$

Diante disso, podemos definir a entropia de uma partição como se segue

Definição 1.9. *Dada uma partição $\mathcal{P}$ de M, dizemos que a entropia da partição $\mathcal{P}$ com respeito à probabilidade μ é o número,*

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{P\in\mathcal{P}} -\mu(P) \log \mu(P)$$

onde convecionamos que $0 \log 0 = \lim_{x\to 0} x \log x = 0$.

Note que a definição acima depende da partição. Dessa forma, para obtermos melhor informação do sistema, é natural que refinemos a partição. Com isso, dadas duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ dizemos que $\mathcal{P}$ é *menos fina* que $\mathcal{Q}$, e escrevemos $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$, se todo elemento de $\mathcal{Q}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{P}$, a menos de medida nula. A soma $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ de duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ é dada da seguinte maneira:

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} := \{P \cap Q; P \in \mathcal{P} \quad \text{e} \quad Q \in \mathcal{Q}\}$$

Esta partição é a menos fina de todas as partições que refinam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

Estamos interessados em definir entropia com respeito a uma dinâmica. Sendo assim, dada $f : M \to M$ uma transformação mensurável preservando uma medida de probabilidade μ, daremos uma noção de entropia do sistema (f, μ).

Dada uma partição $\mathcal{P}$ de M com entropia finita, denotamos

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-1}(\mathcal{P}) \quad \text{para cada} \quad n \geq 1$$

Daí, definimos a entropia de f com respeito à medida μ e à partição $\mathcal{P}$ como o limite

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n)$$

A definição acima faz sentido uma vez que a sequência das entropias $H_\mu(\mathcal{P}^n)$ é subaditiva, ou seja,

$$H_\mu(\mathcal{P}^{n+m}) \leq H_\mu(\mathcal{P}^n) + H_\mu(\mathcal{P}^m),$$

existindo portanto tal limite. A partir daí, podemos definir a entropia do sistema (f, μ).

Definição 1.10. *(entropia) A entropia de $f : M \to M$ com respeito à probabilidade μ invariante por f é dada por*

$$h_\mu(f) := \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas de M.

Agora apresentaremos a noção do conceito de entropia através do teorema de Brin-Katok que nos diz que a entropia métrica $h_\mu(f)$ é a média da taxa exponencial de decrescimento da medida de bolas dinâmicas de f.

Definição 1.11. *(bolas dinâmicas) Suponhamos que $f : M \to M$ é uma aplicação contínua num espaço métrico compacto. Dado $x \in M, n \geq 1$ e $\varepsilon > 0$, chamamos bola dinâmica de comprimento n e raio ε em torno de x ao conjunto:*

$$B(x, n, \varepsilon) = \{y \in M; d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon \quad \textit{para todo} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1\},$$

Defina também:

$$h^+_\mu(f,\varepsilon,x) = \lim_{n\to\infty}\sup -\frac{1}{n}\log\mu(B(x,n,\varepsilon))$$

e

$$h^-_\mu(f,\varepsilon,x) = \lim_{n\to\infty}\inf -\frac{1}{n}\log\mu(B(x,n,\varepsilon))$$

Teorema 1.2. *(Brin-Katok) Seja μ uma medida invariante por f. Os limites*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h^+_\mu(f,\varepsilon,x) \quad e \quad \lim_{\varepsilon\to 0} h^-_\mu(f,\varepsilon,x)$$

existem e são iguais para μ-quase todo ponto. Denotando por $h_\mu(f,x)$ o seu valor comum, a função $h_\mu(f,.)$ é integrável e tem-se

$$h_\mu(f) = \int h_\mu(f,x)d\mu(x)$$

Demonstração. Ver [BK83].

□

Agora, definiremos a entropia topológica devido a Adler-Konheim-McAndrew em [AKM65] que não envolve medidas invariantes. Esta definição é dada via coberturas abertas. Definamos então tais coberturas.

Definição 1.12. *Seja M espaço topológico compacto. Chamamos cobertura aberta de M qualquer família $\alpha \in I$ de abertos tal que*

$$\bigcup_{\alpha\in I}\alpha = M$$

Como M é compacto, segue que toda cobertura aberta admite uma subcobertura com um número finito de elementos. Dessa forma, chamamos *entropia* da cobertura α ao número

$$H(\alpha) = \log N(\alpha),$$

onde $N(\alpha)$ é o menor número tal que α admite alguma subcobertura finita com esse número de elementos.

Dadas duas coberturas abertas α e β, dizemos que α é menos fina que β e escrevemos $\alpha \preceq \beta$, se todo elemento de β está contido em algum elemento de α. Dessa forma, se $\alpha \preceq \beta$ então $H(\alpha) \leq H(\beta)$, pois como todo elemento de β está contido em algum elemento de α, segue que $N(\alpha) \leq N(\beta)$.

Dadas coberturas $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, denotamos por $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$ a sua soma, ou seja, a cobertura cujos elementos são as interseções $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ com $A_j \in \alpha_j$ para cada j. Note que $\alpha_j \preceq \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$ para todo j.

Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua. Se α é uma cobertura aberta de M então $f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(A); \quad A \in \alpha\}$ também é uma cobertura aberta. Para cada $n \geq 1$, denotamos

$$\alpha^n = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha).$$

Agora, note que dadas α e β duas coberturas abertas. Se $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_r\}$ é uma subcobertura aberta finita de α e $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_s\}$ é subcobertura aberta finita de β, então $\mathcal{U} = \{A_n \cap B_m; \quad 1 \leq n \leq r \quad \text{e} \quad 1 \leq m \leq s\}$ é subcobertura aberta finita de $\alpha \vee \beta$ com no máximo nm elementos. Sendo assim, $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta)$. Daí, temos então que $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$. Logo,

$$\begin{aligned}
H(\alpha^{m+n}) &= H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(m-1)} \vee f^{-m} \vee f^{-(m+1)} \vee \cdots \vee f^{-(m+n-1)}) \\
&= H(\alpha^m \vee f^{-m}(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)})) \\
&= H(\alpha^m \vee f^{-m}(\alpha^n)) \leq H(\alpha^m) + H(f^{-m}(\alpha^n)) \leq H(\alpha^m) + H(\alpha^n)
\end{aligned}$$

para todo $m, n \geq 1$, pois $N(f^{-m}(\alpha^n)) \leq N(\alpha^n)$. Isto quer dizer que a sequência $H(\alpha^n)$ é subaditiva. Sendo assim,

$$h_{top}(f, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} H(\alpha^n) = \inf_n \frac{1}{n} H(\alpha^n).$$

$h_{top}(f, \alpha)$ sempre existe e é dito *entropia de f* com respeito à cobertura α. Além disso, se $\alpha \preceq \beta$ temos então que

$$h_{top}(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$$

Assim, definimos a *entropia topológica* de f como se segue.

Definição 1.13. *Sejam $f : M \to M$ uma transformação contínua, M compacto. A entropia topológica de f é dada pelo número*

$$h_{top}(f) = \sup\{h(f, \alpha); \quad \alpha \quad \textit{é cobertura aberta de} \quad M\}.$$

Observações

1) Se β é subcobertura de α então $h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$. Logo, a definição acima não muda se restringirmos o supremo às coberturas abertas finitas.

2) $h_{top}(f)$ é um número não negativo que pode ser infinito.

Veremos a seguir que a entropia topológica é um invariante topológico. Para isso, definamos conjugação topológica.

Definição 1.14. *Sejam $f : M \to M$, $g : N \to N$ transformações contínuas em espaços topológicos compactos. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas se existir um homeomorfismo $h : M \to N$ tal que*

$$h \circ f = g \circ h$$

h é dita conjugação topológica entre f e g.

O próximo resultado nos dá a invariância topológica da entropia topológica.

Proposição 1.1. *Se f e g são topologicamente conjugadas, então $h_{top}(f) = h_{top}(g)$.*

A prova da proposição acima pode ser encontrada em [VO14]. Podemos obter uma relação entre a entropia topológica e a entropia métrica dada pelo princípio variacional para entropias enunciado a seguir.

Teorema 1.3. *(Princípio Variacional). Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto então*

$$h_{top}(f) = sup\{h_\nu(f); \quad \nu \quad \textit{é probabilidade invariante}\}$$

Se o supremo acima é atingido, ou seja, se existir μ tal que $h_{top}(f) = h_\mu(f)$ dizemos que μ é medida de máxima entropia.

Uma generalização da entropia topológica é dada pela pressão topológica. Sejam $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto e $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial contínuo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $\phi_n : M \to \mathbb{R}$ por

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ f^i.$$

Dado qualquer conjunto não vazio $C \subset M$, denotamos

$$\phi_n(C) = \sup\{\phi_n(x); \quad x \in C\}.$$

Dada uma cobertura aberta α de M definimos também

$$P_n(f, \phi, \alpha) = \inf\{\sum_{U \in \gamma} e^{\phi_n(U)}; \quad \gamma \quad \text{é subcobertura finita de} \quad \alpha^n\}.$$

Seja $P(f, \phi, \alpha) = \liminf_n \frac{1}{n} \log P_n(f, \phi, \alpha)$

Note que $\alpha \mapsto P(f, \phi, \alpha)$ é monótona decrescente. Assim, existe o limite

$$P(f, \phi) = \lim_{\alpha \to 0} P(f, \phi, \alpha)$$

$P(f, \phi)$ é dito *pressão topológica* de f com respeito a ϕ e será denotado por $P_{Top}(f, \phi)$. A seguir, enunciaremos o princípio variacional para a pressão topológica que é uma generalização do princípio variacional para entropias.

Teorema 1.4. *Sejam $f : M \to M$ transformação contínua e $\mathcal{M}_1(f)$ o conjunto de probabilidades f-invariantes. Para todo potencial contínuo $\phi : M \to \mathbb{R}$ temos que*

$$P_{Top}(f, \phi) = \sup\{h_\nu(f) + \int \phi d\nu; \quad \nu \in \mathcal{M}_1(f)\}.$$

1.1.3 Operador de Ruelle-Perron-Frobenius

Faremos nesta seção uma abordagem do Operador de Ruelle-Perron-Frobenius, também conhecido como operador de transferência. Veremos algumas de suas propriedades, bem como sua relação com o operador de Koopman. Definamos inicialmente, $C^0(M, \mathbb{C}) := \{f : M \to \mathbb{C} \ ; \quad f \quad \text{é contínua}\}$.

Definição 1.15. *Dada $f : M \to M$ um homeomorfismo local em um espaço topológico compacto e $\phi : M \to \mathbb{R}$ contínua. O operador de transferência associado a f e ϕ é o operador $\mathcal{L}_{f,\phi} : C^0(M, \mathbb{C}) \to C^0(M, \mathbb{C})$ dado por*

$$\mathcal{L}_{f,\phi}(g)(x) := \sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\phi(y)} g(y).$$

Claramente $\mathcal{L}_{f,\phi}$ é um operador linear. Além disso, segue da definição que $\mathcal{L}_{f,\phi}$ é um operador positivo, pois se $g(y) \geq 0$ para todo $y \in M$ então $\mathcal{L}_{f,\phi}(g)(x) \geq 0$ para todo $x \in M$. Também é fácil verificar que $\mathcal{L}_{f,\phi}$ é um operador contínuo. De fato,

$$||\mathcal{L}_{f,\phi} g(x)|| = \sup_x |\mathcal{L}_{f,\phi} g| = \sup |\sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\phi(y)} g(y)| \leq \max_{x \in M} \# f^{-1}(x) e^{\sup \phi} \sup |g|$$

$$\Rightarrow ||\mathcal{L}_{f,\phi} g|| \leq \max_{x \in M} \# f^{-1}(x) e^{\sup \phi} ||g||$$

Isto implica que $\mathcal{L}_{f,\phi}$ é um operador limitado e portanto, contínuo.

De acordo com o teorema de Riez-Markov, o dual do espaço $C^0(M, \mathbb{R})$ se identifica com o espaço vetorial das medidas borelianas complexas $\mathcal{M}(M)$. Então, o dual do operador de transferência é o operador linear $\mathcal{L}^*_{f,\phi} : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(M)$ dado por

$$\int g d(\mathcal{L}^*_{f,\phi} \eta) = \int \mathcal{L}_{f,\phi}(g) d\eta \quad \text{para todo} \quad g \in C^0(M, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \eta \in \mathcal{M}(M)$$

Este operador linear é positivo, no sentido de que se η é uma medida positiva então $\mathcal{L}^*_{f,\phi}\eta$ também é uma medida positiva. Veremos mais adiante que em certos casos $\mathcal{L}_{f,\phi}$ e $\mathcal{L}^*_{f,\phi}$ admitem autofunção e automedida positiva, respectivamente, associados a um autovalor positivo λ. Em nosso contexto, λ será o raio espectral destes operadores.

Temos também que se $f : M \to M$ é um difeomorfismo C^r e $\phi : M \to \mathbb{R}$ é um potencial C^r, então dada $g \in C^r(M, \mathbb{C})$, $\mathcal{L}_{f,\phi}(g) \in C^r(M, \mathbb{C})$ e além disso, $\mathcal{L}_{f,\phi} : C^r \to C^r$ é um operador contínuo.

1.2 Teoria de cones e métricas projetivas

Abordaremos nesta seção a teoria de cones e métricas projetivas que será fundamental mais adiante para mostrarmos a propriedade de gap espectral do operador de transferência.

Definição 1.16. *Seja E espaço vetorial, $\emptyset \neq C \subset E \setminus \{0\}$ é dito um cone convexo se para todo $v_1, v_2 \in C$ e $t > 0$, temos que*

$$tv_1 + v_2 \in C$$

Ademais, se exigirmos $C \cap (-C) = \{0\}$, podemos induzir uma ordem sobre E que preserva a sua estrutura de espaço vetorial, dada por

$$u \preceq v \iff v - u \in C \setminus \{0\}$$

$\preceq$ será uma ordem parcial sobre E com as seguintes propriedades:

Dados $u, v, w \in E$ e $\lambda \geq 0$

- $u \preceq v \Rightarrow u + w \preceq v + w$;
- $u \preceq v \Rightarrow \lambda u \preceq \lambda v$.

Mesmo na ausência de uma topologia, vamos definir o fecho do cone C, denotado por $\overline{C}$, dado por:

$$w \in \overline{C} \iff \quad \text{existem} \quad v \in C \quad \text{e} \quad t_n \searrow 0 \quad \text{tais que} \quad w + t_n v \in C, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Trabalharemos a partir de agora com cones que $\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\}$, para evitar cones degenerados como semiplanos. A este cone denominaremos *cone projetivo*. Esta propriedade, nos permitirá definir uma pseudo-métrica sobre os elementos do cone. Dados $v_1, v_2 \in C$, definamos

- $\alpha(v, w) := \sup\{t > 0; \quad w - tv \in C\}$

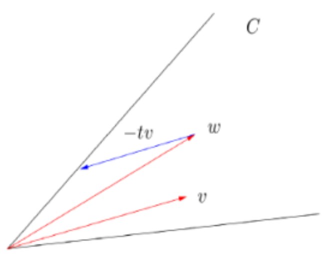

Figura 1.1: Métrica projetiva- Função α

- $\beta(v, w) := \inf\{t > 0; \quad tv - w \in C\}$

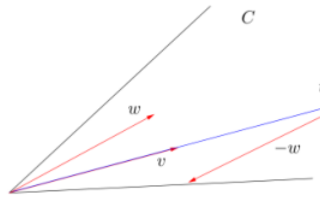

Figura 1.2: Métrica projetiva- Função β

Convencionaremos $\sup \emptyset = 0$ e $\inf \emptyset = +\infty$. Dados $v_1, v_2 \in C$, α, β tem as seguintes propriedades:

(i) $\alpha(v_1, v_2) \leq \beta(v_1, v_2)$;

(ii) $\alpha(v_1, v_2) < +\infty$;

(iii) $\beta(v_1, v_2) > 0$.

De fato, sejam $\alpha(v_1, v_2) = t$ e $\beta(v_1, v_2) = s$. Isto implica que $v_2 - tv_1 \in C$ e $sv_1 - v_2 \in C$. Da definição de cone, segue que $(s-t)v_1 \in C$. Logo, $(s-t) \geq 0$, pois, caso contrário $-v_1 \in C$, contradizendo o fato que $\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\}$. Logo, $s \geq t$, o que conclui *(i)*. A prova dos outros itens pode ser encontrada em ([Vi97], p.17).

Fazendo uso de α e β, definiremos a pseudo métrica (também conhecida como métrica de Hilbert) como se segue:

Definição 1.17. *Seja C cone convexo, dados $v_1, v_2 \in C$. $\theta : C \times C \to [0, +\infty]$ é dada por*

$$\theta(v_1, v_2) = \log \frac{\beta(v_1, v_2)}{\alpha(v_1, v_2)}.$$

Por convenção, $\theta(u, v) = +\infty$ se $\alpha(u, v) = 0$ ou $\beta(u, v) = +\infty$.

Se definirmos a seguinte relação de equivalência $\sim$, onde dados $u, v \in C$,

$$u \sim v \iff \exists \quad t > 0 \quad \text{tal que} \quad u = tv$$

Então, a seguinte proposição nos diz que θ é uma métrica do espaço quociente $C/\sim$

Proposição 1.2. *$\theta(\cdot, \cdot)$ é uma métrica no espaço quociente $C/\sim$, isto é, dados $u, v, w \in C$: a) $\theta(u, v) = \theta(v, u)$;*

b) $\theta(u, w) \leq \theta(u, v) + \theta(v, w)$;

c) $\theta(u, v) = 0$, se e somente se, existe $t > 0$ tal que $u = tv$

Demonstração. Ver [Vi97].

□

θ é chamada de métrica projetiva associada ao cone convexo C. A seguir, daremos um exemplo de cone convexo.

Exemplo 1.2.1. *Seja M espaço métrico compacto. Considere $C_+ = \{\varphi \in C^0(M, \mathbb{R});\ \varphi(x) > 0 \quad \forall \quad x \in M\}$ o conjunto das funções contínuas estritamente positivas. C_+ é cone convexo.*

De fato, $C_+ \neq \emptyset$, pois dada $\varphi \equiv c$, $c > 0$, segue que $\varphi \in C_+$. E dadas $\varphi, \psi \in C_+$ e $t > 0$, segue que $\varphi + t\psi > 0$. Logo, $\varphi + t\psi \in C_+$. Ademais, $-C_+ = C_- = \{\varphi \in C^0(M, \mathbb{R});\quad \varphi(x) < 0 \quad \forall \quad x \in M\}$. Com isso, se $g \in \overline{C_+} \cap \overline{C_-}$, segue que existem $l \in C_+$ e $t_n \to 0$ tais que

$$g + lt_n \in C_+ \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow g + lt_n > 0 \Rightarrow g \geq 0$$

e existem $u \in C_-$ e $s_n \to 0$ tais que

$$g + us_n \in C_- \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow g + us_n < 0 \Rightarrow g \leq 0$$

Logo, $g = 0$. Daí, $\overline{C}_+ \cap (\overline{-C_+}) = \{0\}$.

Além disso, dadas $\varphi, \psi \in C_+$,

$$\begin{aligned}
\alpha(\varphi, \psi) &= \sup\{t > 0; \quad (\psi - t\varphi)(x) > 0 \quad \forall \quad x \in M\} \\
&= \sup\{t > 0; \quad \psi(x) > t\varphi(x) \quad \forall \quad x \in M\} \\
&= \inf_{x \in M} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}
\end{aligned}$$

De forma análoga, $\beta(\varphi, \psi) = \sup\limits_{x \in M} \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$. Logo, $\theta_+(\varphi, \psi) = \log \dfrac{\sup\limits_{x \in M}(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)})}{\inf\limits_{x \in M}(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)})}$.

Em ([Vi97], p.24) é provado que dada uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_+$ que é Cauchy na métrica θ_+, então $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é θ_+ convergente em C_+. Isto torna o cone C_+ com a métrica θ_+, completo.

Note também que a métrica projetiva depende de forma monótona do cone. De fato, sejam C_1 e C_2 cones convexos em E tais que $C_1 \subset C_2$. Denote por $\theta_1 = \log \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ e $\theta_2 = \log \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ as métricas projetivas de C_1 e C_2, respectivamente. Observe que como $C_1 \subset C_2$, então $\{t > 0; \quad v_2 - tv_1 \in C_1\} \subset \{t > 0; \quad v_2 - tv_1 \in C_2\}$ e $\{s > 0; \quad sv_1 - v_2 \in C_1\} \subset \{s > 0; \quad sv_1 - v_2 \in C_2\}$. Daí, $\alpha_1(v_1, v_2) \leq \alpha_2(v_1, v_2)$ e $\beta_1(v_1, v_2) \geq \beta_2(v_1, v_2)$. Logo, $\theta_1(v_1, v_2) \geq \theta_2(v_1, v_2)$.

De maneira mais geral, sejam E_1, E_2 espaços vetoriais, $C_1 \subset E_1$, $C_2 \subset E_2$ cones convexos e $L : E_1 \to E_2$ um operador linear tal que $L(C_1) \subset C_2$, então dados $u, v \in C_1$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(u,v) &= \sup\{t>0; \quad v-tu \in C_1\} \\
&\leq \sup\{t>0; \quad L(v-tu) \in C_2\}, \quad \text{pois} \quad L(C_1)\subset C_2 \\
&= \sup\{t>0; \quad L(v)-tL(u) \in C_2\} \\
&= \alpha_2(L(u),L(v))
\end{aligned}$$

De forma análoga, verifica-se que $\beta_1(u,v) \geq \beta_(L(u),L(v))$. Logo,

$$\theta_2(L(u),L(v)) \leq \theta_1(u,v)$$

A desigualdade acima nos diz que o operador L restrito ao cone C_1 é lipschitz, não necessariamente uma contração. Mas, se além disso supusermos que $L(C_1)$ tem diâmetro finito em relação à métrica projetiva θ_2, o próximo teorema nos garante que o operador $L|_{C_1}$ é uma contração.

Teorema 1.5. *Dados C_1, C_2 cones convexos de E_1, E_2, respectivamente e $L : E_1 \to E_2$ um operador linear. Seja $D = \sup\{\theta_2(L(u),L(v)); \quad u,v \in C_1\}$. Se $D < +\infty$, então*

$$\theta_2(L(u),L(v)) \leq (1-e^{-D})\theta_1(u,v) \quad \forall \quad u,v \in C_1.$$

Este resultado é atribuído a Birkhoff e sua prova pode ser encontrada em [Vi97]. Além da contração do operador $L|_{C_1}$, o teorema acima nos dá explicitamente sua constante de Lipschitz que é diretamente proporcional ao diâmetro e à medida que ele diminui, a constante de lipschitz converge exponencialmente a zero.

Agora, vamos discutir a relação entre a métrica projetiva e a métrica pré-existente num espaço vetorial topológico metrizável. Em geral, depende do cone a que se está perguntando. Mas, sob algumas hipóteses, obtemos um resultado que nos garante uma relação. A prova desse resultado pode ser encontrada em [AM06]:

Proposição 1.3. *Seja E um espaço normado, $C \subset E$ cone projetivo, $||\cdot||_i$ semi-normas sobre E, $i = 1,2$ e $\preceq$ uma ordem parcial que preserva sua estrutura de espaço vetorial e suponha que para todo $u,v \in C$*

$$-v \preceq u \preceq v \Rightarrow ||u||_i \leq ||v||_i, \quad i = 1,2$$

Então, dadas $f,g \in C$ com $||f||_1 = ||g||_1$ temos

$$||f-g||_2 \leq (e^{\theta(f,g)}-1)||f||_2.$$

Segue diretamente da proposição anterior o seguinte resultado de convergência.

Corolário 1.5.1. *Sob as mesmas hipóteses da proposição anterior. Se* $w_n \xrightarrow{\theta} w$ *e* $||w_n||_1 = ||w||_1$ *então* $w_n \xrightarrow{||\cdot||_2} w$.

Demonstração. De fato, como $||w_n||_1 = ||w||_1$, pela proposição anterior, temos que

$$||w_n - w||_2 \leq (e^{\theta(w_n,w)} - 1)||w||_2$$

Como por hipótese, $w_n \xrightarrow{\theta} w$, temos que $\theta(w_n, w) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Assim, segue da desigualdade acima que $w_n \xrightarrow{||\cdot||_2} w$.

□

Os resultados aqui apresentados serão fundamentais para a prova dos nossos resultados no capítulo 3. Estaremos interessados em construir um cone invariante pelo operador de Ruelle-Perron-Frobenius que possua diâmetro finito e uma certa propriedade de completude. Daí iremos obter resultados sobre o espectro do operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi}$, a saber, veremos que $\mathcal{L}_{f,\phi}$ possui a pripriedade de gap espectral.

1.3 Funções analíticas

Já sabemos da análise complexa o conceito de analiticidade para funções que tomam valores em $\mathbb{C}$, então, a partir deste conceito, estamos interessados em definir as funções analíticas tomando valores em espaços de Banach. Veremos que alguns dos resultados válidos no conceito já conhecido, continuarão válidos em nosso contexto.

No decorrer desta seção, a menos de menção contrária, E e F também serão espaços de Banach onde o corpo dos escalares é $\mathbb{C}$.

Definição 1.18. *Sejam* $U \subset \mathbb{C}$ *aberto,* $f : U \to E$ *e* $z_0 \in U$. *Dizemos que* f *é holomorfa em* z_0 *se existe* $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. *Nesse caso,* $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ *é denotado por* $f'(z_0)$ *e chamado de derivada complexa de* f *em* z_0.

Note que a definição acima é uma generalização do conceito de holomorfia quando f toma valores em $\mathbb{C}$. Quando f toma valores em espaços de Banach, há uma outra noção de holomorfia que é dada na seguinte definição:

Definição 1.19. *Sejam* $U \subset \mathbb{C}$ *aberto,* $f : U \to E$ *e* $z_0 \in U$. *Dizemos que* f *é fracamente holomorfa se para todo* $l \in E^*$, *temos que* $l \circ f : U \to \mathbb{C}$ *é holomorfa.*

Observe que toda função holomorfa é fracamente holomorfa. O próximo resultado, que pode ser encontrado em [Dun58], garante a equivalência e ainda nos diz que vale a fórmula integral de Cauchy.

Teorema 1.6. *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto, $f : U \to E$ fracamente holomorfa, $\Gamma \subset U$ uma curva fechada C^1 por partes e $\tilde{U} \subset U$ a componente conexa limitada determinada por Γ, então para todo $z \in \tilde{U}$ temos que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Em particular, f é holomorfa.

Como consequência deste resultado, obtemos a equivalência de holomorfia e analiticidade e obtemos também o teorema de Liouville.

Corolário 1.6.1. *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : U \to E$ holomorfa, então f é analítica. Em particular f é C^∞ e*

$$f^n(z_0) = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{|w - z_0| = r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

onde r é suficientemente pequeno tal que $B(z_0, r) \subset U$.

Corolário 1.6.2. *(Liouville). Se $f : \mathbb{C} \to E$ é holomorfa e limitada, então f é constante.*

Podemos também definir aplicações analíticas tomando valores em espaços de Banach. Sejam E, F espaços de Banach. Denote o espaço das transformações $i-$lineares contínuas e simétricas de E^i para F por $\mathcal{L}_s^i(E, F)$. E dado $P_i \in \mathcal{L}_s^i(E, F)$ e $h \in E$, denotaremos $P_i(h, \cdots, h)$ por $P_i(h)$. Definiremos então:

Definição 1.20. *Sejam E, F espaços de Banach e $U \subset E$ aberto. Dizemos que a aplicação $f : U \to F$ é analítica se para todo $x \in U$ existe $r > 0$ e para todo $i \geq 1$ existe $P_i \in \mathcal{L}_s^i(E, F)$ (dependendo de x) tais que*

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i(h)}{i!}$$

para todo $h \in B(0, r)$ e a convergência é uniforme.

Aplicações analíticas tomando valores em espaços de Banach tem propriedades similares a funções analíticas reais ou complexas. Se $f : U \to F$ é analítica então f é C^∞ e para todo $x \in U$, segue que $D^i f(x) = P_i$. Além disso, as operações de soma, produto, quociente e composição de funções analíticas são analíticas. Para mais detalhes sorbe holomorfia em espaços de Banach ver por exemplo [Cha85].

1.4 Teoria espectral

Nesta seção, faremos uma abordagem sucinta da teoria espectral com base nas definições e objetos que utilizaremos na prova dos nossos resultados. Uma das principais noções para o estudo e descrição de operadores lineares é o espectro. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [K95] e [Dun58].

Durante esta seção, E será sempre um espaço de Banach onde o corpo de escalares é $\mathbb{C}$ e $A : E \to E$ um operador linear contínuo.

Definição 1.21. *Dado $A : E \to E$ um operador linear contínuo, o resolvente de A é o conjunto*

$$res(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \;\; ; \quad (A - \lambda I) : E \to E \quad \textit{é bijetivo e tem inversa contínua}\}$$

Decorre do Teorema da Aplicação Aberta que se $(A - \lambda I) : E \to E$ é bijetivo, então sua inversa é contínua. O complementar de $res(A)$ é dito espectro de A e será denotado por $sp(A)$. Notemos que $sp(A) \neq \emptyset$ e compacto.

De fato, $sp(A)$ é limitado, pois se $|\lambda| > ||A||$, temos pelo teorema da perturbação da identidade que $(A - \lambda I) = \lambda(\frac{A}{\lambda} - I)$ é um isomorfismo. Assim, $\lambda \in res(A)$. Logo, se $\lambda \in sp(A)$ então $|\lambda| \leq ||A||$. Além disso, pelo teorema da perturbação do isomorfismo, segue que $res(A)$ é aberto. Logo, $sp(A)$ é fechado e limitado e portanto, compacto. A prova de que $sp(A) \neq \emptyset$ é um pouco mais trabalhosa e não será feita em nosso trabalho, mas segue de uma teoria de Cauchy-Goursat sobre funções holomorfas tomando valores em espaços de Banach. Com isso, podemos definir o raio espectral de A.

Definição 1.22. *Seja $A : E \to E$ um operador linear contínuo. Chamamos de raio espectral do operador A e denotamos por $r(A)$ ao número*

$$r(A) := \sup\{|\lambda| \in \mathbb{R}; \quad \lambda \in sp(A)\}$$

Observações: $r(A) \leq ||A||$. Além disso, temos que $r(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{||A^n||}$.

Defina o conjunto $Iso(E) := \{T \in \mathcal{L}(E, E); \quad T \quad \text{é inversível}\}$. Enunciaremos então um resultado útil sobre inversão de operadores lineares.

Proposição 1.4. *$Iso(E)$ é um aberto e $Iso(E) \ni T \mapsto T^{-1} \in \mathcal{L}(E, E)$ é analítica.*

Definamos também a aplicação resolvente. Para cada $\lambda \in res(A)$, defina o resolvente de A em λ por $R(A; \lambda) := (\lambda I - A)^{-1}$. Defina também

$$Res(E) := \{(A, \lambda) \in \mathcal{L}(E, E) \times \mathbb{C} \;\; ; \quad \lambda \in res(A)\}$$

Segue da proposição anterior que $Res(E)$ é aberto e que a aplicação $Res(E) \ni (A, \lambda) \mapsto R(A, \lambda) \in \mathcal{L}(E, E)$ é analítica.

Utilizando integração a Riemann em espaços de Banach, iremos definir a função de operador. Considere $\mathcal{F}(A)$ a coleção de todas as funções em $\mathbb{C}$ que são holomorfas em alguma vizinhança de $sp(A)$.

Definição 1.23. *(Função do operador). Sejam $f \in \mathcal{F}(A)$ e C o bordo de uma vizinhança de $sp(A)$ onde f é holomorfa, oriente C no sentido positivo. Definimos a função do operador A dada por f como*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) R(A, z) dz.$$

Pela invariância homotópica $f(A)$ não se altera se trocarmos C por outra curva homotópica no complementar do espectro de A.

Teorema 1.7. *(Cálculo Funcional). Dadas $f, g \in \mathcal{F}(A)$, $c \in \mathbb{C}$, valem*
1. $cf + g \in \mathcal{F}(A)$ e $(cf + g)(A) = cf(A) + g(A)$;
2. $fg \in \mathcal{F}(A)$ e $(fg)(A) = f(A)g(A)$;
3. Se f possui expansão em série de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolutamente convergente em uma vizinhança de $sp(A)$, então $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$.

Decorre do cálculo funcional que as funções de operador comutam entre si, além disso:

Teorema 1.8. *(Mapeamento espectral). Se $f \in \mathcal{F}(A)$ então $sp(f(A)) = f(sp(A))$. Em particular, se A for invertível então $sp(A^{-1}) = \{\lambda^{-1}; \quad \lambda \in sp(A)\}$.*

A seguir, definiremos componentes espectrais. E enunciaremos um resultado que nos permite decompor o espaço como soma direta de subespaços invariantes.

Definição 1.24. *(Componente espectral) Seja $X \subset sp(A)$. X é dito componente espectral de A se X é aberto e fechado em $sp(A)$.*

Observe que se X é componente espectral de A então $X^c := sp(A) \setminus X$ também é componente espectral de A. Temos também que como $sp(A)$ é compacto e X é fechado, então X também é compacto.

A partir das componentes espectrais do operador A, podemos definir a projeção espectral

Definição 1.25. *(Projeção espectral). Seja $X \subset sp(A)$ uma componente espectral. Considere $V = V_X \cup V_{X^c}$ uma vizinhança não conexa de $sp(A)$ onde $X \subset V_X$ e $X^c \subset V_{X^c}$. Seja $P_X : V \to \mathbb{C}$tal que*

$$P_X(z) = 1, \quad \forall \quad z \in V_X \quad e \quad P_X(z) = 0, \quad \forall \quad z \in V_{X^c}$$

A aplicação $\Pi_X := P_X(A) \in \mathcal{L}(E, E)$ é chamada de projeção espectral de X.

Teorema 1.9. *Seja $X \subset sp(A)$ componente espectral não-vazia. Então existem E_1, E_2 subespaços fechados de E invariantes por A tais que:*
(i) $E = E_1 \oplus E_2$
(ii) $sp(A|_{E_1}) = X$ *e* $sp(A|_{E_2}) = X^c$

A seguir, definiremos a propriedade de *gap espectral*.

Definição 1.26. *(Gap espectral). Seja $A : E \to E$ um operador linear contínuo. Dizemos que A possui a propriedade de gap espectral se existir uma decomposição de $sp(A) \subset \mathbb{C}$ dada por*

$$sp(A) = \{\lambda_1\} \cup \Sigma,$$

onde λ_1 é autovalor dominante de A com autoespaço associado unidimensional e existe $0 < \lambda_0 < \lambda_1$ tal que $\Sigma \subset B(0, \lambda_0)$.

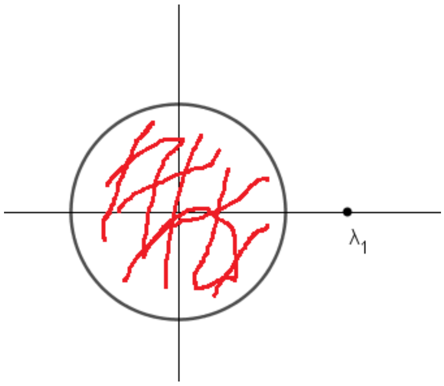

Figura 1.3: Propriedade de gap espectral

Em nosso contexto, veremos que o operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi|C^r}$ possui a propriedade de gap espectral e é uniforme com respeito a f e ϕ. Esta propriedade será fundamental para a demonstração dos nossos resultados.

Em dimensão finita, sabemos que os autovalores variam continuamente com o operador, já em dimensão infinita existem exemplos em que o espectro não varia continuamente, contudo, veremos que o espectro sempre varia semicontínua superiormente. Para isso, definamos semicontinuidade.

Definição 1.27. *(Semicontinuidade). Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. Seja $H(M)$ a coleção de subconjuntos compactos de M. Uma aplicação $\Phi : X \to H(M)$ é*

i) semicontínua inferiormente em $x \in X$ se para todo aberto $V \subset M$ com $V \cap \Phi(x) \neq \emptyset$ existir uma vizinhança U de x tal que $V \cap \Phi(x') \neq \emptyset$ para todo $x' \in U$.

ii) semicontínua superiormente em $x \in X$ se para todo aberto $V \subset M$ contendo $\Phi(x)$ existir uma vizinhança U de x tal que V contém $\Phi(x')$ para todo $x' \in U$.

Teorema 1.10. *(Semicontinuidade superior das componentes espectrais). Seja* $X \subset sp(A)$ *uma componente espectral e considere* $X \subset V \subset \mathbb{C}$ *um aberto limitado tal que* $\overline{V} \cap sp(A) = X$. *Defina* $X^\epsilon := \{x \in M; \quad d(x, X) < \epsilon\}$. *Dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $||A - \hat{A}|| < \delta$ *implica que* $\overline{V} \cap sp(\hat{A}) = X^\epsilon \cap sp(\hat{A})$, *ou seja, a aplicação* $B(A, \delta) \ni \tilde{A} \to sp(\tilde{A}) \cap V$ *é semicontínua superiormente em* A.

1.5 O espaço de aplicações C^r

Nesta seção apresentaremos um breve resumo sobre espaço de aplicações tomando valores em espaços de Banach e topologia diferencial, e a partir daí, veremos alguns resultados em variedades. Os resultados e definições aqui apresentados, bem como suas demonstrações podem ser encontrados em [Fr79].

Suponhamos que E e F são espaços de Banach e U é um conjunto aberto em E.

Definição 1.28. $C_b^k(U, F)$ *denota o conjunto das aplicações* C^k *de* U *para* F *com a seguinte propriedade:* $f \in C_b^k(U, F)$ *implica que existe uma constante* K *dependendo de* f *tal que* $\sup_{x \in U} ||D^i f(x)|| < K$ *para todo* $0 \leq i \leq k$.

Ou seja, $C_b^k(U, F)$ é o conjunto de aplicações de U para F, C^k cujas primeiras k derivadas são limitadas em U. Se $f \in C_b^k(U, F)$, definamos $||f||_k := \sum_{i=0}^{k} \sup_{x \in U} ||D^i f(x)||$. Nosso próximo resultado diz que $|| \cdot ||_k$ torna $C_b^k(U, F)$ Banach.

Teorema 1.11. *O espaço* $C_b^k(U, F)$ *é um espaço de Banach com a norma* $|| \cdot ||_k$.

Suponha agora que M é uma C^∞ variedade compacta.

Definição 1.29. *Um atlas especial* A *em* M *é o conjunto finito de cartas* $\{\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n\}$ *tal que cada* α *estende-se a carta* $\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^n$ *com* $\overline{U_\alpha} \subset V_\alpha$ *e tal que* $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

Definamos então o espaço $C^k(M, F)$.

Definição 1.30. $C^k(M, F)$ *denota o conjunto das aplicações* C^k *de* M *para* F. *Se* A *é um atlas especial em* M, *dada* $f \in C^k(M, F)$ *definamos* $||f||_k^A := \max_{\alpha \in A} ||f \circ \alpha^{-1}||_k$.

Além disso, se U é um aberto em F, $C^k(M, U) = \{f \in C^k(M, F); \quad f(M) \subset U\}$.

Teorema 1.12. *Sejam* M *uma* C^∞ *variedade compacta,* A *um atlas especial em* M *e* F *um espaço de Banach. Então* $C^k(M, F)$ *é um espaço de Banach com a norma* $|| \cdot ||_k^A$. *Se* B *é outro atlas especial em* M, *as normas* $|| \cdot ||_k^A$ *e* $|| \cdot ||_k^B$ *são equivalentes.*

[Fr79] também prova a continuidade da aplicação $C_b^k(U,F)\times C^k(M,U)\to C^k(M,F)$ dada pela composição. Além disso, se exigirmos mais regularidade do espaço da funções com derivada limitada, obtemos mais regularidade na aplicação composição, como se segue no próximo resultado.

Teorema 1.13. *Sejam M uma C^∞ variedade compacta, E e F espaços de Banach e U um aberto em E. Então a aplicação $comp : C_b^{r+s}(U,F)\times C^r(M,U)\to C^r(M,F)$ dada por*

$$comp(f,g) = f\circ g$$

é uma aplicação C^s. Se $r=0$, então M pode ser qualquer espaço topológico compacto.

Agora veremos que o conjunto de aplicações C^r de uma variedade compacta C^∞ M para uma variedade compacta C^∞ N tem estrutura de variedade de Banach. Lembremos que uma variedade de Banach é uma variedade modelada em um espaço de Banach, ou seja, cujas vizinhanças do domínio das cartas locais são abertos de um espaço de Banach. A variedade de Banach possui propriedades similaras ao cálculo diferencial em variedades, para mais detalhes ver [La62].

Teorema 1.14. *Se M é uma variedade compacta C^∞ e N é uma subvariedade C^∞ de $\mathbb{R}^m$, então $C^r(M,N)$ é uma subvariedade C^∞ de $C^r(M,\mathbb{R}^m)$.*

Além disso, dada $f\in C^r(M,N)$, o seu espaço tangente é identificado como seções sobre f definidas por $\Gamma_f^r := \{\gamma\in C^r(M,TN);\quad \gamma(x)\in T_{f(x)}N \quad\forall\quad x\in M\}$. O Teorema 1.13 continua sendo válido, isto é

Teorema 1.15. *Sejam M, N e P variedades C^∞ com M e N compactas. Então a aplicação $comp : C^{r+s}(N,P)\times C^r(M,N)\to C^r(M,P)$ dada por*

$$comp(f,g) = f\circ g$$

é uma aplicação C^s. Além disso, dadas $\gamma_1\in\Gamma_f^{r+s}$ e $\gamma_2\in\Gamma_g^r$ então $Dcomp : \Gamma_f^{r+s}\times\Gamma_g^r\to\Gamma_{f\circ g}^r$ é dada por

$$Dcomp(f,g)(\gamma_1,\gamma_2) = Df(g(x))(\gamma_2(x)) + \gamma_1(g(x)).$$

Notemos por fim que, pelo teorema do Mergulho de Whitney, mesmo que N seja apenas uma varidade (não nescessariamente mergulhada) ainda obteremos os teoremas anteriores sobre o espaço $C^r(M,N)$.

Capítulo 2

Dinâmicas Expansoras

Neste capítulo abordaremos um pouco sobre as transformações expansoras, uma vez que o objetivo deste trabalho é o estudo de resultados de linear response fórmula para este tipo de dinâmica. Daremos sua definição, bem como alguns exemplos e resultados que utilizaremos no decorrer dos nossos resultados. Além disso, faremos uma seção de formalismo termodinâmico para transformações expansoras e apresentaremos o teorema de Ruelle. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [VO14].

No nosso contexto, trabalharemos com a classe de dinâmicas expansoras suaves, ou seja, $f : M \to M$ de classe C^r tal que f é expansora, a qual denotaremos por $f \in \mathcal{D}^r$. E M será sempre uma variedade Riemanniana compacta e conexa.

Assim, optamos por definir dinâmicas expansoras suaves. E logo em seguida, veremos a definição geral das transformações expansoras e que nossa definição inicial faz sentido.

2.1 Dinâmicas expansoras suaves

Definição 2.1. *Seja M uma variedade riemanniana compacta e $f : M \to M$ uma transformação de classe C^r. Dizemos que f é uma transformação expansora suave se existe $\sigma > 1$ tal que*

$$||Df(x) \cdot v|| \geq \sigma ||v|| \quad \textit{para todo} \quad x \in M \quad \textit{e todo} \quad v \in T_xM.$$

Observe que o fato de $||Df(x) \cdot v|| \geq \sigma ||v||$, implica que $Df(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in M$. Sendo assim, em particular, f é um difeomorfismo local. Segue também da definição acima que toda transformação suficientemente próxima de f na topologia C^r ainda é expansora. Dessa forma, as transformações expansoras formam um aberto em $C^r(M, M)$. Logo, o espaço das aplicações expansoras $C^r(M, M)$ (que denotaremos por $\mathcal{D}^r$) é uma subvariedade de Banach.

Exemplo 2.1.1. *Seja* $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; \quad |z| = 1\}$. *Considere* $f : S^1 \to S^1$ *dada por*

$$f(z) = z^n, \quad \text{com} \quad n \geq 2$$

Então, com a métrica induzida de $\mathbb{R}^2$, *temos que*

$$Df(z) = nz^{n-1} \Rightarrow ||Df(z).v|| = n||z^{n-1}||||v|| = n||v|| \quad \forall \quad v \in T_zS^1$$

Logo, tomando $\sigma = n$ *segue que* f *é expansora.*

Exemplo 2.1.2. *Seja* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ *com autovalores* λ_i *tais que* $|\lambda_i| > 1 \quad \forall \quad i$. $A(\mathbb{Z}^n) \subseteq \mathbb{Z}^n$. *Assim,* A *induz sobre* $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *a aplicação* $f_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ *tal que se* $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ *é a projeção canônica, ou seja,* $\pi(x) = [x] = x + \mathbb{Z}^n$, *então* $f_A \circ \pi = \pi \circ A$. f_A *é dita endomorfismo linear no toro. Dado qualquer* $1 < \sigma < \inf\{|\lambda_i|\}$, *existe um produto interno em* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $||Df_A(x) \cdot v|| \geq \sigma||v||$. *Logo,* f_A *é uma transformação expansora.*

Agora, faremos uma definição mais geral das transformações expansoras que engloba a definição anterior.

Definição 2.2. *Sejam* M *um espaço métrico compacto e* $f : M \to M$ *uma transformação contínua.* f *é dita expansora topológica se:*
(i) existir $\delta > 0$ *e* $\sigma > 1$ *tais que*

$$d(f(x), f(y)) \geq \sigma d(x, y) \quad \forall \quad d(x, y) < \delta$$

(ii) f *é uma aplicação aberta.*

Observações: Segue diretamente da definição acima que toda transformação expansora f é injetiva em cada bola $B(p, \delta)$ para todo $p \in M$.

Observe agora que toda transformação diferenciável expansora no sentido da definição (2.1), também é expansora no sentido da definição acima.

De fato, dada $f : M \to M$ uma aplicação de classe $C^r(M, M)$ numa variedade riemanniana compacta tal que $||Df(x) \cdot v|| \geq \sigma||v||$ para todo $x \in M$ e todo $v \in T_xM$, onde $\sigma > 1$. Denote $K = \sup ||Df||$. Note que $K > 1$. Considere $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que a restrição de f a toda bola $B(x, 2K\delta)$ seja um difeomorfismo sobre a imagem. Dessa forma, f é uma aplicação aberta.

Além disso, se $d(x, y) < \delta$, então pela desigualdade do valor médio, $d(f(x), f(y)) < 2K\delta$. Considere $\gamma : [0, 1] \to B(f(x), 2K\delta)$ uma geodésica minimizante ligando $f(x)$ a $f(y)$, ou seja, tal que $\gamma(0) = f(x)$, $\gamma(1) = f(y)$ e $d(f(x), f(y)) = l(\gamma)$. Assim, pela escolha de δ existe uma curva diferenciável $\beta : [0, 1] \to B(x, 2K\delta)$ ligando x a y e tal que $f(\beta(t)) = \gamma(t)$ para todo t. Então,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) = l(\gamma) &= \int_{[0,1]} ||\gamma'(t)||dt = \int_{[0,1]} ||Df(\beta(t)) \cdot \beta'(t)||dt \\ &\geq \int_{[0,1]} \sigma ||\beta'(t)||dt = \sigma l(\beta) = \sigma d(x, y) \end{aligned}$$

Logo, f é expansora no sentido da definição acima.

A seguir, mais exemplo de aplicações expansoras:

Exemplo 2.1.3. *Seja $J \subset [0,1]$ uma união finita de intervalos compactos disjuntos. Considere a aplicação $f : J \to [0,1]$ tal que a restrição de f a cada componente conexa de J é um difeomorfismo sobre $[0,1]$ e existe $\sigma > 1$ tal que*

$$|f'(x)| \geq \sigma \quad \textit{para todo} \quad x \in J$$

Denote $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(J)$, ou seja, Λ é o conjunto dos pontos x cujos iterados $f^n(x)$ estão definidos para todo $n \geq 0$. Então $f|_\Lambda$ é uma transformação expansora.

De fato, sejam X_i componentes conexas de J. Fixe $\delta > 0$ tal que $\delta < d(X_i, X_j)$. Assim, qualquer bola de raio δ em Λ está contida numa única componente conexa de J. Dessa forma, $f|_\Lambda$ é uma aplicação aberta. Logo, $f|_\Lambda$ é expansora.

A seguir, mostraremos que toda transformação expansora é expansiva. Para isso, relembremos o conceito de expansividade.

Observações: Dada $f : M \to M$, contínua e M compacto, dizemos que f é expansiva se existir $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x_1 \neq x_2$ temos que

$$d(f^n(x_1), f^n(x_2)) \geq \varepsilon \quad \text{para algum} \quad n \in \mathbb{N}$$

Proposição 2.1. *Se $f : M \to M$ é expansora, então f é expansiva.*

Demonstração. De fato, seja ε da expansão local e dados $x_1 \neq x_2 \in M$ suponha por absurdo que

$$d(f^j(x_1), f^j(x_2)) < \varepsilon \quad \forall \quad j$$

Como por hipótese f é expansora, segue que

$$d(f^n(x_1), f^n(x_2)) \geq \sigma^{n-1} d(x_1, x_2) \quad \forall \quad n \quad \text{com} \quad \sigma > 1$$

Logo, M é ilimitado. Absurdo.

□

2.2 Ramos inversos contrativos

Para transformações expansoras em espaços métricos o número de pré-imagens de um ponto $y \in M$ pode variar com y. Mas, podemos ver que este número é sempre finito e até limitado, pois como M é compacto, basta tomar uma cobertura finita de M por bolas de raio δ. Daí, cada ponto de M tem no máximo uma pré-imagem em cada uma das bolas, pois f é injetiva em cada bola. Se além disso, M for conexo, segue então que o número de pré-imagens é constante.

Por abuso de notação, chamaremos de *grau* da transformação expansora $f : M \to M$ o número máximo de pré-imagens de qualquer ponto $y \in M$, ou seja

$$deg(f) = \max\{\#f^{-1}(y); \quad y \in M\}.$$

Dado $p \in M$, como f é injetiva em cada bola $B(p, \delta)$, segue então que, dado $K \subset B(p, \delta)$ compacto, $f|_K$ é um homeomorfismo sobre a imagem. De fato, como f é contínua e K é compacto, temos então que $f(K)$ é compacto e como $(f^{-1})^{-1}(K) = f(K)$, concluímos que $f^{-1} : f(K) \to K$ é contínua. Tome para K a pré-imagem do fecho da bola centrada em $f(p)$ e raio δ $(\overline{B(f(p), \delta)})$.

Definição 2.3. *Dada $f : M \to M$ expansora, e $p \in M$. Chamamos de ramo inverso de f em p a aplicação $f_p : \overline{B(f(p), \delta)} \to B(p, \delta)$, onde f_p é a inversa da restrição de f a K.*

Claramente $f_p(f(p)) = p$ e $f \circ f_p = id$.

Observações: Como a quantidade de pré-imagens de p por f pode não ser única, segue que para todo $p \in M$, existem $A_{1,p}, \cdots, A_{deg(f),p} \subset M$ abertos tais que $f(A_{i,p}) = B(p, \delta) \quad \forall \quad i = 1, \cdots, deg(f)$. Denotaremos os ramos inversos de f em p por $f_i : B(p, \delta) \to A_{i,p}$, com $i = 1, \cdots, deg(f)$.

Além disso, segue da definição de ramos inversos e do fato de f ser expansora que

$$d(f_i(f(x)), f_i(f(y))) = d(x, y) \leq \sigma^{-1} d(f(x), f(y)) \quad \text{para todo} \quad x, y \in B(p, \delta) \quad \text{e} \quad \forall \quad i$$

Como $\sigma > 1$, segue que f_i é uma contração para todo i.

Sendo assim, em nosso contexto, se $f : M \to M$ é expansora suave, e M uma variedade compacta riemanniana, segue que dados $x \in M$ e $v \in T_x M$

$$||Df_i(x) \cdot v|| \leq \sigma^{-1} ||v||, \quad \text{onde} \quad \sigma > 1.$$

Além disso, se $f : M \to M$ e $\hat{f} : M \to$ são dinâmicas próximas, segue que dado $x \in M$, $\#f^{-1}(x) = \#\hat{f}^{-1}(x)$ e dessa forma, podemos agrupar os ramos inversos de f e $\hat{f}$ definidos no mesmo domínio.

Podemos então definir o operador de Ruelle-Perron-Frobenius para dinâmicas expansoras, como se segue:

Definição 2.4. *Dada $f : M \to M$ expansora e $\phi : M \to \mathbb{R}$ potencial $C^r(M, \mathbb{R})$, definimos o operador $\mathcal{L}_{f,\phi} : C^r(M, \mathbb{C}) \to C^r(M, \mathbb{C})$ dado por*

$$\mathcal{L}_{f,\phi}(g)(x) = \sum_{i=1}^{deg(f)} e^{\phi(f_i(x))} g(f_i(x))$$

2.3 Formalismo Termodinâmico

Nesta seção apresentaremos alguns elementos da teoria ergódica para transformações expansoras. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [PU10] e em [VO14]. Sabemos do princípio variacional que dada $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto, $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial contínuo e $\mathcal{M}(f)$ o conjunto das medidas de probabilidade invariantes por f, a pressão topológica com respeito a f e ϕ é dada por

$$P_{Top}(f, \phi) = \sup\{h_\nu(f) + \int \phi d\nu; \quad \nu \in \mathcal{M}(f)\}$$

Definição 2.5. ***(Estados de equilíbrio).*** *Seja $f : M \to M$ uma transformação expansora num espaço métrico compacto. Uma medida de probabilidade μ invariante por f é dita estado de equilíbrio para um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$ se ela realiza o supremo no princípio variacional, ou seja, se*

$$h_\mu(f) + \int \phi d\mu = P_{Top}(f, \phi) = \sup\{h_\nu(f) + \int \phi d\nu; \quad \nu \in \mathcal{M}(f)\}$$

No caso particular em que $\phi \equiv 0$, dizemos que μ é uma *medida de máxima entropia.*

Um dos objetivos do Formalismo Termodinâmico é encontrar condições quue garantem a existência de tais estados de equilíbrio. O próximo resultado, devido a David Ruelle irá nos garantir a existência e unicidade destes estados de equilíbrio.

Teorema 2.1. *(Ruelle). Seja $f : M \to M$ uma transformação expansora mixing num espaço métrico compacto e seja $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial Holder. Então existe um único estado de equilíbrio μ para ϕ.*

A prova do resultado acima é feita de maneira construtiva e será omitida em nosso trabalho por fugir do nosso objetivo. Faremos um breve comentário de como o estado de equilíbrio é encontrado.

Considere $\lambda = r(\mathcal{L}_{f,\phi}) = r(\mathcal{L}^*_{f,\phi})$. Uma probabilidade ν que satisfaz $\mathcal{L}^*_{f,\phi}\nu = \lambda\nu$ é dita medida conforme. Dessa forma, uma pergunta natural é se existem probabilidades conformes associadas ao raio espectral de $\mathcal{L}^*_{f,\phi}$. O próximo teorema de Ruelle nos garante a existência de tal medida e também irá nos garantir que o próprio operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi}$ admite uma autofunção associada ao autovalor λ.

Teorema 2.2. ***(Ruelle)***. *Sejam $f : M \to M$ expansora, M uma variedade riemanniana compacta, $\phi : M \to \mathbb{R}$ potencial contínuo e Holder então existem $h : M \to \mathbb{R}$ Holder contínua estritamente positiva, $\nu_{f,\phi}$ probabilidade invariante por f e $\lambda_{f,\phi} > 0$ tais que:*
1) existe único $d\mu_{f,\phi} = h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi}$ estado de equilíbrio para (f, ϕ);
2) $\mathcal{L}^*_{f,\phi}\nu_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$ e $\lambda_{f,\phi} = e^{P_{Top}(f,\phi)}$;
3) $\mathcal{L}_{f,\phi}h_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi}h_{f,\phi}$ e $\displaystyle\int_M h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} = 1$;

Capítulo 3

Linear response formula

Seja $\mathcal{D}^r$ a classe de dinâmicas expansoras C^r sobre uma variedade riemanianna, compacta e conexa M. Para cada $(f, \phi) \in \mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R})$, já sabemos pelo teorema de Ruelle [Vi97] que existe unico estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ, que denotaremos por $\mu_{f,\phi}$. Além disso, $\mu_{f,\phi} = h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$, onde $h_{f,\phi}$ é autofunção e $\nu_{f,\phi}$ é automedida associados ao raio espectral do operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi}$.

Neste capítulo, estamos interessados em entender a regularidade das aplicações que associam a cada par (f, ϕ) tal estado de equilíbrio $\mu_{f,\phi}$, a pressão topológica $P_{top}(f, \phi)$ e a densidade $h_{f,\phi}$. Será que estas aplicações são ao menos contínuas? Diferenciáveis? Se sim, gostaríamos de obter fórmulas para suas diferenciais, este resultado é chamado de fórmula de resposta linear (*linear response formula*).

Os resultados de estabilidades estatísticas, que serão enunciados a seguir, já garantem a continuidade destas aplicações.

Teorema 3.1. *(Estabilidade estatística). As seguintes funções são contínuas:*
(i) $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto P_{Top}(f, \phi) \in \mathbb{R}$;
(ii) $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto h_{f,\phi} \in C^0(M, \mathbb{R})$;
(iii) $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto \nu_{f,\phi} \in (C^0)^*$;
(iv) $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto \mu_{f,\phi} \in (C^0)^*$.

Assumindo então tais resultados, neste capítulo, estamos interessados em provar que tais aplicações possuem mais regularidade. Em termos matemáticos, queremos provar o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Se $r \geq 2$ então as seguintes aplicações variam analiticamente com relação ao potencial ϕ e C^{r-1} com relação à dinâmica f:*
i. $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto P_{top}(f, \phi)$;
ii. $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto \nu_{f,\phi} \in (C^1)^*$;
iii. $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto h_{f,\phi}(f) \in C^{r-1}$;

iv. $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto \mu_{f,\phi} \in (C^1)^*$.

Para isso, utilizaremos técnicas da teoria espectral, pois se queremos estudar a variação de $\lambda_{f,\phi}$ e $\mu_{f,\phi}$, basta estudarmos $\lambda_{f,\phi}$, $h_{f,\phi}$ e $\nu_{f,\phi}$. Tais elementos podem ser obtidos através da aplicação $P_{f,\phi}$ que é a projeção espectral do operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi}|_{C^r}$ associado ao seu raio espectral, pois como $\mathcal{L}_{f,\phi}|_{C^r}$ tem a propriedade de gap espectral, que mostraremos mais adiante, e como $P_{f,\phi}(1)$ é autovetor associado a $\lambda_{f,\phi}$, temos que $\mathcal{L}_{f,\phi}(P_{f,\phi}(1)) = \lambda_{f,\phi} P_{f,\phi}(1)$ e além disso, $P_{f,\phi}(1) = t h_{f,\phi}$. Isto implica que

$$\int P_{f,\phi}(1) d\nu_{f,\phi} = t \int h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} = t \Rightarrow \int 1 d(P^*_{f,\phi}\nu_{f,\phi}) = t \Rightarrow \int 1 d\nu_{f,\phi} = t \Rightarrow t = 1$$

Temos também que dado $g \in C^r(M, \mathbb{R})$, $P_{f,\phi}(g) = a h_{f,\phi}$ e como $P_{f,\phi}(1) = h_{f,\phi}$ segue que $\frac{P_{f,\phi}(g)}{P_{f,\phi}(1)} = a$. Note também que

$$\int P_{f,\phi}(g) d\nu_{f,\phi} = a \int h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} \Rightarrow \int P_{f,\phi}(g) d\nu_{f,\phi} = a.$$

Por outro lado, $\int P_{f,\phi}(g) d\nu_{f,\phi} = \int g d(P^*_{f,\phi}\nu_{f,\phi})$. Como $\mathcal{L}^*_{f,\phi}\nu_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$, segue do cálculo funcional que $P^*_{f,\phi}\nu_{f,\phi} = \nu_{f,\phi}$. Assim, $a = \int g d\nu_{f,\phi}$.

Logo, $\lambda_{f,\phi} = \frac{\mathcal{L}_{f,\phi}(P_{f,\phi}(1))}{P_{f,\phi}(1)}$, $h_{f,\phi} = P_{f,\phi}(1)$ e $\nu_{f,\phi}(g) = \frac{P_{f,\phi}(g)}{P_{f,\phi}(1)} \quad \forall \quad g \in C^r(M, \mathbb{R})$.

Assim, discutiremos um pouco sobre a diferenciabilidade do ponto de vista da teoria espectral. Seja $A : E \to E$ um operador linear limitado com a propriedade de gap espectral. Seja γ uma curva fechada C^1 tal que a componente conexa limitada determinada por γ contém o raio espectral e a componente conexa ilimitada contém o resto do espectro de A. Pela semicontinuidade das componentes espectrais, existe um $\delta > 0$ tal que se $||A - \hat{A}|| < \delta$, então γ separa duas componentes espectrais de $\hat{A}$. Denotaremos a componente espectral de $\hat{A}$ que está na componente conexa limitada por $\Lambda_{\hat{A}}$. Se $P_{\hat{A}}$ é projeção espectral associada ao operador $\hat{A}$ e à componente limitada $\Lambda_{\hat{A}}$, o cálculo funcional holomorfo garante que $P_{\hat{A}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (zI - \hat{A})^{-1} dz$. Como a curva γ está fixada, se queremos saber sobre a diferenciabilidade de $P_{\hat{A}}$ com respeito a $\hat{A}$, basta estudarmos a diferenciabilidade de $(zI - \hat{A})^{-1}$ com respeito a $\hat{A}$. Sabemos também da teoria espectral que, de fato, $(zI - \hat{A})^{-1}$ é analítica em relação a $\hat{A}$ e temos ainda a uniformidade na convergência da série de Taylor quando olhamos z variando ao longo da curva γ. E portanto, $P_{\hat{A}}$ é analítica em relação a $\hat{A}$, pois já vimos que $(zI - \hat{A})^{-1}$ é analítica e a integral é analítica.

3.1 Analiticidade em relação ao potencial

Retornando então ao operador de transferência, a diferenciabilidade da projeção espectral implica a diferenciabilidade de $\lambda_{f,\phi}, \mu_{f,\phi}$ e $h_{f,\phi}$ com respeito a f e ϕ. Logo, seria suficiente que o operador de transferência fosse suave em relação à dinâmica e ao potencial. Inicialmente, provaremos a diferenciabilidade do operador de transferência em relação ao potencial ϕ.

Proposição 3.1. *Seja $f \in \mathcal{D}^r$. A aplicação $C^r(M, \mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \mathcal{L}^n_{f,\phi} \in \mathcal{L}(C^r(M, \mathbb{C}))$ é analítica, logo C^∞. Além disso, para todas as funções $g, H \in C^r(M, \mathbb{C})$ e todo $n \geq 1$, a diferencial atuando em H é dada por*

$$(D_\phi \mathcal{L}^n_\phi g)|_{\phi_0} \cdot H = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^i_{\phi_0}(H \cdot \mathcal{L}^{n-i}_{\phi_0} g).$$

Demonstração. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\phi+H}(g) &= \sum_{j=1}^{deg(f)} e^{(\phi+H)(f_j(x))} g(f_j(x)) = \sum_{j=1}^{deg(f)} e^{\phi(f_j(x))} e^{H(f_j(x))} g(f_j(x)) \\
&= \mathcal{L}_\phi(e^H g) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_\phi(\frac{1}{i!} H^i g) = \mathcal{L}_\phi g + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathcal{L}_\phi(H^i g)
\end{aligned}$$

Denotaremos por $\mathcal{L}^i_s(C^r(M, \mathbb{C}))$ o espaço das funções simétricas i-lineares com domínio em $[C^r(M, \mathbb{C})]^i$ sobre $C^r(M, \mathbb{C})$. Observe também que as aplicações

$$C^r(M, \mathbb{R}) \ni \phi \mapsto (H \mapsto \mathcal{L}_\phi(H^i.g)) \in \mathcal{L}^i_s(C^r(M, \mathbb{C}))$$

são contínuas para cada $i \in \mathbb{N}$ e que a composição entre elas também é contínua com relação a ϕ. Além disso, para $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}
\sup_{||g||=1} \frac{\left|\left|\mathcal{L}_{\phi+H}(g) - \mathcal{L}_\phi(g) - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \mathcal{L}_\phi(H^i g)\right|\right|}{||g||||H||^k} &= \sup_{||g||=1} \frac{\left|\left|\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathcal{L}_\phi(H^i g)\right|\right|}{||g||||H||^k} \\
&\leq \sum_{k+1}^{\infty} \sup_{||g||=1} \frac{||\frac{1}{i!} \mathcal{L}_\phi(H^i g)||}{||g||||H||^k}
\end{aligned}$$

que converge para 0 quando H converge a 0. Assim, a aplicação $\phi \mapsto \mathcal{L}_\phi$ é analítica e, portanto, C^∞. E sua k-ésima diferencial aplicada em H é $\mathcal{L}_\phi(H^i g)$. Logo, aplicando a regra da cadeia e do produto na composição $\phi \mapsto \mathcal{L}^n_\phi(g)$, concluímos a proposição.

□

Observe que na demonstração da proposição anterior, não utilizamos a propriedade de gap espectral do operador de transferência. Logo, este resultado vale em geral. Decorre então da proposição anterior e da discussão de teoria espectral feita anteriormente o seguinte corolário:

Corolário 3.2.1. *Fixada $f \in \mathcal{D}^r$. Então as seguintes aplicações são analíticas:*
i. $C^r(M, \mathbb{R}) \ni \phi \mapsto P_{top}(f, \phi)$;
ii. $C^r(M, \mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \nu_{f,\phi} \in (C^1)^*$;
iii. $C^r(M, \mathbb{R}) \ni \phi \mapsto h_{f,\phi}(f) \in C^{r-1}$;
iv. $C^r(M, \mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \mu_{f,\phi} \in (C^1)^*$.

Este resultado foi originalmente provado em [PU10]. Agora, discutiremos a regularidade em relação à dinâmica f. O próximo exemplo, apresentado em [CV13], mostra que mesmo para dinâmicas expansoras o operador de transferência não varia sequer continuamente em relação à dinâmica como operador (atuando de um espaço nele mesmo).

Exemplo 3.1.1. *Seja $f : S^1 \to S^1$ a aplicação duplicação do círculo. A aplicação que associa a f o operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi} : C^\alpha(S^1, \mathbb{R}) \to C^\alpha(S^1, \mathbb{R})$ é descontínuo tanto na norma do operador, quanto na pontual.*

De fato, veremos a descontinuidade do operador agindo sobre o espaço dos observáveis Lipschitz. A ideia chave é que o operador de composição $\varphi \to \varphi \circ g$ atuando no espaço das funções Lipschitz não varia continuamente com g, como iremos detalhar.

Seja $S^1 \simeq \mathbb{R}/[-1/2, 1/2)$ o círculo, e considere a aplicação expansora no círculo $f_n(x) = 2(x + \frac{1}{10n})(\mod 1), n \geq 1$. É claro que a sequência $(f_n)_n$ é convergente para a duplicação do círculo $f(x) = 2x(\mod 1)$ na topologia C^∞.

Agora, tomemos uma função Lipschitz φ no círculo tal que $\varphi(x) = |x|$ para $|x| \leq \frac{1}{8}$ e $\varphi(x) = 0$ para $\frac{1}{2} \geq |x| \geq \frac{1}{5}$ e considere o potencial $\phi \equiv 0$. Desse modo, se $0 < x_n < y_n < \frac{1}{10n}$, nós obtemos que

$$
\begin{aligned}
Lip((\mathcal{L}_{f_n,\phi} - \mathcal{L}_{f,\phi})\varphi) &\geq \frac{|\mathcal{L}_{f_n,\phi}(\varphi)(y_n) - \mathcal{L}_{f_n,\phi}(\varphi)(x_n) + \mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi)(x_n) - \mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi)(y_n)|}{y_n - x_n} \\
&= \frac{||\frac{y_n}{2} - \frac{1}{10n}| - |\frac{x_n}{2} - \frac{1}{10n}| + |\frac{x_n}{2}| - |\frac{y_n}{2}||}{y_n - x_n} \\
&= \frac{|-y_n + x_n|}{y_n - x_n} = 1 = Lip(\varphi)
\end{aligned}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a sequência de operadores $(\mathcal{L}_{f_n,\phi})_n$ não converge para $\mathcal{L}_{f,\phi}$, nem mesmo na topologia forte de operadores.

Entretanto, em [CV13], é provado que o operador de transferência é suave em relação a dinâmicas suaves em um sentido mais fraco, ou seja, se exigirmos menos regularidade do seu contradomínio. Em outras palavras,

Proposição 3.2. *Seja $r \geq 1, 1 \leq k \leq r$, $Diff_{loc}(M, M)$ o espaço de C^r-difeomorfismos locais em uma variedade Riemanniana compacta e conexa M e $\phi \in C^r(M, \mathbb{R})$ algum potencial fixado. Então a aplicação*

$$Diff_{loc}(M, M) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}(C^r(M, \mathbb{R}), C^{r-k}(M, \mathbb{R}))$$

$$f \quad \longmapsto \quad \mathcal{L}_{f,\phi}$$

é C^k.

A prova deste resultado será dada mais adiante. Contudo, não podemos garantir que $\lambda_{f,\phi}$ e $\mu_{f,\phi}$ são suaves em relação à dinâmica f utilizando o que foi discutido anteriormente da teoria espectral clássica, pois ela é desenvolvida para operadores atuando no mesmo espaço. A despeito disso, em [GL06], teorema 8.1 é provado um resultado, que pode ser colocado dentro de uma "teoria espectral não-clássica", que irá nos garantir a diferenciabilidade da projeção espectral atuando em espaços distintos.

Mais adiante apresentaremos o contexto de [GL06] e veremos que com a propriedade de gap espectral uniforme do operador de transferência, teremos as hipóteses e poderemos aplicar o resultado de [GL06]. Dessa forma, na próxima seção discutiremos sobre o gap espectral do operador de transferência.

3.2 Gap espectral

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que dada $f \in \mathcal{D}^r$ e $\phi \in C^r$, o operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi}$ tem gap espectral sobre $C^r(M, \mathbb{C})$ e tal propriedade é uniforme. Este resultado foi provado, originalmente em [Bom14] e em [BC17]. Para isso, utilizaremos a técnica de cones.

Estamos interessados em aplicar os resultados de cones e métricas projetivas apresentados na seção 1.2. Para isso, precisaremos de um cone completo com diâmetro finito. Já vimos que o cone das funções positivas C_+ com a pseudo-metrica θ_+ é completo, mas note que a sua imagem pelo operador de transferência não tem diâmetro finito. De fato, considere a aplicação expansora no círculo dada por $f(x) = 2x(\mod 1)$ e o potencial $\phi \equiv 0$. Seja $\varphi_n : M \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções C^∞ tais que $1 \leq \varphi_n \leq n$, $\varphi_n(0) = \varphi_n(\frac{1}{2}) = 1$ e $\varphi_n(\frac{3}{8}) = \varphi_n(\frac{7}{8}) = n$. Dessa forma, $\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi_n(x) = \varphi_n(\frac{x}{2}) + \varphi_n(\frac{x+1}{2})$. Como já vimos que dadas $\varphi, \psi \in C_+$, $\theta_+(\varphi, \psi) = \log \frac{\sup \frac{\psi}{\varphi}}{\inf \frac{\psi}{\varphi}}$, segue então que

$$\begin{aligned}
\theta_+(1, \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi_n) &= \log \frac{\sup\limits_{x\in M} \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi_n(x)}{\inf\limits_{x\in M} \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi_n(x)} \\
&= \log \frac{\sup\limits_{x\in M} \left(\varphi_n(\frac{x}{2}) + \varphi_n(\frac{x+1}{2})\right)}{\inf\limits_{x\in M} \left(\varphi_n(\frac{x}{2}) + \varphi_n(\frac{x+1}{2})\right)} \\
&= \log \frac{\varphi_n(\frac{3}{8}) + \varphi_n(\frac{7}{8})}{\varphi_n(0) + \varphi_n(\frac{1}{2})} = \log \frac{2n}{2} = \log n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty
\end{aligned}$$

Assim, estamos interessados em definir um cone menor contido em C_+, cuja imagem pelo operador $\mathcal{L}_{f,\phi}$ tenha diâmetro finito com respeito a sua respectiva pseudo-métrica.

Para $r \geq 1$ e $\kappa > 0$ definamos

$$\Lambda_\kappa^r := \{\varphi \in C^r(M, \mathbb{R}); \varphi > 0 \quad \text{e} \quad \sup_{x \in M} \left\| \frac{D^s\varphi(x)}{\varphi(x)} \right\| \leq \kappa c_{r,s}^{r-s}, \forall 1 \leq s \leq r\},$$

onde $c_{r,r} = 1$. Desprezando o caso em que $r = s$, temos que $c_{r,s}$ só depende de s. $c_{r,s}$ são constantes suficientemente pequenas para que ocorra a invariância dos cones. Quando $r = 1$, temos

$$\Lambda_\kappa^1 := \{\varphi \in C^1(M, \mathbb{R}); \varphi > 0 \quad \text{e} \quad \sup_{x \in M} \left\| \frac{D\varphi(x)}{\varphi(x)} \right\| \leq \kappa\}.$$

Quando $r = 2$, temos

$$\Lambda_\kappa^2 := \{\varphi \in C^2(M, \mathbb{R}); \varphi > 0 \quad \text{e} \quad \sup_{x \in M} \left\| \frac{D\varphi(x)}{\varphi(x)} \right\| \leq c_{2,1}^1 \kappa \quad \text{e} \quad \sup_{x \in M} \left\| \frac{D^2\varphi(x)}{\varphi(x)} \right\| \leq \kappa\}.$$

Note que Λ_κ^r é cone convexo, pois dada $\varphi \equiv c, c > 0$, temos que $\varphi \in C^r(M, \mathbb{R})$, $\varphi > 0$ e

$$\sup_{x \in M} \left\| \frac{D^s\varphi(x)}{\varphi(x)} \right\| = 0 < \kappa c_{r,s}^{r-s} \quad \forall \quad 1 \leq s \leq r$$

e, dadas φ, $\psi \in \Lambda_\kappa^r$ e $t > 0$, temos que $t\varphi + \psi \in C^r(M, \mathbb{R})$, $t\phi + \psi > 0$ e

$$\begin{aligned} \left| \frac{D^s(t\varphi + \psi)(x)}{(t\varphi + \psi)(x)} \right| &= \left| \frac{tD^s\varphi(x) + D^s\psi(x)}{t\varphi(x) + \psi(x)} \right| \\ &\leq \max \left\{ \left| \frac{tD^s\varphi(x)}{t\varphi(x)} \right|, \left| \frac{D^s\psi(x)}{\psi(x)} \right| \right\} \end{aligned}$$

Como $\sup_{x \in M} \left\| \frac{D^s\varphi(x)}{\varphi(x)} \right\| \leq \kappa c_{r,s}^{r-s}$ e $\sup_{x \in M} \left\| \frac{D^s\psi(x)}{\psi(x)} \right\| \leq \kappa c_{r,s}^{r-s}$, segue então que

$$\sup_{x \in M} \left\| \frac{D^s(t\varphi + \psi)(x)}{(t\varphi + \psi)(x)} \right\| \leq \kappa c_{r,s}^{r-s} \quad \forall \quad 1 \leq s \leq r$$

Logo, $t\varphi + \psi \in \Lambda_\kappa^r$.

Além disso, $\overline{\Lambda_\kappa^r} \cap (\overline{-\Lambda_\kappa^r}) = \{0\}$, pois se $g \in \overline{\Lambda_\kappa^r} \cap (\overline{-\Lambda_\kappa^r})$, segue que existem $l \in \Lambda_\kappa^r$ e $t_n \to 0$ tais que

$$g + lt_n \in \Lambda_\kappa^r \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow g + lt_n > 0 \Rightarrow g \geq 0$$

e existem $u \in -\Lambda_\kappa^r$ e $s_n \to 0$ tais que

$$g + us_n \in -\Lambda_\kappa^r \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow g + us_n < 0 \Rightarrow g \leq 0$$

Logo, $g = 0$.

A partir de agora iremos provar que $\mathcal{L}_{f,\phi}$ tem gap espectral em C^r. Para isso, mostraremos que o cone definido acima é invariante pelo operador de transferência e sua imagem por $\mathcal{L}_{f,\phi}$ possui diâmetro finito.

Para provarmos a invariância do cone, utilizaremos o seguinte lema:

Lema 3.2.1. *Suponha que para todo $\kappa \geq \kappa_1$ e $\max\{i,1\} < r$ temos $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda^i_\kappa) \subset \Lambda^i_{\hat{\lambda}\kappa}$. Se para $\kappa_2 > 0$ e para todo $\varphi \in \Lambda^r_\kappa$ com $\kappa \geq \kappa_2$, temos $\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^r\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right| \leq \kappa$ então existe κ_0 tal que $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda^r_\kappa) \subset \Lambda^r_{\hat{\lambda}\kappa}$ para todo $\kappa \geq \kappa_0$.*

Demonstração. O resultado segue por indução. Seja $\kappa_0 := \max\{\kappa_2, \kappa_1 c(r, r-1)^{1-r}\}$.

Para $r = 1$ é imediato.

Para $r = 2$, seja $\varphi \in \Lambda^2_\kappa$ com $\kappa \geq \kappa_0$. Daí, $\varphi > 0$ e

$$\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D\varphi(x)}{\varphi(x)}\right|\right| \leq c^1_{2,1}\kappa \quad \text{e} \quad \sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^2\varphi(x)}{\varphi(x)}\right|\right| \leq \kappa.$$

Em particular, $\varphi \in \Lambda^1_{c^1_{2,1}\kappa}$. Assim, temos por hipótese que $\mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi) \in \Lambda^1_{\hat{\lambda}\kappa c^1_{2,1}}$, ou seja, $\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D\mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi)(x)}\right|\right| \leq c^1_{2,1}\hat{\lambda}\kappa$.

Além disso, temos também por hipótese que $\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^2\mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi)(x)}\right|\right| \leq \kappa$ para todo $\kappa \geq \kappa_0$. Logo, $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda^2_\kappa) \subset \Lambda^2_{\hat{\lambda}\kappa}$.

Suponha que o resultado seja válido para $r = n-1$, ou seja, $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda^{n-1}_\kappa) \subset \Lambda^{n-1}_{\hat{\lambda}\kappa}$. Mostremos que o resultado também é válido para $r = n$.

De fato, seja $\varphi \in \Lambda^n_\kappa$ com $\kappa \geq \kappa_0$. Sendo assim, $\varphi > 0$ e

$$\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^s\varphi(x)}{\varphi(x)}\right|\right| \leq c^{n-s}_{n,s}\kappa \quad \forall \quad 1 \leq s \leq n.$$

Em particular, $\varphi \in \Lambda^i_{c^{n-i}_{n,i}\kappa}$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$. Assim, temos por hipótese de indução que $\mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi) \in \Lambda^{n-1}_{\hat{\lambda}c^1_{n,n-1}\kappa}$. Isto implica que

$$\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^s\mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi)(x)}\right|\right| \leq c^{n-1-s}_{n-1,s}\hat{\lambda}c^1_{n,n-1}\kappa \quad \forall \quad 1 \leq s \leq n-1.$$

Além disso, temos por hipótese que $\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^n\mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi)(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}(\varphi)(x)}\right|\right| \leq \kappa$ para todo $\kappa \geq \kappa_0$. Logo, $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda^n_\kappa) \subset \Lambda^n_{\hat{\lambda}\kappa}$.

$\square$

Proposição 3.3. *Dadas $f \in \mathcal{D}^r$ e $\phi \in C^r(M, \mathbb{R})$ então existem $\kappa_0 > 0$, $c_{r,s} > 0$ e $\rho \in (0,1)$ tais que $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda^r_\kappa) \subset \Lambda^r_{\rho\kappa} \quad \forall \quad \kappa \geq \kappa_0$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in \Lambda_\kappa^r$, isto implica que $\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi > 0$.

Resta mostrar que $\sup\limits_{x\in M}\left|\left|\dfrac{D^s\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right| \leq \rho\kappa c_{r,s}^{r-s} \quad \forall \quad 1 \leq s \leq r, \quad \kappa \geq \kappa_0$.

A estratégia será provarmos para $r = 1$ e para o caso em que $r > 1$ faremos uso do lema anterior.

Dados $x \in M$ e $H \in T_xM$ com $||H|| = 1$, temos que

$$\frac{|D\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)\cdot H|}{|\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)|} = \frac{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{deg(f)} D(e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x)))\right|}{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{deg(f)} e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))\right|}$$

$$= \frac{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{deg(f)} e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))D\phi(f_j(x))Df_j(x)\cdot H + e^{\phi(f_j(x))}D\varphi(f_j(x))Df_j(x)\cdot H\right|}{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{deg(f)} e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))\right|}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}\frac{|e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))D\phi(f_j(x))Df_j(x)\cdot H|}{|e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))|} &= |D\phi(f_j(x))||Df_j(x)| \\ &\leq ||\phi||_1\sigma^{-1}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{|e^{\phi(f_j(x))}D\varphi(f_j(x))Df_j(x)\cdot H|}{|e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))|} &= \frac{|D\varphi(f_j(x))|}{|\varphi(f_j(x))|}|Df_j(x)| \\ &\leq \kappa\sigma^{-1}\end{aligned}$$

pois $\varphi \in \Lambda_\kappa^1$ e como f é expansora C^r e f_j são os ramos inversos locais de f, temos que $||Df_j||_1 \leq \sigma^{-1}$.

Temos também, da análise na reta, que se $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ tais que $\frac{a_i}{b_i} \leq d \quad \forall \quad i$ então $\frac{\sum a_i}{\sum b_i} \leq d$. Dessa forma,

$$\frac{|D\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)\cdot H|}{|\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)|} \leq ||\phi||_1\sigma^{-1} + \kappa\sigma^{-1}.$$

Logo,

$$\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right| \leq ||\phi||_1\sigma^{-1} + \sigma^{-1}\kappa \quad \forall \quad \kappa \geq \kappa_0$$

.

Agora, note que para que tenhamos $||\phi||_1\sigma^{-1}+\sigma^{-1}\kappa \leq \rho\kappa$ com $\rho \in (0,1)$, basta tomarmos $||\phi||_1\sigma^{-1}=\frac{1-\sigma^{-1}}{2}\kappa$, pois como $\sigma^{-1}<1$ segue que $\frac{1-\sigma^{-1}}{2}+\sigma^{-1}<1$ e portanto

$$\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right| \leq \left(\frac{1-\sigma^{-1}}{2}+\sigma^{-1}\right)\kappa \quad \forall \quad \kappa \geq \kappa_0$$

Assim, tomando $\rho=\frac{1-\sigma^{-1}}{2}+\sigma^{-1}$ e $\kappa_0=\frac{2||\phi||_1\sigma^{-1}}{1-\sigma^{-1}}$, concluímos o resultado para $r=1$.

Verifiquemos agora o caso $r=2$. Seja $\kappa>0$ e $\varphi \in \Lambda^2_\kappa$. Pelas regras de derivação da cadeia e do produto, obtemos

$$\begin{aligned} D^2\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x) = \sum_{j=1}^{deg(f)} \Big(& e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))D^2\phi(f_j(x))[Df_j(x)]^2+ \\ & e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))[D\phi(f_j(x))Df_j(x)]^2+ \\ & e^{\phi(f_j(x))}D\varphi(f_j(x))D\phi(f_j(x))[Df_j(x)]^2+ \\ & e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))D\phi(f_j(x))D^2f_j(x)+ \\ & e^{\phi(f_j(x))}D^2\varphi(f_j(x))[Df_j(x)]^2+ \\ & e^{\phi(f_j(x))}D\varphi(f_j(x))D^2f_j(x)+ \\ & e^{\phi(f_j(x))}D\varphi(f_j(x))D\phi(f_j(x))[Df_j(x)]^2\Big) \end{aligned}$$

Assim, para $x \in M$ e $H \in T_xM$, com $||H||=1$, de forma análoga ao caso $r=1$ temos que

$$\begin{aligned} \left|\left|\frac{D^2\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)\cdot H}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right| \leq & ||D^2\phi||_0\sigma^{-2}+||D\phi||_0^2\sigma^{-2}+||D\phi||_0\sigma^{-2}c^1_{2,1}\kappa+ \\ & ||D\phi||_0||D^2f_j||_0+\sigma^{-2}\kappa+||D^2f_j||_0c^1_{2,1}\kappa+||D\phi||_0\sigma^{-2}c^1_{2,1}\kappa \end{aligned}$$

Agora note que como $(f\circ f_j)(x)=Id(x)=x$, temos então que

$$D(f\circ f_j)(x)=1 \quad \Longleftrightarrow \quad Df(f_j(x))Df_j(x)=1$$

$$\Longrightarrow D^2(f\circ f_j)(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad D^2f(f_j(x))Df_j(x)Df_j(x)+Df(f_j(x))D^2f_j(x)=0$$

$$\Longleftrightarrow D^2f_j(x)=-D^2f(f_j(x))Df_j(x)Df_j(x)[Df(f_j(x))]^{-1}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow ||D^2 f_j(x)||_0 \leq & ||D^2 f(f_j(x))||||Df_j(x)||^2||[Df(f_j(x))]^{-1}|| \\ \leq & ||f||_2\sigma^{-2}\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{D^2\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right| \leq & ||\phi||_2\sigma^{-2} + ||\phi||_2^2\sigma^{-2} + 2||\phi||_2\sigma^{-2}c_{2,1}^1\kappa + \\ & ||\phi||_2 \sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||||f||_2\sigma^{-2} + \sigma^{-2}\kappa + \sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||||f||_2\sigma^{-2}c_{2,1}^1\kappa\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^2\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right| \leq & ||\phi||_2\sigma^{-2}\left(1 + ||\phi||_2 + \sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||||f||_2\right) + \sigma^{-2}\kappa + \\ & \sigma^{-2}c_{2,1}^1\kappa\left(\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||||f||_2 + 2||\phi||_2\right)\end{aligned}$$

Dessa forma, tomando

$$\kappa_0 := \frac{3||\phi||_2\left(1+||\phi||_2+\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||||f||_2\right)}{\sigma^{-1}} \text{ e } c_{2,1}^1 := \frac{\sigma^{-1}}{3\left(\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||||f||_2 + 2||\phi||_2\right)}$$

teremos que

$$\begin{aligned}\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^2\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right| & \leq \frac{\sigma^{-2}\sigma^{-1}}{3}\kappa + \sigma^{-2}\kappa + \frac{\sigma^{-2}\sigma^{-1}}{3}\kappa \\ & \leq \frac{2\sigma^{-3}}{3}\kappa + \sigma^{-2}\kappa \\ & \leq \left(\frac{2\sigma^{-3}}{3} + \sigma^{-2}\right)\kappa \quad \forall\kappa \geq \kappa_0.\end{aligned}$$

Logo, como já vimos que para $r = 1, \mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda_\kappa) \subset \Lambda_{\rho\kappa}$, podemos utilizar a estimativa acima e então lema anterior, existe $\kappa_0 > 0$ tal que $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda_\kappa^2) \subset \Lambda_{\rho\kappa}^2$. Concluímos então o resultado para $r = 2$.

Suponhamos que o resultado é válido para $r = n - 1$, ou seja, $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda_\kappa^i) \subset \Lambda_{\rho\kappa}^i$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$. Mostremos que o resultado vale para $r = n$. Observe que, utilizando as regras de derivação da cadeia e do produto

$$D^n\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x) = \sum_{j=1}^{deg(f)}\sum_{p=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}\left[D^{n-p}(e^{\phi(f_j(x))}) \cdot D^p(\varphi(f_j(x)))\right]$$

Para $x \in M$ e $H \in T_xM$, com $||H|| = 1$, temos que

$$\left|\left|\frac{D^n\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)\cdot H}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right| \leq \max_{j=1,\ldots,deg(f)}\sum_{p=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right)\left|\left|\frac{D^{n-p}(e^{\phi(f_j(x))})\cdot D^p(\varphi(f_j(x)))}{e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))}\right|\right|$$
$$\leq \max_{j=1,\ldots,deg(f)}\sum_{p=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right)\frac{||D^{n-p}(e^{\phi(f_j(x))})||}{e^{\phi(f_j(x))}}\cdot\frac{||D^p(\varphi(f_j(x)))||}{\varphi(f_j(x))}$$

Utilizando a mesma estratégia para $r=2$, verificamos que as parcelas da soma acima dependem apenas das derivadas de φ, ϕ e dos ramos inversos locais de f, que são acotados por cima por $c_{r,s}^{r-s}\kappa$, $||\phi||_r$ e σ^{-1}. Dessa forma, tomamdo κ_0 e as constantes $c_{r,s}^{r-s}$ tais que

$$\max_{j=1,\ldots,deg(f)}\sum_{p=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right)\frac{||D^{n-p}(e^{\phi(f_j(x))})||}{e^{\phi(f_j(x))}}\cdot\frac{||D^p(\varphi(f_j(x)))||}{\varphi(f_j(x))}\leq\rho\kappa,$$

segue então que

$$\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^n\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)\cdot H}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right|\leq\rho\kappa$$

Portanto, pelo lema anterior segue que existe $\kappa_0>0$ tal que $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda_\kappa^n)\subset\Lambda_{\rho\kappa}^n$. Concluímos então o resultado para $r=n$.

□

Como consequência desta proposição, o seguinte corolário nos diz que o cone invariante depende continuamente da dinâmica e do potencial.

Corolário 3.2.2. *Dadas $f\in\mathcal{D}^r$ e $\phi\in C^r(M,\mathbb{R})$, existem vizinhanças $\mathcal{F}^r$ de f e $\mathcal{W}^r$ de ϕ, além de constantes $\kappa>0$, $c_{r,s}>0$ e $\rho\in(0,1)$ tais que: se $(\hat{f},\hat{\phi})\in\mathcal{F}^r\times\mathcal{W}^r$ então $\mathcal{L}_{\hat{f},\hat{\phi}}(\Lambda_\kappa^r)\subset\Lambda_{\rho\kappa}^r$.*

Demonstração. De fato, como f é difeo local se $\hat{f}\in\mathcal{F}^r$, onde $\mathcal{F}^r$ é vizinhança de f temos que os ramos inversos de f e $\hat{f}$ também estão próximos e dessa forma, o σ da expansão pode ser tomado uniforme em $\mathcal{F}^r$. Logo, pelas estimativas encontradas na proposição anterior, para o caso $r=2$,

$$\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right|\leq\left(\frac{1-\sigma^{-1}}{2}+\sigma^{-1}\right)\kappa\quad\forall\quad\kappa\geq\kappa_0$$

e

$$\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^2\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right|\right|\leq\left(\frac{2\sigma^{-3}}{3}+\sigma^{-2}\right)\kappa\quad\forall\kappa\geq\kappa_0,$$

logo ρ pode ser tomado uniforme em vizinhanças de f e ϕ. Analogamente segue o caso r qualquer.

□

A próxima proposição garante que a imagem do cone invariante tem diâmetro finito.

Proposição 3.4. *Dado $0 < \rho < 1$, o cone $\Lambda^r_{\rho\kappa}$ tem diâmetro finito em relação à métrica projetiva induzida em Λ^r_κ.*

Demonstração. Dada $\varphi \in \Lambda^r_{\rho\kappa}$, basta provarmos que $\theta_\kappa(\varphi, 1)$ é uniformemente limitada.

Afirmação 1: $\beta_\kappa(\varphi, 1) \leq \frac{1}{\inf \varphi(1-\rho)}$

De fato, considere $t_0 := \frac{1}{\inf \varphi(1-\rho)}$

Mostremos que $t_0\varphi - 1 \in \Lambda^r_\kappa$. Como $0 < \rho < 1$, temos que $(1-\rho) < 1$, o que implica $t_0\varphi > 1$. Daí, $t_0\varphi - 1 > 0$. Temos também que dados $x \in M$ e $H \in T_xM$ com $||H|| = 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{D^s(t_0\varphi - 1)(x) \cdot H}{(t_0\varphi - 1)(x)}\right|\right| &= \left|\left|\frac{t_0 D^s\varphi(x) \cdot H}{t_0\varphi(x) - 1}\right|\right| \\
&= \frac{t_0||D^s\varphi(x) \cdot H||}{t_0\varphi(x) - 1} \leq \frac{t_0||D^s\varphi(x)||}{t_0\varphi(x) - 1} \\
&= \frac{||D^s\varphi(x)||}{\varphi(x)} \frac{t_0\varphi(x)}{t_0\varphi(x) - 1} \\
&\leq \frac{t_0}{t_0\varphi(x) - 1}\varphi(x)\rho\kappa c^{r-s}_{r,s} \quad \forall \quad 1 \leq s \leq r
\end{aligned}$$

pois $\varphi \in \Lambda^r_{\rho\kappa}$.

Agora, observe que, para que ocorra $\left|\left|\frac{D^s(t_0\varphi - 1)(x) \cdot H}{(t_0\varphi - 1)(x)}\right|\right| \leq \kappa c^{r-s}_{r,s}$ é suficiente que

$$\frac{t_0}{t_0\varphi(x) - 1}\varphi(x)\rho \leq 1, \forall x \in M \Leftrightarrow t_0 \geq \frac{1}{\varphi(x)(1-\rho)}, \forall x \in M \Leftrightarrow t_0 \geq \frac{1}{\inf \varphi(1-\rho)}.$$

Logo, $\sup\limits_{x \in M} \left|\left|\frac{D^s(t_0\varphi - 1)(x)}{(t_0\varphi - 1)(x)}\right|\right| \leq \kappa c^{r-s}_{r,s}$ para todo $1 \leq s \leq r$.

Afirmação 2: $\alpha_\kappa(\varphi, 1) \geq \frac{1}{\sup \varphi(1+\rho)}$

De fato, considere $t_1 := \frac{1}{\sup \varphi(1+\rho)}$

Mostremos que $1 - t_1\varphi \in \Lambda^r_\kappa$. Como $(1+\rho) > 1$ temos que $t_1\varphi < 1$. Daí, $1 - t_1\varphi > 0$. Temos também que dados $x \in M$ e $H \in T_xM$ com $||H|| = 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{D^s(1 - t_1\varphi)(x) \cdot H}{(1 - t_1\varphi)(x)}\right|\right| &\leq \frac{t_1||D^s\varphi(x)||}{1 - t_1\varphi(x)} \\
&= \frac{||D^s\varphi(x)||}{\varphi(x)} \frac{t_1\varphi(x)}{1 - t_1\varphi(x)} \\
&\leq \frac{t_1}{1 - t_1\varphi(x)}\varphi(x)\rho\kappa c^{r-s}_{r,s} \quad \forall \quad 1 \leq s \leq r
\end{aligned}$$

pois $\varphi \in \Lambda^r_{\rho\kappa}$.

De forma análoga ao caso anterior, para que ocorra $\left|\left|\frac{D^s(1-t_1\varphi)(x) \cdot H}{(1-t_1\varphi)(x)}\right|\right| \leq \kappa c^{r-s}_{r,s}$ é suficiente que

$$\frac{t_1}{1 - t_1\varphi(x)}\varphi(x)\rho \leq 1, \forall x \in M \Leftrightarrow t_1 \leq \frac{1}{\varphi(x)(\rho + 1)}, \forall x \in M \Leftrightarrow t_1 \leq \frac{1}{\sup \varphi(\rho + 1)}.$$

Dessa forma, $\sup_{x\in M}\left\|\dfrac{D^s(1-t_1\varphi)(x)}{(1-t_1\varphi)(x)}\right\| \leq \kappa c_{r,s}^{r-s}$ para todo $1 \leq s \leq r$. Isto conclui a afirmação.

Assim, das *Afirmações 1 e 2* temos que

$$\begin{aligned}\theta_\kappa(\varphi,1) &= \log\frac{\beta_\kappa(\varphi,1)}{\alpha_\kappa(\varphi,1)}\\ &\leq \log\frac{\sup\varphi(1+\rho)}{\inf\varphi(1-\rho)}\\ &= \log\frac{\sup\varphi}{\inf\varphi} + \log\frac{1+\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

Como φ é contínua e M é compacto, temos que existem $x, y \in M$ tais que $\sup\varphi = \varphi(x)$ e $\inf\varphi = \varphi(y)$. Daí,

$$\log\frac{\sup\varphi}{\inf\varphi} = \log\frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} = \log(\varphi(x)) - \log(\varphi(y))$$

Como $\log\varphi$ é diferenciável, temos pela desigualdade do valor médio que

$$\log(\varphi(x)) - \log(\varphi(y)) \leq \sup_{z\in M}\{\frac{||D\varphi(z)||}{\varphi(z)}\}d(x,y)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\log\frac{\sup\varphi}{\inf\varphi} + \log\frac{1+\rho}{1-\rho} &\leq \sup_{z\in M}\{\frac{||D\varphi(z)||}{\varphi(z)}\}d(x,y) + \log\frac{1+\rho}{1-\rho}\\ &\leq \rho\kappa diam(M) + \log\frac{1+\rho}{1-\rho} \quad \text{pois} \quad \varphi \in \Lambda^r_{\rho\kappa}\end{aligned}$$

Portanto, $\Lambda^r_{\rho\kappa}$ tem diâmetro finito.

□

Assim, como já vimos a invariância do cone Λ^r_κ pelo operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi}$ e vimos também que a imagem deste cone por $\mathcal{L}_{f,\phi}$ tem diâmetro finito, podemos provar o Gap espectral em C^r. Para isso, lembremos também, que existe uma probabilidade $\nu_{f,\phi}$ tal que $\mathcal{L}^*_{f,\phi}\nu_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$, onde $\lambda_{f,\phi}$ é o raio espectral de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ agindo sobre o espaço das funcões contínuas. Fixemos então $\nu_{f,\phi}$ uma probabilidade com essa propriedade e denotemos $\frac{\mathcal{L}_{f,\phi}}{\lambda_{f,\phi}} := \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}$.

Teorema 3.3. *(Gap espectral). Dada $f \in \mathcal{D}^r$ e $\phi \in C^r(M,\mathbb{R})$ existe um $0 < \lambda_0 < \lambda_{f,\phi}$ tal que $\mathcal{L}_{f,\phi|_{C^r}} : C^r(M,\mathbb{C}) \to C^r(M,\mathbb{C})$ admite uma decomposição do seu espectro dada por: $spec(\mathcal{L}_{f,\phi|_{C^r}}) = \{\lambda_{f,\phi}\} \sqcup \Sigma_0$, onde $\Sigma_0 \subset B(0,\lambda_0)$ e $\lambda_{f,\phi}$ é autovalor com autoespaço unidimensional.*

Demonstração. Faremos a prova em três etapas. Inicialmente mostraremos que $\lambda_{f,\phi}$ é autovalor de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ com autoespaço unidimensional.

Considere $\kappa_0 > 0, c_{r,s} > 0$ e $\rho \in (0,1)$ dados pela proposição (3.3). Sejam $\varphi, \psi \in \Lambda^r_{\kappa_0}$ e θ_+ a métrica projetiva associada ao cone das funções positivas.

Temos pela proposição anterior que o cone $\Lambda^r_{\rho\kappa_0}$ tem diâmetro finito em relação à métrica projetiva induzida em $\Lambda^r_{\kappa_0}$. Assim, pelo Teorema (1.5) e pelo fato que $C_+ \supset \Lambda^r_{\kappa_0}$ temos que para $n, l \geq 1$

$$\begin{aligned}
\theta_+(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\psi) &\leq \theta_{\rho\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\psi) \\
&\leq (1-e^{-D})^{n-1}\theta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{l+1}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}\psi) \quad \forall \quad \varphi, \psi \in \Lambda^r_{\kappa_0} \\
&\leq (1-e^{-D})^{n-1}D
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde D é o diâmetro do cone $\Lambda^r_{\rho\kappa_0}$ na métrica projetiva de $\Lambda^r_{\kappa_0}$.

Isto implica que $(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi)_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy com relação a θ_+. Como θ_+ é completa, temos que existe $h_\varphi \in C_+$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi \xrightarrow{\theta_+} h_\varphi$ e como θ_+ não distingue múltiplos, existe $t > 0$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi \xrightarrow{\theta_+} th_\varphi$. Dessa forma, podemos tomar $t = \frac{\int \varphi d\nu_{f,\phi}}{\int h_\varphi d\nu_{f,\phi}}$. Logo, $\int h_\varphi d\nu_{f,\phi} = \int \varphi d\nu_{f,\phi}$.

Assim, como $\int \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi d\nu_{f,\phi} = \int \varphi d\nu_{f,\phi} = \int h_\varphi d\nu_{f,\phi}$, tomando, no Corolário (1.5.1), $||\cdot||_1 =$ semi-norma da integral e $||\cdot||_2 =$ norma do sup, temos que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi \xrightarrow{C^0} h_\varphi$. Logo, $\mathcal{L}_{f,\phi}h_\varphi = \lambda_{f,\phi}h_\varphi$, pois

$$\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}h_\varphi = \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}\lim_{n\to\infty}\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi = \lim_{n\to\infty}\tilde{\mathcal{L}}^{n+1}_{f,\phi}\varphi = h_\varphi$$

Conclusão: $\lambda_{f,\phi}$ é autovalor de $\mathcal{L}_{f,\phi}$.

Agora mostraremos que a convergência de $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi$ a h_φ também ocorre na norma C^r.

Afirmação: Se $\varphi \in \Lambda^r_{\kappa_0}$ então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi - h_\varphi||_r \leq D(1-e^{-D})^{n-1}[\kappa_0(e^D+2)+e^D]||h_\varphi||_\infty$$

De fato, pela Proposição (1.3) com a norma do sup e em $\nu_{f,\phi}$, e por (3.1) temos que

$$\begin{aligned}
||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi - \tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi||_\infty &\leq (e^{\theta_+(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi)} - 1)||\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi||_\infty \\
&\leq \theta_+(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi)e^D||\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi||_\infty \\
&\leq (1-e^{-D})^{n-1}De^D||\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi||_\infty
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora, observe que como $\beta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi) = \inf\{t > 0; \quad t\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi - \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi \in \Lambda^r_{\kappa_0}\}$ e $\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi$ são funções contínuas estritamente positivas, segue que

$$t\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi - \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi > \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi$$

E como $\int \tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi d\nu_{f,\phi} = \int \varphi d\nu_{f,\phi} = \int \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi d\nu_{f,\phi}$, temos então que

$$t\int \tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi d\nu_{f,\phi} \geq \int \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi d\nu_{f,\phi}$$

Isto implica que $t \geq 1$.

De forma análoga, como $\alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi) = \sup\{t > 0; \quad \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi - t\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi \in \Lambda^r_{\kappa_0}\}$, segue que $t \leq 1$.

Logo,

$$\beta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi) \geq 1 \geq \alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)$$

Daí,

$$\theta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi) = \log\frac{\beta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)}{\alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)} \leq D(1-e^{-D})^{n-1}$$

Mas, note que $\log\frac{\beta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)}{\alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)} = \log(\beta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)) - \log(\alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi))$.

Assim, pelo teorema do valor médio na reta, temos que existe $x \in (\alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi), \beta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi))$ tal que

$$\begin{aligned}
\log\frac{\beta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)}{\alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)} &= \frac{1}{x}|\beta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi) - \alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)| \\
&\geq \frac{1}{\beta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)}|\beta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi) - \alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)| \\
&= \left|1 - \frac{\alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)}{\beta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)}\right| \\
&\geq |1 - \alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)|
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$|1 - \alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)| \leq D(1-e^{-D})^{n-1} \tag{3.3}$$

Logo, usando as estimativas (3.2) e (3.3), segue que

$$\begin{aligned}
||D^s(\tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi - \tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi)||_\infty = {} & ||D^s[\tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi - \alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)\cdot\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi + \\
& \alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)\cdot\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi - \tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi]||_\infty \\
\leq {} & ||D^s[\tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi - \alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)\cdot\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi]||_\infty + \\
& ||D^s(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi)||_\infty|\alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi) - 1| \\
\leq {} & c^{r-s}_{r,s}\kappa_0||\tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi - \alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi)\cdot\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi||_\infty + \\
& ||D^s(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi)||_\infty|\alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}^{n+l}_{f,\phi}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}^{n}_{f,\phi}\varphi) - 1|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c_{r,s}^{r-s}\kappa_0\left(||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}\varphi - \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+l}\varphi||_\infty + |1-\alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+l}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}\varphi)|||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+l}\varphi||_\infty\right)+\\
&\quad c_{r,s}^{r-s}\kappa_0||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+l}\varphi||_\infty|\alpha_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+l}\varphi, \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}\varphi)-1|\\
&\leq c_{r,s}^{r-s}\kappa_0\left(||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}\varphi - \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+l}\varphi||_\infty + ||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+l}\varphi||_\infty 2D(1-e^{-D})^{n-1}\right)\\
&\leq c_{r,s}^{r-s}\kappa_0\left[(1-e^{-D})^{n-1}De^{D}||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+l}\varphi||_\infty + ||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+l}\varphi||_\infty 2D(1-e^{-D})^{n-1}\right]\\
&\leq c_{r,s}^{r-s}\kappa_0(1-e^{-D})^{n-1}D||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+l}\varphi||_\infty(e^{D}+2) \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Como $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}\varphi$ converge uniformemente, utilizando as estimativas (3.2) e (3.4) e fazendo $l \to +\infty$, segue que $(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n})_n$ é Cauchy em C^r e

$$
||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}\varphi - h_\varphi||_r \leq D(1-e^{-D})^{n-1}[\kappa_0(e^{D}+2)+e^{D}]||h_\varphi||_\infty \qquad (3.5)
$$

Decorre então, da afirmação, que $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}\varphi$ converge para h_φ na norma C^r e $h_\varphi \in \Lambda_{\kappa_0}^{r}$, pois como $h_\varphi \in C_+$, segue que $h_\varphi > 0$ e além disso, temos

$$
\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^s\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}\varphi(x)\cdot H}{\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}\varphi(x)}\right|\right| \leq c_{r,s}^{r-s}\kappa \quad \forall \quad 1\leq s\leq r, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}\varphi \xrightarrow{C^r} h_\varphi \quad \text{e} \quad D^s\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}\varphi \xrightarrow{C^r} D^s h_\varphi
$$

Assim, $\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^s h_\varphi(x)\cdot H}{h_\varphi(x)}\right|\right| \leq c_{r,s}^{r-s}\kappa \quad \forall \quad 1\leq s\leq r.$

Agora mostraremos que $Ker(\mathcal{L}_{f,\phi}-\lambda_{f,\phi}I)\cap C^r(M,\mathbb{C})$ tem dimensão 1. Para isso, analisaremos três situações: (i) $g\in Ker(\mathcal{L}_{f,\phi}-\lambda_{f,\phi}I)\cap\Lambda_{\kappa_0}^{r}$, (ii) $g\in Ker(\mathcal{L}_{f,\phi}-\lambda_{f,\phi}I)\cap C^r(M,\mathbb{R})$ e (iii) $g\in Ker(\mathcal{L}_{f,\phi}-\lambda_{f,\phi}I)\cap C^r(M,\mathbb{C})$.

(i) Defina $h_{f,\phi} := \lim_{n\to+\infty}\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}(1)$. Assim, $\int h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi}=1$. Seja $g\in Ker(\mathcal{L}_{f,\phi}-\lambda_{f,\phi}I)\cap\Lambda_{\kappa_0}^{r}$. Daí, $\mathcal{L}_{f,\phi}g=\lambda_{f,\phi}g$ e existe $t_1>0$ tal que $g=t_1h_{f,\phi}$, pois como $h_{f,\phi}$ também é autovetor associado a $\lambda_{f,\phi}$ e por (3.1), temos

$$
\theta_{\kappa_0}(g,h_{f,\phi})=\theta_{\kappa_0}(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}(g),\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n}(1))\leq(1-e^{-D})^{n-1}D\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.
$$

Dessa forma, $t_1=\int t_1h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi}=\int gd\nu_{f,\phi}$. Logo, $g=\int gd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}$.

(ii) Se $g\in Ker(\mathcal{L}_{f,\phi}-\lambda_{f,\phi}I)\cap C^r(M,\mathbb{R})$, existe $B>0$ tal que $g+B\in\Lambda_{\kappa_0}^{r}$. De fato, tome $B\geq\frac{||D^sg||_\infty-\inf g\min\{c_{r,s}^{r-s}\}\kappa}{\min\{c_{r,s}^{r-s}\}\kappa}$. Assim, $g+B>0$ e

$$
||D^sg||_\infty-\inf g\min\{c_{r,s}^{r-s}\}\kappa\leq B\min\{c_{r,s}^{r-s}\}\kappa \iff ||D^sg||_\infty\leq(\inf g+B)\min\{c_{r,s}^{r-s}\}\kappa
$$

$$
\iff \frac{||D^sg||_\infty}{\inf g+B}\leq\min\{c_{r,s}^{r-s}\}\kappa \iff \sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^sg(x)}{g(x)+B}\right|\right|\leq c_{r,s}^{r-s}\kappa \quad \forall \quad 1\leq s\leq r.
$$

Logo,

$$g = \lim_{n\to+\infty} \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(g) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(g+B-B)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(g+B) - \lim_{n\to+\infty} \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(B)$$
$$= \int (g+B)d\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi} - \int Bd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi} = \int gd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}$$

(iii) Se $g \in Ker(\mathcal{L}_{f,\phi} - \lambda_{f,\phi}I)\cap C^r(M,\mathbb{C})$, temos que $g = g_1 + ig_2$ e note que $g_1, g_2 \in Ker(\mathcal{L}_{f,\phi} - \lambda_{f,\phi}I)\cap C^r(M,\mathbb{R})$, pois como $\lambda_{f,\phi}\in\mathbb{R}$ e $\mathcal{L}_{f,\phi}g = \lambda_{f,\phi}g$, temos que

$$\lambda_{f,\phi}g_1 + i\lambda_{f,\phi}g_2 = \lambda_{f,\phi}(g_1+ig_2) = \lambda_{f,\phi}g = \mathcal{L}_{f,\phi}g = \mathcal{L}_{f,\phi}(g_1+ig_2) = \mathcal{L}_{f,\phi}(g_1) + i\mathcal{L}_{f,\phi}(g_2)$$

Assim, pelo item (ii), temos que

$$g = \int g_1 d\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi} + i\int g_2 d\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi} = \int (g_1+ig_2)d\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi} = \int gd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}$$

Portanto, $Ker(\mathcal{L}_{f,\phi|C^r} - \lambda_{f,\phi}I) = \{th_{f,\phi}; t\in\mathbb{C}\}$.

Nosso segundo objetivo é mostrar que $spec(\mathcal{L}_{f,\phi|_{C^r}}) = \{\lambda_{f,\phi}\}\sqcup\{\Sigma_0\}$. Para isso, defina $E_1 = Ker(\mathcal{L}_{f,\phi|C^r} - \lambda_{f,\phi}I) = \{th_{f,\phi}; t\in\mathbb{C}\}$ e $E_0 = \{\varphi\in C^r(M,\mathbb{C}); \int\varphi d\nu_{f,\phi} = 0\}$.

Note que E_1, E_0 são subespaços fechados e invariantes por $\mathcal{L}_{f,\phi}$. E_1 por definição e E_0 pois dada $\varphi\in E_0$, temos que

$$0 = \int\varphi d\nu_{f,\phi} = \int \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi d\nu_{f,\phi}$$

e dada $\psi_n\in E_0$ sequência de funções tais que ψ_n converge para ψ. Note que $\psi\in E_0$, pois $\int\psi d\nu_{f,\phi} = \int\lim\psi_n d\nu_{f,\phi} = \lim\int\psi_n d\nu_{f,\phi} = 0$.

Note também que $C^r(M,\mathbb{C}) = E_1\oplus E_0$, pois dada $g\in C^r(M,\mathbb{C})$, temos que $g = \int gd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi} + g - \int gd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}$, onde $\int gd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}\in E_1$ e $g - \int gd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}\in E_0$, pois

$$\int (g - \int gd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi})d\nu_{f,\phi} = \int \Big(\int gh_{f,\phi}d\nu_{f,\phi} - \int gd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}\Big)d\nu_{f,\phi} = 0$$

Temos também que se $g\in E_1\cap E_0$, então $g = th_{f,\phi}$ e $\int gd\nu_{f,\phi} = 0$. Isto implica que $t = \int th_{f,\phi}d\nu_{f,\phi} = \int gd\nu_{f,\phi} = 0$. Logo, $g\equiv 0$.

Assim, da teoria espectral sabemos que $spec(\mathcal{L}_{f,\phi|_{C^r}}) = spec(\mathcal{L}_{f,\phi|_{E_1}})\cup spec(\mathcal{L}_{f,\phi|_{E_0}})$. Como $spec(\mathcal{L}_{f,\phi|_{E_1}}) = \{\lambda_{f,\phi}\}$, defina $spec(\mathcal{L}_{f,\phi|_{E_0}}) := \Sigma_0$ então segue que $spec(\mathcal{L}_{f,\phi|_{C^r}}) = \{\lambda_{f,\phi}\}\sqcup\Sigma_0$.

Resta então mostrar que $spec(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi|_{E_0}})\subset B(0,\lambda_1)$, com $0<\lambda_1<1$. Sabemos da teoria espectral que $r(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi|_{E_0}}) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi|_{E_0}}||}$, onde $r(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi|_{E_0}})$ é o raio espectral do operador $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}$ restrito a E_0.

Dotemos E_0 da norma C^r. Dada $\varphi \in E_0 \cap C^r(M, \mathbb{R})$ com $||\varphi||_r = 1$. Note que $\varphi + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}} \in \Lambda_{\kappa_0}^r$, pois como $|\varphi|_\infty \leq 1$, temos que $-1 \leq \varphi(x) \leq 1 \quad \forall \quad x \in M$. Isto implica que $\varphi(x) + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}} > 0$ e que, dado $H \in T_xM$

$$\frac{||D^s(\varphi + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}})(x) \cdot H||}{\varphi(x) + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}} = \frac{|D^s\varphi(x) \cdot H|}{\varphi(x) + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}} \leq \frac{1}{\varphi(x) + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}}$$

Como $\varphi(x) + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}} \geq \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}$ segue que

$$\sup_{x \in M} \frac{||D^s(\varphi + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}})(x) \cdot H||}{\varphi(x) + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}} \leq c_{r,s}^{r-s}\kappa_0 \quad \forall \quad 1 \leq s \leq r.$$

Assim pela afirmação e pelo que foi discutido anteriormente, temos que $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\left(\varphi + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\right) \xrightarrow{C^r} \int \left(\varphi + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\right) d\nu_{f,\phi} \cdot h_{f,\phi}$. Isto implica que $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\left(\varphi + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\right) \xrightarrow{C^r} \int \left(1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\right) d\nu_{f,\phi} \cdot h_{f,\phi} = \left(1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\right) \cdot h_{f,\phi}$. Daí,

$$\begin{aligned}
||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\varphi||_r &= ||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\left(\varphi + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\right) - \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\left(1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\right)||_r \\
&\leq ||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\left(\varphi + 1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\right) h_{f,\phi}||_r \qquad (3.6)\\
&+ ||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\left(1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\right) h_{f,\phi}||_r \\
&\leq D(1 - e^{-D})^{n-1}[\kappa_0(e^D + 2) + e^D]2(1 + \frac{1}{\kappa_0 \min\{c_{r,s}^{r-s}\}})||h_{f,\phi}||_\infty \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

E se $\varphi \in E_0 \cap C^r(M, \mathbb{C})$, segue que $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ com $\varphi_1, \varphi_2 \in E_0 \cap C^r(M, \mathbb{R})$. Dessa forma,

$$||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\varphi||_r = ||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n(\varphi_1 + i\varphi_2)||_r = ||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\varphi_1 + i\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\varphi_2||_r \leq ||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\varphi_1||_r + ||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n\varphi_2||_r$$

Logo,

$$\begin{aligned}
r(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi|_{E_0}}) &= \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi|_{E_0}}^n||} \\
&\leq \lim_{n \to +\infty} \left(D(1 - e^{-D})^{n-1}[\kappa_0(e^D + 2) + e^D]2(1 + \frac{1}{\kappa_0})||h_{f,\phi}||_\infty\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= (1 - e^{-D}) \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Assim, $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi|_{E_0}}^n$ é uma contração na norma C^r para n suficientemente grande. Portanto, $spec(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi|_{E_0}}) \subset B(0, \lambda_1)$, com $0 < \lambda_1 < 1$. E assim, finalizamos a prova do teorema.

□

Veremos também que as aplicações $(f,\phi)\mapsto\lambda_{f,\phi}\in\mathbb{R}$ e $(f,\phi)\mapsto h_{f,\phi}\in C^0(M,\mathbb{R})$ são contínuas. Para isso, definamos norma Holder local e provemos inicialmente que o cone das funções Holder definido a seguir, também é deixado invariante pelo operador de transferência.

Dado um $\delta>0$, $\alpha\in(0,1)$, definimos a norma Holder local de $\varphi\in C^\alpha(M,\mathbb{R})$ por $|\varphi|_{\alpha,\delta}:=\sup\limits_{0<d(x,y)<\delta}\dfrac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{d(x,y)^\alpha}$. Como M é compacto e conexo, a norma Holder global pode ser estimada a partir da norma Holder local, ou seja, existe um $m\geq 1$ que só depende de δ tal que $|\cdot|_\alpha\leq m|\cdot|_{\alpha,\delta}$.

Proposição 3.5. *Para $\alpha\in(0,1)$, $\kappa>0$ e $\delta>0$, defina $\Lambda^\alpha_{\kappa,\delta}:=\{\varphi\in C^\alpha(M,\mathbb{R});\quad \varphi>0\quad e\quad |\log\varphi|_{\alpha,\delta}\leq\kappa\}$. Dados $f\in\mathcal{D}^r$ e $\phi\in C^\alpha(M,\mathbb{R})$ existem $\kappa_0>0$, $\delta_0>0$ e $\rho\in(0,1)$ tais que $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda^\alpha_{\kappa,\delta})\subset\Lambda^\alpha_{\kappa,\delta}$, para todo $\kappa\geq\kappa_0$ e $0<\delta\leq\delta_0$.*

Demonstração. Seja $\delta>0$ tal que os ramos inversos locais de f estão definidos em bolas de raio $\frac{\delta}{2}$. Seja $\varphi\in\Lambda^\alpha_{\kappa,\delta}$. Assim, $\varphi>0$, com isso, $\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi>0$. Além disso, dados $x,y\in M$ com $0<d(x,y)<\delta$ temos que

$$\begin{aligned}\log\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)-\log\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(y)&=\log\frac{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(y)}\\&=\log\frac{\sum_{j=1}^{deg(f)}e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))}{\sum_{j=1}^{deg(f)}e^{\phi(f_j(y))}\varphi(f_j(y))}\end{aligned}$$

Agora observe que como $\varphi\in\Lambda^\alpha_{\kappa,\delta}$, temos que para todo $x,y\in M$ com $d(x,y)<\delta$

$$\log\varphi(x)-\log\varphi(y)\leq\kappa d(x,y)^\alpha\iff\log\frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}\leq\kappa d(x,y)^\alpha\iff\frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}\leq e^{\kappa d(x,y)^\alpha}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\frac{e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))}{e^{\phi(f_j(y))}\varphi(f_j(y))}&\leq e^{\phi(f_j(x))-\phi(f_j(y))}e^{\kappa d(f_j(x),f_j(y))^\alpha}\\&\leq e^{|\phi|_{\alpha,\delta}d(f_j(x),f_j(y))^\alpha}e^{\kappa\sigma^{-\alpha}d(x,y)^\alpha}\\&\leq e^{|\phi|_{\alpha,\delta}\sigma^{-\alpha}d(x,y)^\alpha+\kappa\sigma^{-\alpha}d(x,y)^\alpha}\end{aligned}$$

Segue então da análise que $\dfrac{\sum_{j=1}^{deg(f)}e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))}{\sum_{j=1}^{deg(f)}e^{\phi(f_j(y))}\varphi(f_j(y))}\leq e^{|\phi|_{\alpha,\delta}\sigma^{-\alpha}d(x,y)^\alpha+\kappa\sigma^{-\alpha}d(x,y)^\alpha}$.

Dessa forma,

$$\log \frac{\sum_{j=1}^{deg(f)} e^{\phi(f_j(x))}\varphi(f_j(x))}{\sum_{j=1}^{deg(f)} e^{\phi(f_j(y))}\varphi(f_j(y))} \leq \left(|\phi|_{\alpha,\delta}\sigma^{-\alpha} + \kappa\sigma^{-\alpha}\right) d(x,y)^{\alpha}$$

Logo, $|\log \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi|_{\alpha,\delta} \leq |\phi|_{\alpha,\delta}\sigma^{-\alpha} + \kappa\sigma^{-\alpha}$. Tomando $\kappa_0 := \frac{2|\phi|_{\alpha,\delta}}{\sigma^{\alpha}-1}$ teremos que $|\log \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi|_{\alpha,\delta} \leq \left(\frac{1-\sigma^{-\alpha}}{2}\right)\kappa$ para todo $\kappa \geq \kappa_0$. Portanto, $\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi \in \Lambda^{\alpha}_{\rho\kappa}$.

$\square$

Como $1 \in \Lambda^{\alpha}_{\kappa,\delta}$, temos pela proposição anterior que $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}(1) \in \Lambda^{\alpha}_{\rho\kappa,\delta}$. Assim, $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1) \in \Lambda^{\alpha}_{\rho\kappa,\delta}$. Isto implica que dados $x, y \in M$

$$\log \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)(x) - \log \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)(y) \leq \kappa d(x,y)^{\alpha}$$

Dessa forma, existe $y \in M$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)(y) = 1$. Assim, substituindo na desigualdade acima, temos que

$$\log \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)(x) - \log 1 \leq \kappa d(x,y)^{\alpha} \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)(x) \leq e^{\kappa diam(M)^{\alpha}}$$

De forma análoga, obtemos $\log 1 - \log \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)(x) \leq \kappa d(x,y)^{\alpha}$. E assim, $e^{-\kappa diam(M)^{\alpha}} \leq \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)(x)$.

Segue também, da estimativa da proposição, que se perturbarmos a dinâmica e o potencial o mesmo cone é preservado com a mesma taxa. Logo, existem a, b que podem ser tomados uniforme em vizinhanças de f e ϕ tais que $0 < a \leq \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)(x) \leq b < +\infty$. Isto implica que

$$0 < a \leq \int \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1) d\nu_{f_0,\phi_0} \leq b \Rightarrow \lambda^n_{f,\phi} a \leq \int \mathcal{L}^n_{f,\phi}(1) d\nu_{f_0,\phi_0} \leq \lambda^n_{f,\phi} b$$

$$\Rightarrow n \log \lambda_{f,\phi} + \log a \leq \log \int \mathcal{L}^n_{f,\phi}(1) d\nu_{f_0,\phi_0} \leq n \log \lambda_{f,\phi} + \log b$$

$$\Rightarrow \log \lambda_{f,\phi} + \frac{1}{n}\log a \leq \frac{1}{n}\log \int \mathcal{L}^n_{f,\phi}(1) d\nu_{f_0,\phi_0} \leq \log \lambda_{f,\phi} + \frac{1}{n}\log b$$

Assim, $\frac{1}{n}\log \int \mathcal{L}^n_{f,\phi}(1) d\nu_{f_0,\phi_0}$ converge uniformemente para $\lambda_{f,\phi}$ quando n tende ao infinito. Temos da análise que dada g_n sequência de funções contínuas, se g_n converge uniformemente para g, então g é contínua. Portanto, $\lambda_{f,\phi}$ é contínua com respeito a f e a ϕ. Da mesma maneira, fazendo n ir para o infinito em $0 < a \leq \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)(x) \leq b < +\infty$ temos que $h_{f,\phi}$ é uniformemente limitado numa vizinhança de f e ϕ. Assim, pela estimativa (3.5) do teorema do gap espectral segue que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)$ converge uniformemente para $h_{f,\phi}$. Logo, pelo mesmo argumento usado para $\lambda_{f,\phi}$, concluímos que $h_{f,\phi}$ também é contínua com respeito a f e a ϕ.

O próximo resultado nos garante a uniformidade no gap espectral.

Corolário 3.3.1. *Dada $f \in \mathcal{D}^r$ e $\phi \in C^r(M, \mathbb{R})$, existem vizinhanças $\mathcal{F}^r$ de f e $\mathcal{W}^r$ de ϕ, além de constantes $k \geq 0$ e $\tau \in (0,1)$, onde $\tau := (1 - e^{-D})$, tal que: se $(\hat{f}, \hat{\phi}) \in \mathcal{F}^r \times \mathcal{W}^r$ então dado $\varphi \in C^r(M, \mathbb{R})$ temos*

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{\hat{f},\hat{\phi}}\varphi - \int \varphi d\nu_{\hat{f},\hat{\phi}} \cdot h_{\hat{f},\hat{\phi}}||_r \leq k\tau^n ||\varphi||_r.$$

Demonstração. Decorre da estimativa

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi - h_\varphi||_r \leq D(1 - e^{-D})^{n-1}[\kappa_0(e^D + 2) + e^D]||h_\varphi||_\infty,$$

dada pelo teorema do gap spectral e do fato que $h_{f,\phi}$ é contínuo em relação a f e ϕ.

□

Decorre também do gap espectral uniforme o seguinte resultado:

Corolário 3.3.2. *A aplicação $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto h_{f,\phi} \in C^{r-1}(M, \mathbb{R})$ é contínua.*

Demonstração. De fato, fixe $(f_0, \phi_0) \in D^r \times C^r(M, \mathbb{R})$. Pelo gap espectral uniforme temos que

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}1 - h_{f,\phi}||_r \leq k\tau^n \quad \forall \quad (f, \phi) \in \mathcal{F}^r \times \mathcal{W}^r$$

Daí, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}1 - h_{f,\phi}||_r < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \quad (f, \phi) \in \mathcal{F}^r \times \mathcal{W}^r$$

Assim, pela proposição (3.2), e pelo fato que $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto \lambda_{f,\phi}$ é contínua temos que existe uma vizinhança $V \subset \mathcal{F}^r \times \mathcal{W}^r$ de (f_0, ϕ_0) tal que se $f \in V$

$$||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}1 - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f_0,\phi}1||_{r-1} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Logo, dados $(f, \phi) \in V$

$$||h_{f,\phi} - h_{f_0,\phi}||_{r-1} \leq ||h_{f,\phi} - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}1||_{r-1} + ||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}1 - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f_0,\phi}1||_{r-1} + ||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f_0,\phi}1 - h_{f_0,\phi}||_{r-1} < \varepsilon$$

Portanto, $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto h_f \in C^{r-1}(M, \mathbb{R})$ é contínua em (f_0, ϕ_0).

□

3.3 Diferenciabilidade com respeito a dinâmica

Agora estamos aptos a provar a diferenciabilidade de $\lambda_{f,\phi}$, $\mu_{f,\phi}$ e $h_{f,\phi}$ com respeito à dinâmica, pois veremos que o gap espectral uniforme implicará as hipóteses de [[GL06], teorema 8.1]. Lembremos então o contexto de [[GL06], teorema 8.1].

Seja $r \geq 2$, $\mathcal{B}^0 \supset \mathcal{B}^1 \supset \cdots \supset \mathcal{B}^r$ espaços de Banach. I variedade de Banach e $\{A_t\}_{t\in I}$ uma família de operadores lineares limitados agindo nos espaços de Banach $\mathcal{B}^i$ tais que $I \ni t \mapsto A_t \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^0)$ é contínuo, onde $\mathcal{L}(\mathcal{B}^i, \mathcal{B}^{i-j})$ é o espaço de operadores lineares limitados de $\mathcal{B}^i$ em $\mathcal{B}^{i-j}$. Além disso, suponha que

$$\exists \quad M > 0, \quad \forall \quad t \in I, \quad \forall \quad g \in \mathcal{B}^0, \quad ||A_t^n g||_{\mathcal{B}^0} \leq CM^n ||g||_{\mathcal{B}^0} \tag{3.9}$$

e

$$\exists \quad \alpha < M, \quad \forall \quad t \in I, \quad ||A_t^n||_{\mathcal{B}^1} \leq C\alpha^n ||g||_{\mathcal{B}^1} + CM^n ||g||_{\mathcal{B}^0} \tag{3.10}$$

Suponha também que para $j = 1, \cdots, r-1$ existe a j-ésima derivada da aplicação $I \ni t \mapsto A_t \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^r, \mathcal{B}^{r-j})$. Denotando esta aplicação por Q_j, assumamos que para todo $i \in [j, r]$, temos que Q_i é aplicação limitada de I em $\mathcal{L}(\mathcal{B}^i, \mathcal{B}^{i-j})$. Com estas hipóteses, o teorema 8.1 de [GL06] nos diz que:

Teorema 3.4. *Para $\varrho > \alpha$ e $\delta > 0$, denote por $V_{\varrho,\delta}$ o conjunto dos números complexos z tal que $|z| \geq \varrho$ e, para todo $1 \leq k \leq r$, suponha que a distância de z ao espectro de $A_{t|_{\mathcal{B}^k}}$ é maior ou igual a δ. Então, a aplicação $I \times V_{\varrho,\delta} \ni (t, z) \mapsto (zI - A_t)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^r, \mathcal{B}^0)$ é C^{r-1} e fixado t, a forma como os restos da C^{r-1}-diferenciabilidade vão a 0 é uniforme em relação a z.*

Mostraremos agora a diferenciabilidade do operador de transferência em relação à dinâmica no sentido fraco. Para isso, utilizaremos o resultado de diferenciabilidade dos ramos inversos locais de f.

Lema 3.4.1. *Seja $r \geq 1$, $0 \leq k \leq r$ e $f \in \mathcal{D}^r$. Seja $B = B(x, \delta) \subset M$ alguma bola tal que os ramos inversos $f_1, \cdots, f_s : B \to M$ são difeomorfismos bem definidos em suas imagens. Então*

$$\mathcal{D}^r \ni f \mapsto (f_1, \cdots, f_s) \in C^{r-k}$$

é C^k.

Demonstração. Inicialmente, defina $F : C^r(M, M) \times [C^{r-k}(B, M)]^s \to [C^{r-k}(B, M)]^s$ dada por

$$F(h, h_1, \cdots, h_s) = (h \circ h_1, \cdots, h \circ h_s)$$

Note que F é C^k, pois por um lado, dado o incremento $H \in T(C^r(M, M))$, $\partial_h F.H = (h_1 \circ H, \cdots, h_s \circ H)$ é C^∞.

Por outro lado, pelo teorema 4.2 em [Fr79], temos que a aplicação composição $h_i \mapsto h \circ h_i \in C^{r-k}$ é C^k. E pelo corolário 4.2 em [Fr79] segue que sua derivada atuando em $H = (H_1, \cdots, H_s) \in T[C^{r-k}(B, M)]^s$ é dada por $\partial_{h_i} F \cdot H_i = h' \circ h_i \cdot H_i$, que é uma aplicação C^{k-1}, pois é a composição de aplicações C^{k-1}.

Dessa forma, dados f expansora C^r e $f_1, \cdots, f_s$ seus ramos inversos locais, temos que $F(f, f_1, \cdots, f_s) = (id, \cdots, id)$ e além disso,

$$\partial_{f_i} F(f, f_1, \cdots, f_s) \cdot H = (f' \circ f_1 \cdot H_1, \cdots, f' \circ f_s \cdot H_s).$$

Como f é um difeomorfismo local, então $\partial_{f_i} F \cdot H_i$ é um isomorfismo, logo $[f' \circ f_i(x)]$ é invertível para todo $x \in M$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, temos que a aplicação $G : C^r(M, M) \to [C^{r-k}(B, M)]^s$ que associa $f \mapsto (f_1, \cdots, f_s)$ é C^k.

$\square$

Observações.: Denotaremos a diferencial de $f \mapsto f_j$ por $T_j|_f$.

Proposição 3.6. *Seja $r \geq 1, 1 \leq k \leq r$, $Diff_{loc}(M, M)$ o espaço de C^r-difeomorfismos locais em uma variedade Riemanniana compacta e conexa M e $\phi \in C^r(M, \mathbb{R})$ algum potencial fixado. Então a aplicação*

$$\begin{array}{ccc} Diff_{loc}(M, M) & \longrightarrow & \mathcal{L}(C^r(M, \mathbb{R}), C^{r-k}(M, \mathbb{R})) \\ \\ f & \longmapsto & \mathcal{L}_{f,\phi} \end{array}$$

é C^k.

Demonstração. Considere $B_1, \cdots, B_l$ uma cobertura finita de M por bolas com raio menor ou igual a $\delta > 0$. Tomemos $\{\varphi_j; \quad j = 1, \cdots, l\}$ uma partição da unidade C^∞ associada a esta cobertura.

Defina os operadores auxiliares $\mathcal{L}_{j,f,\phi} := \mathcal{L}_{f,\phi} \cdot \varphi_j$. Decorre daí que, $\mathcal{L}_{f,\phi} = \sum_{j=1}^{l} \mathcal{L}_{j,f,\phi}$. Assim, basta mostrarmos que cada operador $\mathcal{L}_{j,f,\phi}$ é C^k.

Dado $g \in C^r(M, \mathbb{R})$, mostremos que a aplicação $f \mapsto \mathcal{L}_{j,f,\phi}(g)$ é C^k. Seja $f_1, \cdots, f_s$ os ramos inversos de f em B_j e considere $T_i = \partial_f f_i, \quad i = 1, \cdots, s$ a derivada dos ramos inversos em relação a f. Temos que

$$\mathcal{L}_{j,f,\phi}(g)|_{\overline{B}_j^C} \equiv 0, \quad \text{pois} \quad \varphi_j \quad \text{se anula fora de} \quad B_j.$$

Assim,

$$\mathcal{L}_{j,f,\phi}(g)(x) = \sum_{i=1}^{s} e^{\phi(f_i(x))} g(f_i(x)) \cdot \varphi_j$$

Daí,

$$\begin{aligned}\partial_f \mathcal{L}_{j,f,\phi}(g)\cdot H &= \sum_{i=1}^{s}\left[e^{\phi(f_i)}\partial_f\phi(f_i)T_i\cdot Hg(f_i)+e^{\phi(f_i)}\partial_f g(f_i)T_i\cdot H\right]\varphi_j\\ &= \sum_{i=1}^{s}\left[e^{\phi(f_i)}\partial_f\phi(f_i)+e^{\phi(f_i)}\partial_f g(f_i)\right]T_i\cdot H\varphi_j\\ &= \sum_{i=1}^{s}(e^{\phi}\cdot g)'\circ f_i\cdot[T_i\cdot H]\cdot\varphi_j\end{aligned}$$

Isto implica que $\partial_f\mathcal{L}_{j,f,\phi}(g)$ é C^{k-1}. Além disso, a aplicação $C^r(M,\mathbb{R})\ni g\mapsto \partial_f\mathcal{L}_{j,f,\phi}(g)\in C^{r-1}(M,\mathbb{R})$ é linear, contínua e o resto da diferenciabilidade depende continuamente de g, pois fixada $f_0\in Diff_{loc}(M,M)$, para cada $g\in C^r(M,\mathbb{R})$, temos pelo teorema fundamental do cálculo que

$$\begin{aligned}&||\mathcal{L}_{j,\hat f_0+H,\phi}(g)-\mathcal{L}_{j,\hat f_0,\phi}(g)-\partial_{\hat f}\mathcal{L}_{j,\hat f,\phi}(g)|_{\hat f_0}\cdot H||_{r-1}\\ &=\left|\left|\int_0^1\left[\partial_{\hat f}\mathcal{L}_{j,\hat f,\phi}(g)|_{\hat f_0+tH}-\partial_{\hat f}\mathcal{L}_{j,\hat f,\phi}(g)|_{\hat f_0}\right]\cdot H dt\right|\right|_{r-1}\\ &\le\sum_{i=1}^{s}\int_0^1\left|\left|\left[(g\cdot e^{\phi})'|_{(\hat f_0+tH)_i}[T_i|_{\hat f_0+tH}\cdot H]-(g\cdot e^{\phi})'|_{(\hat f_0)_i}[T_i|_{\hat f_0}\cdot H]\right]\cdot\varphi_j\right|\right|_{r-1}dt\\ &\le\sum_{i=1}^{s}\int_0^1\left[\left|\left|(g\cdot e^{\phi})'|_{(\hat f_0+tH)_i}[T_i|_{\hat f_0+tH}\cdot H]-(g\cdot e^{\phi})'|_{(\hat f_0)_i}[T_i|_{\hat f_0+tH}\cdot H]\right|\right|_{r-1}\right.\\ &\left.+\left|\left|(g\cdot e^{\phi})'|_{(\hat f_0)_i}[T_i|_{\hat f_0+tH}\cdot H]-(g\cdot e^{\phi})'|_{\hat f_0)_i}[T_i|_{\hat f_0}\cdot H]\right|\right|_{r-1}\right]\cdot||\varphi_j||_{r-1}dt\end{aligned}$$

Logo, se $C:=2^r||H||_{r-1}||\varphi_j||_{r-1}||ge^{\phi}||_r$, então podemos acotar a expressão acima por

$$\begin{aligned}&||\mathcal{L}_{j,\hat f_0+H,\phi}(g)-\mathcal{L}_{j,\hat f_0,\phi}(g)-\partial_{\hat f}\mathcal{L}_{j,\hat f,\phi}(g)|_{\hat f_0}\cdot H||_{r-1}\\ &\le C\sum_{i=1}^{s}\int_0^1\left[||(\hat f_0+tH)_i-(\hat f_0)_i||_{r-1}\cdot||T_i|_{\hat f_0+tH}||_{r-1}+||T_i|_{\hat f_0+tH}-T_i|_{\hat f_0}||_{r-1}\right]dt\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\lim_{H\to 0}\sup_{||g||_r=1}\frac{||\mathcal{L}_{j,\hat f_0+H,\phi}(g)-\mathcal{L}_{j,\hat f_0,\phi}(g)-\partial_{\hat f}\mathcal{L}_{j,\hat f,\phi}(g)|_{\hat f_0}\cdot H||_{r-1}}{||H||_r}=0$$

Com isso, concluímos a prova da proposição.

□

Utilizando os resultados anteriores e o gap espectral uniforme, provaremos nosso resultado que foi originalmente provado em [Bom14] e em [BC17].

Teorema 3.5. *Se $r \geq 2$ então as seguintes aplicações variam analiticamente com relação ao potencial ϕ e C^{r-1} com relação à dinâmica f:*
i. $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto P_{top}(f, \phi)$;
ii. $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto \mu_{f,\phi} \in (C^1)^*$;
iii. $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto h_{f,\phi}$.

Demonstração. Fixe $(f_0, \phi_0) \in \mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R})$. Observe inicialmente que $\mathcal{L}_{f,\phi|_{C^{r-1}}}$ e $\mathcal{L}_{f,\phi|_{C^r}}$ tem o mesmo raio espectral pois eles possuem a propriedade de gap espectral (de fato $\lambda_{f,\phi} = e^{P_{Top}(f,\phi)}$). Como $\mathcal{L}_{f,\phi}$ varia continuamente num sentido fraco, segue que existem vizinhanças U de f_0 e V de ϕ_0 tais que $\sup_{(f,\phi)\in U\times V} ||\mathcal{L}_{f,\phi}1||_\infty < +\infty$. Como $\lambda_{f,\phi}$ é contínuo, então, a menos de diminuirmos as vizinhanças U e V, podemos supor, sem perda de generalidade que $\sup_{(f,\phi)\in U\times V} \lambda_{f,\phi} < +\infty$. Além disso, pelo gap espectral uniforme, existe uma curva C^1 fechada γ tal que a componente conexa limitada determinada por γ contém o raio espectral de $\mathcal{L}_{f,\phi|_{C^r}}$ e a componente conexa ilimitada contém o resto do espectro para toda $f \in U$ e $\phi \in V$. Seja $P_{f,\phi}$ a projeção espectral de $\mathcal{L}_{f,\phi|_{C^r}}$ associada ao seu raio espectral. Já sabemos que $P_{f,\phi} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (zI - \mathcal{L}_{f,\phi})^{-1}dz$ para toda $f \in U$, e todo $\phi \in V$.

Utilizaremos o teorema anterior [GL06] para provar que $U \times V \times \gamma \ni (f, \phi, z) \mapsto (zI - \mathcal{L}_{f,\phi})^{-1} \in \mathcal{L}(C^r, C^{r-1})$ é C^{r-1} e que os restos da C^{r-1}-diferenciabilidade vão a 0 uniformemente em relação a $z \in \gamma$ quando fixamos $f \in U$ e $\phi \in V$. Para isso, basta escolher corretamente os elementos contidos nas hipóteses de [GL06].

Tome $\mathcal{B}^0 = C^0(M, \mathbb{R})$, $\mathcal{B}^1 = C^{r-1}(M, \mathbb{R})$ e $\mathcal{B}^2 = C^r(M, \mathbb{R})$, $I = U$ e $A_t = \mathcal{L}_{f,\phi}$. Pelo gap espectral uniforme temos que

$$||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}g - \int g d\nu_{f,\phi} \cdot h_{f,\phi}||_{r-1} \leq k\tau^n ||g||_{r-1} \quad \forall \quad g \in C^{r-1}(M, \mathbb{R}) \quad \forall \quad (f, \phi) \in U \times V$$

Daí, tome $M := \sup_{f\in U} ||\mathcal{L}_{f,\phi}1||_0 < +\infty$, $\alpha := \sup_{f\in U} \lambda_{f,\phi}{\cdot}\tau$ e $C := \max\{k, \sup_{f\in U} ||h_{f,\phi}||_{r-1}\}$. Dessa forma,

$$||\mathcal{L}^n_{f,\phi}g||_0 \leq ||\mathcal{L}^n_{f,\phi}1||_0||g||_0 \leq M^n||g||_0 \quad \forall \quad g \in C^0(M, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad (f, \phi) \in U \times V$$

e

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}g||_{r-1} - ||\int g d\nu_{f,\phi} \cdot h_{f,\phi}|| \leq ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}g - \int g d\nu_{f,\phi} \cdot h_{f,\phi}||_{r-1} \leq k\tau^n$$

Assim,

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}g||_{r-1} \leq k\tau^n||g||_{r-1} + ||g||_{r-1}||h_{f,\phi}||_{r-1}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}||\mathcal{L}^n_{f,\phi}g||_{r-1} &\leq k(\lambda_{f,\phi}\cdot\tau)^n||g||_{r-1}+\lambda^n_{f,\phi}||g||_{r-1}||h_{f,\phi}||_{r-1}\\ &\leq k(\sup_{f\in U}\lambda_{f,\phi}\cdot\tau)^n+\sup_{f\in U}||h_{f,\phi}||_{r-1}\sup_{f\in U}\lambda^n_{f,\phi}||g||_{r-1}\\ &\leq k(\sup_{f\in U}\lambda_{f,\phi}\cdot\tau)^n+\sup_{f\in U}||h_{f,\phi}||_{r-1}\sup_{f\in U}\lambda^n_{f,\phi}||g||_{r-1}\\ &\leq k(\sup_{f\in U}\lambda_{f,\phi}\cdot\tau)^n+\sup_{f\in U}||h_{f,\phi}||_{r-1}\sup_{f\in U}||\mathcal{L}_{f,\phi}1||^n_0||g||_{r-1}\\ &\leq C\alpha^n||g||_{r-1}+CM^n||g||_{r-1}\end{aligned}$$

O que satisfaz (3.9) e (3.10). Assim, podemos aplicar o teorema anterior e concluirmos que $U\times V\times\gamma\ni(f,\phi,z)\mapsto(zI-\mathcal{L}_{f,\phi})^{-1}\in\mathcal{L}(C^r,C^{r-1})$ é C^{r-1}. Além disso, como γ é uma curva compacta e para todo $z\in\gamma$ o resto da C^{r-1}-diferenciabilidade vai a 0 uniformemente quando fixarmos $(f,\phi)\in U\times V$, segue que $U\times V\ni(f,\phi)\mapsto P_{f,\phi}=\frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma(zI-\mathcal{L}_{f,\phi})^{-1}dz$ é C^{r-1}. E como já vimos que $\lambda_{f,\phi}=\frac{\mathcal{L}_{f,\phi}\left(P_{f,\phi}(1)\right)}{P_{f,\phi}(1)}$, $h_{f,\phi}=P_{f,\phi}(1)$ e $\nu_{f,\phi}(g)=\frac{P_{f,\phi}(g)}{P_{f,\phi}(1)}$ $\forall$ $g\in C^r(M,\mathbb{R})$, concluímos o teorema.

□

3.4 Fórmulas para a derivada

Agora estamos interessados em calcular uma fórmula para as derivadas de $\lambda_{f,\phi}$, $\mu_{f,\phi}$ e $h_{f,\phi}$ com respeito ao potencial e à dinâmica. Lembremos que $P_{Top}(f,\phi)=\log\lambda_{f,\phi}$. Para isso, faremos uso do seguinte resultado

Lema 3.5.1. *Seja $f\in Diff^r_{loc}$ e $\phi\in C^r(M,\mathbb{R})$. Dada $H\in\Gamma^r_f$, $g_1,g_2\in C^r(M,\mathbb{R})$ e $t\in\mathbb{R}$ é válido*

(i)$D_f(\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g))|_{f_0}\cdot H=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathcal{L}^{i-1}_{f,\phi}(D_f\mathcal{L}_{f,\phi}(\mathcal{L}^{n-i}_{f_0,\phi}(g))|_{f_0}\cdot H)$;

(ii)$(D_f\mathcal{L}_{f,\phi}(g)|_{f_0}\cdot H)(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{deg(f_0)}e^{\phi(f_i(x))}Dg|_{f_i(x)}\cdot[(T_i|_{f_0}\cdot H)(x)]$

$+\displaystyle\sum_{i=1}^{deg(f_0)}e^{\phi(f_i(x))}g(f_i(x))D\phi|_{f_i(x)}[(T_i|_{f_0}\cdot H)(x)]$;

(iii)existe $c_{f,\phi}>0$ tal que $||D_f\mathcal{L}_{f,\phi}(g)|_{f_0}\cdot H||_0\leq c_{f,\phi}||g||_1||H||_1$ e $c_{f,\phi}$ pode ser uniforme para dinâmicas e potenciais suficientemente próximas;

(iv)$D_f\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_1+tg_2)|_{f_0}\cdot H=D_f\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_1)|_{f_0}+tD_f\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_2)|_{f_0}$.

Demonstração. (i) Este resultado segue por indução. Para o caso $n=1$ não tem o que fazer.

Suponha o resultado válido para n, ou seja,

$$D_f(\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g))|_{f_0} \cdot H = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{i-1}_{f,\phi}(D_f\mathcal{L}_{f,\phi}(\mathcal{L}^{n-i}_{f_0,\phi}(g))|_{f_0} \cdot H)$$

Mostremos que o resultado é válido para $n+1$. Usando a hipótese de indução e o fato que $\mathcal{L}^n_{f_0+H,\phi}(g) \in C^r(M, \mathbb{R})$, nós obtemos que para toda $f_0 \in D^r$ fixada e $H \in \Gamma^r_{f_0}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+1}_{f_0+H,\phi}(g) &= \mathcal{L}_{f_0,\phi}(\mathcal{L}^n_{f_0+H,\phi}(g)) + D_f\mathcal{L}_{f,\phi}|_{f_0}(\mathcal{L}^n_{f_0+H,\phi}(g)) \cdot H + o(H) \\
&= \mathcal{L}_{f_0,\phi}\Bigg(\mathcal{L}^n_{f_0,\phi}(g) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{i-1}_{f_0,\phi}(D_f\mathcal{L}_{f,\phi}(\mathcal{L}^{n-i}_{f_0,\phi}(g))|_{f_0} \cdot H) + \hat{o}(H)\Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ D_f\mathcal{L}_{f,\phi}|_{f_0}(\mathcal{L}^n_{f_0+H,\phi}(g)) \cdot H + o(H) \\
&= \mathcal{L}_{f_0,\phi}\Bigg(\mathcal{L}^n_{f_0,\phi}(g) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{i-1}_{f_0,\phi}(D_f\mathcal{L}_{f,\phi}(\mathcal{L}^{n-i}_{f_0,\phi}(g))|_{f_0} \cdot H) + o(\hat{H})\Bigg) \\
&+ D_f\mathcal{L}_{f,\phi}(\mathcal{L}^n_{f_0,\phi}(g)) \cdot H + D_f\mathcal{L}_{f,\phi}(D_f\mathcal{L}^n_{f_0,\phi}(g) \cdot H) \cdot H + o(H) \cdot H + \hat{o}(H) \\
&= \mathcal{L}_{f_0,\phi}(\mathcal{L}^n_{f_0,\phi}(g)) + \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{L}^{i-1}_{f_0,\phi}(D_f\mathcal{L}_{f,\phi}(\mathcal{L}^{(n+1)-i}_{f_0,\phi}(g))|_{f_0} \cdot H) + \tilde{o}(H)
\end{aligned}$$

onde $o(H)$, $\hat{o}(H)$ e $\tilde{o}(H)$ são termos convergindo a 0 mais rápido que $||H||_r$.

(ii) Já foi calculada na proposição (3.2).

(iii) Pelo item anterior, temos que

$$\begin{aligned}
||D_f\mathcal{L}_{f,\phi}(g)|_{f_0} \cdot H||_0 &= \Bigg|\Bigg| \sum_{i=1}^{deg(f_0)} e^{\phi(f_i(\cdot))} Dg|_{f_i(\cdot)} \cdot [(T_i|_{f_0} \cdot H)(\cdot)] \\
&+ e^{\phi(f_i(\cdot))} g(f_i(\cdot)) D\phi|_{f_i(\cdot)}[(T_i|_{f_0} \cdot H)(\cdot)] \Bigg|\Bigg|_0 \\
&\leq \sum_{i=1}^{deg(f_0)} \Big[||e^{\phi}||_1 ||T_i|_{f_0}||_1 ||H||_1 ||g||_1 \big(1 + ||\phi||_1\big) \Big] \\
&\leq deg(f_0) ||e^{\phi}||_1 \max_{i=1,\cdots,s} \{||T_i|_{f_0}||_1\} ||H||_1 ||g||_1 C \\
&\leq c_{f,\phi} ||g||_1 ||H||_1
\end{aligned}$$

onde $c_{f,\phi}$ pode ser tomada uniforme para dinâmicas e potenciais próximos.

(iv) Decorre diretamente da linearidade de $\mathcal{L}^n_{f,\phi}$ e de $D_f\mathcal{L}^n_{f,\phi}$, pois

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n_{f+H,\phi}(g_1 + tg_2) &= \mathcal{L}^n_{f+H,\phi}(g_1) + t\mathcal{L}^n_{f+H,\phi}(g_2) \\
&= \mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_1) + t\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_2) + D_f\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_1) \cdot H \\
&+ tD_f\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_2) \cdot H + r_1(H) + r_2(H) \\
&= \mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_1 + tg_2) + D_f\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_1 + tg_2) \cdot H + r_1(H) + r_2(H)
\end{aligned}$$

onde $r_1(H)$ e $r_2(H)$ vão a 0 quando H vai a 0.

□

Agora provaremos o resultado esperado que foi originalmente provado em [Bom14] e em [BC17].

Teorema 3.6. *Dado* $(\hat{f}, \hat{\phi}) \in \mathcal{D}^r \times \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$*,* $H_1 \in \Gamma^r_{\hat{f}}, H_2 \in C^r(M, \mathbb{R})$*, então*

$$D_\phi P_{Top}(f, \phi)|_{(\hat{f},\hat{\phi})} \cdot H_2 = \int H_2 d\mu_{\hat{f},\hat{\phi}}$$

e

$$\begin{aligned} D_f P_{Top}(f, \phi)|_{(\hat{f},\hat{\phi})} \cdot H_1 &= \lambda^{-1}_{\hat{f},\hat{\phi}} \sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} \int e^{\hat{\phi}(\hat{f}_j(\cdot))} D h_{\hat{f}_j,\hat{\phi}|_{\hat{f}_j(\cdot)}} \cdot [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H_1)(\cdot)] d\nu_{\hat{f},\hat{\phi}} \\ &+ \lambda^{-1}_{\hat{f},\hat{\phi}} \sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} \int e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} h_{\hat{f},\hat{\phi}}(\hat{f}_j(\cdot)) D\hat{\phi}|_{\hat{f}_j(\cdot)} \cdot [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H_1)(\hat{f}_j(\cdot))] d\nu_{\hat{f},\hat{\phi}}. \end{aligned}$$

Demonstração. Fixe $(f_0, \phi_0) \in \mathcal{D}^r \times \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$. Já vimos que $\frac{1}{n} \log \int \mathcal{L}^n_{f,\phi}(1) d\nu_{f_0,\phi_0}$ converge uniformemente para $P_{Top}(f, \phi)$ quando n tende ao infinito. Dessa forma, considere a sequência de funções $F_n : V \times W \to \mathbb{R}$ dadas por

$$F_n(f, \phi) = \frac{1}{n} \log \int \mathcal{L}^n_{f,\phi}(1) d\nu_{f_0,\phi_0}$$

Estas funções estão bem definidas e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \int \mathcal{L}^n_{f,\phi}(1) d\nu_{f_0,\phi_0} = P_{Top}(f, \phi)$. Provaremos então que as derivadas de F_n convergem uniformemente com respeito a f e com respeito a ϕ quando n tende ao infinito e então aplicaremos o teorema clássico de derivação de sequências para concluirmos que o limite das derivadas de F_n é a derivada de $P_{Top}(f, \phi)$. Fixada $f \in \mathcal{V}$, dado $\hat{\phi} \in W$ e $H \in C^r(M, \mathbb{R})$, segue da proposição 3.1 que

$$\begin{aligned} D_\phi F_n(\hat{\phi}) \cdot H &= \frac{1}{n} \frac{\int D_\phi \mathcal{L}^n_{f,\phi}(1)|_{\hat{\phi}} d\nu_{f,\phi_0} \cdot H}{\int \mathcal{L}^n_{f,\phi}(1) d\nu_{f,\phi_0}} \\ &= \frac{1}{n} \frac{\displaystyle\int \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^i_{f,\phi}(\mathcal{L}^{n-i}_{f,\phi}(1) \cdot H) d\nu_{f,\phi_0}}{\int \mathcal{L}^n_{f,\phi}(1) d\nu_{f,\phi_0}} = \frac{A_n(\hat{\phi}) \cdot H}{\int \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\hat{\phi}}(1) d\nu_{f,\phi_0}}, \end{aligned}$$

onde $A_n(\hat{\phi}) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{f,\phi}(1)) d\nu_{f,\phi_0}$.

Logo, pela uniformidade do gap espectral (Corolário 3.3.1), segue que

$$
\begin{aligned}
&\left|A_n(\phi)\cdot H-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int\tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(1)\cdot Hd\nu_{f,\phi}\cdot\int h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi_0}\right|\\
&\qquad\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\int\tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{f,\phi}(1)\cdot H)d\nu_{f,\phi_0}-\int\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{f,\phi}(1)\cdot Hd\nu_{f,\phi}\cdot\int h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi_0}\right|\\
&\qquad\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\left|\tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{f,\phi}(1)\cdot H)-h_{f,\phi}\int\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{f,\phi}(1)\cdot Hd\nu_{f,\phi}\right|d\nu_{f,\phi_0}\\
&\qquad\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\left|\tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{f,\phi}(1)\cdot H)-h_{f,\phi}\int\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{f,\phi}(1)\cdot Hd\nu_{f,\phi}\right|\right|_r\\
&\qquad\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k\tau^i\left|\left|\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{f,\phi}(1)\cdot H\right|\right|_r\\
&\qquad\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k\tau^ik\tau^{n-i}||h_{f,\phi}||_\infty||H||_r\\
&\qquad\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k^2\tau^n||h_{f,\phi}||_\infty||H||_r
\end{aligned}
$$

que converge uniformemente a zero com respeito a ϕ e $H\in C^r(M,\mathbb{R})$ satisfazendo $||H||=1$. Além disso, como $\int\tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(1)d\nu_{f,\phi}$ converge uniformemente para $\int h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi}$, segue que $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\int\tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(1)d\nu_{f,\phi}$ converge uniformemente para $\int h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi}$. Logo,

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int\tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(1)\cdot Hd\nu_{f,\phi}\cdot\int h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi_0}\xrightarrow[n\to\infty]{}\int h_{f,\phi}\cdot Hd\nu_{f,\phi}\cdot\int h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi_0}.
$$

e esta convergência é uniforme com respeito a ϕ e H. E como $\int\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)d\nu_{f,\phi_0}$ converge uniformemente para $\int h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi_0}$, temos que

$$
D_\phi F_n(\phi)\cdot H=\frac{A_n(\phi)\cdot H}{\int\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)d\nu_{f,\phi_0}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\int h_{f,\phi}\cdot Hd\nu_{f,\phi}
$$

onde esta convergência é uniforme com respeito a ϕ e $H\in C^r(M,\mathbb{R})$ satisfazendo $||H||=1$.

Agora, fixado $\phi\in\mathcal{W}$, dada $\hat{f}\in V$ e $H\in\Gamma^r_{\hat{f}}$, pela regra da cadeia e pela fórmula de derivada do operador de transferência em relação à dinâmica, temos que

$$
\begin{aligned}
D_fP_n(\hat{f})\cdot H&=\frac{1}{n}\frac{\int D_f\mathcal{L}^n_{\hat{f},\phi}(1)|_{\hat{f}}\cdot Hd\nu_{\hat{f},\phi}}{\int\mathcal{L}^n_{\hat{f},\phi}(1)d\nu_{\hat{f},\phi}}=\frac{1}{n}\frac{\int\sum\limits_{i=1}^{n}\mathcal{L}^{i-1}_{\hat{f},\phi}\Big(D_f\mathcal{L}_{\hat{f},\phi}(\mathcal{L}^{n-i}_{\hat{f},\phi}(1))|_{\hat{f}}\cdot H\Big)d\nu_{\hat{f},\phi}}{\int\mathcal{L}^n_{\hat{f},\phi}(1)d\nu_{\hat{f},\phi}}\\
&=\frac{B_n(\hat{f})\cdot H}{\lambda_{\hat{f},\phi}\int\mathcal{L}^n_{\hat{f},\phi}(1)d\nu_{\hat{f},\phi}}+\frac{C_n(\hat{f})\cdot H}{\lambda_{\hat{f},\phi}\int\mathcal{L}^n_{\hat{f},\phi}(1)d\nu_{\hat{f},\phi}},
\end{aligned}
$$

onde

$$B_n(\hat{f}) \cdot H = \frac{1}{n} \int \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{i-1} \Big(\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} D\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{n-i}(1)|_{\hat{f}_j(\cdot)} \cdot [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\cdot)] \Big) d\nu_{\hat{f},\phi}$$

e

$$C_n(\hat{f}) \cdot H = \frac{1}{n} \int \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{i-1} \Big(\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} \tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{n-i}(1)(\hat{f}_j(\cdot)) D\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)} \cdot [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\hat{f}_j(\cdot))] \Big) d\nu_{\hat{f},\phi}$$

Afirmação: (i) $B_n(\hat{f}) \cdot H$ converge uniformemente para

$$\int \sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} \cdot Dh_{\hat{f},\hat{\phi}|_{\hat{f}_j}(\cdot)} \cdot [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H_1)(\cdot)] d\nu_{\hat{f},\phi} \cdot \int h_{\hat{f},\hat{\phi}} d\nu_{f_0,\phi}$$

(ii) $C_n(\hat{f}) \cdot H$ converge uniformemente para

$$\int \sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} \cdot h_{\hat{f},\phi}(\hat{f}_j(\cdot)) D\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)} \cdot [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\hat{f}_j(\cdot))] d\nu_{\hat{f},\phi} \cdot \int h_{\hat{f},\phi} d\nu_{f_0,\phi}.$$

Demonstração. (i) De fato, note que, como $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{i}(1) d\nu_{\hat{f},\phi}$ converge uniformemente para $\int h_{\hat{f},\phi} d\nu_{\hat{f},\phi}$, então é válida a seguinte convergência uniforme

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} D\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{i}(1)|_{\hat{f}_j(\cdot)} [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\cdot)] d\nu_{\hat{f},\phi} \cdot \int h_{\hat{f},\phi} d\nu_{f_0,\phi}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \int \sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} Dh_{\hat{f},\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)}} [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\cdot)] d\nu_{\hat{f},\phi} \cdot \int h_{\hat{f},\phi} d\nu_{f_0,\phi}$$

Além disso, pelo gap espectral uniforme e pelo item (iii) do lema anterior temos que

$$\begin{aligned}
&\Big| B_n(\hat{f}) \cdot H - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} D\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{i}(1)|_{\hat{f}_j(\cdot)} [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\cdot)] d\nu_{\hat{f},\phi} \cdot \int h_{\hat{f},\phi} d\nu_{f_0,\phi} \Big| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big| \int \tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{i-1} \Big(\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} D\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{n-i}(1)|_{\hat{f}_j(\cdot)} [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\cdot)] \Big) d\nu_{f_0,\phi} \\
&- \int \sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} D\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{n-i}(1)|_{\hat{f}_j(\cdot)} [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\cdot)] d\nu_{\hat{f},\phi} \cdot \int h_{\hat{f},\phi} d\nu_{f_0,\phi} \Big| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int \Big| \tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{i-1} \Big(\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} D\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{n-i}(1)|_{\hat{f}_j(\cdot)} [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\cdot)] \Big) \\
&- h_{\hat{f},\phi} \int \sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} D\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{n-i}(1)|_{\hat{f}_j(\cdot)} [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\cdot)] d\nu_{\hat{f},\phi} \Big| d\nu_{f_0,\phi}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k\tau^i \left|\left|\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} D\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{n-i}(1)|_{\hat{f}_j(\cdot)}[(T_j|_{\hat{f}}\cdot H)(\cdot)]\right|\right|_r$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k\tau^i deg(\hat{f})||e^{\phi}||_r||D\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{n-i}(1)|_{\hat{f}_j(\cdot)}||_r \max_{j=1,\cdots,deg(\hat{f})}\{||T_j||\}||H||_r$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k\tau^i c_{f,\phi}||\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{n-i}(1)||_r||H||_r$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k\tau^i c_{f,\phi}k\tau^{n-i}||h_{\hat{f},\phi}||_\infty||H||_r$$

que converge uniformemente para 0 em relação a $\hat{f}$ e todo $H\in\Gamma^r_{\hat{f}}$ com $||H||_r\leq 1$.

(ii) De forma análoga, observe também que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{i}(1)(\hat{f}_j(\cdot))D\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)}\cdot[(T_j|_{\hat{f}}\cdot H)(\hat{f}_j(\cdot))]d\nu_{\hat{f},\phi}\cdot\int h_{\hat{f},\phi}d\nu_{f_0,\phi}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\int\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\cdot h_{\hat{f},\phi}(\hat{f}_j(\cdot))D\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)}\cdot[(T_j|_{\hat{f}}\cdot H)(\hat{f}_j(\cdot))]d\nu_{\hat{f},\phi}\cdot\int h_{\hat{f},\phi}d\nu_{f_0,\phi}\cdot\int h_{\hat{f},\phi}d\nu_{f_0,\phi}$$

uniformemente com respeito a $\hat{f}$ e H. Além disso, pelo gap espectral uniforme, temos

$$\left|C_n(\hat{f})\cdot H-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{i}(1)(\hat{f}_j(\cdot))D\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)}\cdot[(T_j|_{\hat{f}}\cdot H)(\hat{f}_j(\cdot))]d\nu_{\hat{f},\phi}\cdot\int h_{\hat{f},\phi}d\nu_{f_0,\phi}\right|$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\int\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{i-1}\left(\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n-i}(1)(\hat{f}_j(\cdot))D\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)}\cdot[(T_j|_{\hat{f}}\cdot H)(\hat{f}_j(\cdot))]\right)d\nu_{f_0\phi}\right.$$
$$\left.-\int\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{n-i}(1)(\hat{f}_j(\cdot))D\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)}\cdot[(T_j|_{\hat{f}}\cdot H)(\hat{f}_j(\cdot))]d\nu_{\hat{f},\phi}\cdot\int h_{\hat{f},\phi}d\nu_{f_0,\phi}\right|$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\left|\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{i-1}\left(\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n-i}(1)(\hat{f}_j(\cdot))D\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)}\cdot[(T_j|_{\hat{f}}\cdot H)(\hat{f}_j(\cdot))]\right)\right.$$
$$\left.-h_{\hat{f},\phi}\int\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\phi}^{n-i}(1)(\hat{f}_j(\cdot))D\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)}\cdot[(T_j|_{\hat{f}}\cdot H)(\hat{f}_j(\cdot))]d\nu_{\hat{f},\phi}\right|d\nu_{f_0,\phi}$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k\tau^i\left|\left|\sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n-i}(1)(\hat{f}_j(\cdot))D\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)}\cdot[(T_j|_{\hat{f}}\cdot H)(\hat{f}_j(\cdot))]\right|\right|_r$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k\tau^{i} deg(\hat{f})||e^{\phi}||_r||\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{f,\phi}(1)||_r||\phi||_r \max_{j=1,\cdots,deg(\hat{f})}\{||T_j||\}||H||_r$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k\tau^{i} c_{f,\phi} k\tau^{n-i}||h_{f,\phi}||_{\infty}||\phi||_r||H||_r$$

que também converge uniformemente a 0 em relação a $\hat{f}$ e todo $H \in \Gamma^r_{\hat{f}}$ com $||H||_r \leq 1$.

□

Logo, utilizando o lema anterior e o fato que $\int \mathcal{L}^n_{f,\phi}(1) d\nu_{\hat{f},\phi}$ converge uniformemente para $\int h_{\hat{f},\phi} d\nu_{\hat{f},\phi}$ em relação a $\hat{f}$, segue que $D_f P_n(\hat{f}) \cdot H$ converge uniformemente com respeito a $\hat{f}$ e $H \in \Gamma^r_{\hat{f}}$ tal que $||H||_r = 1$ para a soma

$$\lambda^{-1}_{\hat{f},\phi} \sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} \int e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} Dh_{\hat{f}_j,\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)}} \cdot [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\cdot)] d\nu_{\hat{f},\phi}$$
$$+\lambda^{-1}_{\hat{f},\phi} \sum_{j=1}^{deg(\hat{f})} \int e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))} h_{\hat{f},\phi}(\hat{f}_j(\cdot)) D\phi|_{\hat{f}_j(\cdot)} \cdot [(T_j|_{\hat{f}} \cdot H)(\hat{f}_j(\cdot))] d\nu_{\hat{f},\phi}.$$

Portanto, como F_n é diferenciável e uniformemente convergente para $P_{Top}(f, \phi)$, segue o resultado.

□

Agora, explicitaremos uma fórmula da derivada de $\mu_{f,\phi}$ em relação à dinâmica, supondo que o potencial ϕ é identicamente nulo,ou seja, o caso da medida de máxima entropia. Este resultado foi originalmente provado em [Bom14] e em [BC17].

Primeiro, observemos que $\lambda_{f,0} = deg(f)$ e $h_{f,0} = 1$ para toda $f \in \mathcal{D}^r$, pois dados $g \in C^r(M, \mathbb{C})$ e $x \in M$, temos que $\mathcal{L}_{f,0}(g)(x) = \sum_{i=1}^{deg(f)} g(f_j(x))$, Isto implica que

$$|\mathcal{L}_{f,0}(g)(x)| \leq \sum_{i=1}^{deg(f)} ||g||_{\infty} \leq deg(f)||g||_{\infty}.$$

Assim, dada g tal que $||g||_{\infty} = 1$,

$$||\mathcal{L}_{f,0}(g)|| \leq deg(f)$$

Além disso, $\mathcal{L}_{f,0}(1) = deg(f).1$ e $r(\mathcal{L}_{f,0}) \leq ||\mathcal{L}_{f,0}||$. Observe também que $\mu_{f,0} = \nu_{f,0}$.

Denotemos $P_{0,f}(g) = g - \int g d\nu_f$.

Teorema 3.7. *Dado* $\hat{f} \in \mathcal{D}^r, g \in C^r(M, \mathbb{R})$ *e* $H \in \Gamma^r_{\hat{f}}$, *então*

$$D_f \mu_f(g)|_{\hat{f}} \cdot H = \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^i_{\hat{f}}(P_{0,\hat{f}}(g))) \cdot H d\mu_{\hat{f}}$$

Demonstração. Seja $g \in C^r(M, \mathbb{R})$ e $f_0 \in \mathcal{D}^r$ fixada. Defina uma sequência de funções $F_n : \mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_n(f, g) = \int \tilde{\mathcal{L}}^n_f(g) d\mu_{f_0}$$

Já vimos que $F_n(f, g)$ converge uniformemente em relação a f para $\int g d\mu_{f_0}$. Além disso, dado $H \in \Gamma^r_f$, pelo item (i) do Lema 3.5.1

$$D_f F_n(f, g) \cdot H = \int \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{L}}^{i-1}_f (D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(g)) \cdot H) d\mu_{f_0}$$

Agora, note que $\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(g) = \int g d\mu_f + \tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(P_{0,f}(g))$, pois

$$\int g d\mu_f + \tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(P_{0,f}(g)) = \int g d\mu_f + \tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f\big(g - \int g d\nu_f\big) = \int g d\mu_f + \tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(g) - \int g d\nu_f \tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(1).$$

Observe também que como

$$\begin{aligned}(D_f \mathcal{L}_{f,\phi}(g)|_{f_0} \cdot H)(x) &= \sum_{i=1}^{deg(f_0)} e^{\phi(f_i(x))} Dg|_{f_i(x)} \cdot [(T_i|_{f_0} \cdot H)(x)] \\ &+ \sum_{i=1}^{deg(f_0)} e^{\phi(f_i(x))} g(f_i(x)) D\phi|_{f_i(x)} [(T_i|_{f_0} \cdot H)(x)]\end{aligned}$$

então, pelo fato de $\phi \equiv 0$ e pela linearidade do operador de transferência, segue que

$$D_f \tilde{\mathcal{L}}_f \Big(\int g d\mu_f + \tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(P_{0,f}(g)) \Big) \cdot H = D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(P_{0,f}(g))) \cdot H.$$

Assim,

$$D_f F_n(f, g) \cdot H = \int \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{L}}^{i-1}_f (D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(P_{0,f}(g))) \cdot H) d\mu_{f_0}$$

Mostraremos então que $D_f F_n(f, g)$ converge uniformemente em relação a f e $H \in \Gamma^r_f$ com $||g||_r = ||H||_r = 1$. Para isso, observe inicialmente que

$$\sum_{i=1}^{n} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(P_{0,f}(g))) \cdot H d\mu_f = \sum_{i=0}^{n-1} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^{i}_f(P_{0,f}(g))) \cdot H d\mu_f$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_f\right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1}||D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g)))\cdot H||_\infty\\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}c_f||\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g))||_r||H||_r\\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}c_fk\tau^i||g||_r||H||_r<\infty\end{aligned}$$

Além disso, a estimativa acima é uniforme em relação a f e para $||g||_r = ||H||_r = 1$. Isto implica que o limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_f$$

existe e é uniforme em relação a f e para $||g||_r = ||H||_r = 1$, pois

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_f-\sum_{i=0}^{\infty}\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_f\right|\\ &\quad=\left|\sum_{i=n}^{\infty}\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_f\right|\\ &\quad\leq\sum_{i=n}^{\infty}\left|\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_f\right|\\ &\quad=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_f\right|-\sum_{i=0}^{\infty}\left|\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_f\right|\right|\end{aligned}$$

Observe também que, pelo item (iii) do Lema 3.5.1, pelo gap espectral uniforme, pelo fato de $\int h_{f_0}d\nu_{f_0} = 1$ e neste caso, $h_{f_0,0} = 1$ segue que

$$\begin{aligned}&|D_fF_n(f,g)\cdot H-\sum_{i=1}^{n}\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_f|\\ &\quad=\left|\sum_{i=1}^{n}\left[\int\tilde{\mathcal{L}}_f^{i-1}(D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_{f_0})-\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_f\right]\right|\\ &\quad\leq\sum_{i=1}^{n}\int\left|\left|\tilde{\mathcal{L}}_f^{i-1}(D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g))))\cdot H-h_{f_0}\cdot\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g)))\cdot Hd\mu_f\right|\right|d\mu_{f_0}\\ &\quad\leq\sum_{i=1}^{n}k\tau^i||D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g)))\cdot H||_r\\ &\quad\leq\sum_{i=1}^{n}k\tau^ic_f||\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g)))||_r||H||_r\\ &\quad\leq\sum_{i=1}^{n}k\tau^ic_fk\tau^{n-i}||g||_r||H||_r=\sum_{i=1}^{n}k^2\tau^nc_f||g||_r||H||_r\end{aligned}$$

que converge a 0. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} D_f F_n(f,g)\cdot H &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g)))\cdot H d\mu_f\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g)))\cdot H d\mu_f\end{aligned}$$

que é uniforme em relação a f e para $||g||_r = ||H||_r = 1$. Portanto, como $F_n(f,g)$ converge uniformemente para $\int g d\mu_f$ e $D_f F_n(f,g)$ também converge uniformemente, concluímos que

$$D_f\mu_f(g)|_{f_0}\cdot H = \sum_{i=0}^{\infty}\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^{i}(P_{0,f_0}(g)))\cdot H d\mu_{f_0}.$$

□

3.5 Estabilidade das Leis Estatísticas

Dados φ, $\psi : M \to \mathbb{R}$, a função $C_{\varphi,\psi}(f,n) := \int(\varphi\circ f^n)\psi d\mu_{f,\phi} - \int\varphi d\mu_{f,\phi}\int\psi d\mu_{f,\phi}$ é chamada de correlação de φ e ψ em relação à dinâmica f em tempo n. Esta quantidade mede se há ou não perda de informação do sistema quando n cresce. Observe que a propriedade de gap espectral do operador de transferência implica que a correlação vai a 0, pois

$$\begin{aligned}|C_{\varphi,\psi}(f,n)| &= \left|\int(\varphi\circ f^n)\psi d\mu_{f,\phi} - \int\varphi d\mu_{f,\phi}\int\psi d\mu_{f,\phi}\right|\\ &= \left|\int\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n(\psi)\varphi d\mu_{f,\phi} - \int\varphi d\mu_{f,\phi}\int\psi d\mu_{f,\phi}\right|\\ &= \left|\int\left[\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n(\psi\cdot h_{f,\phi}) - \int\psi\cdot h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi}\right]\varphi\cdot h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi}\right|\\ &\le \int\left|\left[\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n(\psi\cdot h_{f,\phi}) - \int\psi\cdot h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}\right]\varphi\right|d\nu_{f,\phi}\\ &\le ||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n(\psi\cdot h_{f,\phi}) - \int\psi\cdot h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}||_r||\varphi||_r\\ &\le k\tau^n||\psi||_r||h_{f,\phi}||_r||\varphi||_r\end{aligned}$$

Agora, se considerarmos o potencial $\phi\equiv 0$, estaremos no caso de medida de máxima entropia, vamos obter como consequência do Teorema anterior e do que já foi discutido anteriormente, que a função correlação é diferenciável em relação a f e que sua derivada converge a 0 na topologia C^1, que foi originalmente provado em [Bom14] e em [BC17]. Em outras palavras,

Corolário 3.7.1. *Dados φ, $\psi \in C^r(M, \mathbb{R})$. A aplicação $\mathcal{D}^r \ni f \mapsto C_{\varphi,\psi}(f,n)$ é C^1. Além disso, $D_f C_{\varphi,\psi}(f,n)$ converge a 0 quando $n \to +\infty$ e essa convergência pode ser tomada uniforme numa vizinhança de f, de φ e de ψ.*

Demonstração. Lembremos inicialmente que podemos escrever

$$C_{\varphi,\psi}(f,n) = \int \varphi[\tilde{\mathcal{L}}_f^n(\psi) - \int \psi d\mu_f]d\mu_f$$

pois, conforme discutido na seção do operador de transferência, $\tilde{\mathcal{L}}_f$ é o adjunto do operador de Koopman.

Logo, segue do resultado de linear response que $C_{\varphi,\psi}(f,n)$ é diferenciável em relação a f. Além disso, dados $f_0 \in \mathcal{D}^r$ e $H \in \Gamma^r_{f_0}$

$$\begin{aligned}
D_f C_{\varphi,\psi}(f,n)|_{f_0} \cdot H &= [D_f \mu_f|_{f_0}\Big(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f_0}(\psi) - \int \psi d\mu_{f_0})\Big) \cdot H] \\
&+ \int \varphi\Big(D_f \tilde{\mathcal{L}}^n_f(\psi)|_{f_0} \cdot H + D_f \mu_f|_{f_0}(\psi) \cdot H\Big) d\mu_{f_0} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}^i_{f_0}(P_{0,f_0}(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f_0}(\psi) - \int \psi d\mu_{f_0})))\Big) d\mu_{f_0} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^{i-1}_{f_0}\big(D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{f_0}(\psi)) \cdot H\big) d\mu_{f_0} \\
&- \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}^i_{f_0}(P_{0,f_0}(\psi))\Big) d\mu_{f_0} \int \varphi d\mu_{f_0}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
D_f C_{\varphi,\psi}(f,n)|_{f_0} \cdot H &= \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}^i_{f_0}(P_{0,f_0}(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f_0}(\psi) - \int \psi d\mu_{f_0})))\Big) d\mu_{f_0} \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^{n-i-1}_{f_0}\big(D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^{i}_{f_0}(\psi)) \cdot H\big) d\mu_{f_0} \\
&- \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}^i_{f_0}(P_{0,f_0}(\psi))\Big) d\mu_{f_0} \int \varphi d\mu_{f_0}
\end{aligned}$$

Defina então

$$A_n(f_0, H) = \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}^i_{f_0}(P_{0,f_0}(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f_0}(\psi) - \int \psi d\mu_{f_0})))\Big) d\mu_{f_0}$$

e

$$\begin{aligned}B_n(f_0,H) = &\sum_{i=0}^{n-1}\int \varphi\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^{n-i-1}\big(D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(\psi))\cdot H\big)d\mu_{f_0}\\ &-\sum_{i=0}^{n-1}\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(P_{0,f_0}(\psi))\Big)d\mu_{f_0}\int\varphi d\mu_{f_0}\end{aligned}$$

Mostremos que $A_n(f_0,H)$ e $B_n(f_0,H)$ convergem uniformemente a 0 em relação a f e $H\in\Gamma_{f_0}^r$ com $||H||_r\leq 1$. Temos pela uniformidade do gap espectral e pelo item (iii) de 3.5.1 que

$$\begin{aligned}|A_n(f_0,H)| &\leq \sum_{i=0}^{\infty}\int\left|D_f\tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(P_{0,f_0}(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^n(\psi)-\int\psi d\mu_{f_0})))\Big)\cdot H\right|d\mu_{f_0}\\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty}\left|\left|D_f\tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(P_{0,f_0}(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^n(\psi)-\int\psi d\mu_{f_0})))\Big)\cdot H\right|\right|_0\\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty}c_f\left|\left|\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(P_{0,f_0}(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^n(\psi)-\int\psi d\mu_{f_0})))\right|\right|_1||H||_1\\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty}c_fk\tau^i||P_{0,f_0}\Big(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^n(\psi)-\int\psi d\mu_{f_0})\Big)||_1||H||_1\\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty}c_fk\tau^i||P_{0,f_0}||_1||\varphi||_1||\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^n(\psi)-\int\psi d\mu_{f_0}||_1||H||_1\\ &\leq c_fk^2\tau^n||P_{0,f_0}||_1||\varphi||_1||H||_1\sum_{i=0}^{\infty}\tau^i\end{aligned}$$

Daí, como $\tau\in(0,1)$, segue que $\sum_{i=0}^{\infty}\tau^i$ é limitada e assim, $|A_n(f_0,H)|$ converge uniformemente a 0 quando n tende ao infinito. Por outro lado,

$$\begin{aligned}|B_n(f_0,H)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\Bigg[\Bigg|\int\varphi\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^{n-i-1}\Big(D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(\psi))\cdot H\Big)d\mu_{f_0}\\ &\quad-\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(P_{0,f_0}(\psi)))\cdot Hd\mu_{f_0}\int\varphi d\mu_{f_0}\Bigg|\Bigg]\\ &=\sum_{i=0}^{n-1}\Bigg|\int\varphi\Bigg[\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^{n-i-1}\Big(D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(\psi))\cdot H\Big)\\ &\quad-\int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(P_{0,f_0}(\psi))\cdot H)d\mu_{f_0}\Bigg]d\mu_{f_0}\Bigg|\end{aligned}$$

Como já vimos que $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^i(\psi)=\int\psi d\mu_f+\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^i(P_{0,f}(\psi))$ e que isto implica a seguinte igualdade $D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(\psi)\cdot H=D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(P_{0,f_0}(\psi)))\cdot H$, então utilizando a estimativa da uniformidade do gap espectral e o item (iii) do Lema 3.5.1, segue que

$$
\begin{aligned}
|B_n(f_0,H)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} ||\varphi||_\infty k\tau^{n-i-1}||D_f\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}(\tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(P_{0,f}(\psi)))\cdot H||_0 \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} ||\varphi||_\infty k\tau^{n-i-1}c_f||\tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(P_{0,f}(\psi))||_1||H||_1 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} ||\varphi||_\infty k\tau^{n-i-1}c_f||\tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(\psi) - \int \psi d\nu_f \cdot \tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(1)||_1||H||_1 \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} ||\varphi||_\infty k^2\tau^{n-1}c_f||\psi||_1||\tilde{\mathcal{L}}^i_{f,\phi}(1)||_1||H||_1 \\
&\leq ||\varphi||_\infty k^3\tau^{n-1}c_f||\psi||_1||H||_1||h_{f,\phi}||_\infty \sum_{i=0}^{n-1}\tau^i
\end{aligned}
$$

Logo, $B_n(f_0,H)$ converge uniformemente a 0 em relação a f e $H \in \Gamma^r_{f_0}$ com $||H||_r \leq 1$. Além disso, estas estimativas também garantem que a convergência a 0 de $C_{\varphi,\psi}(f,n)$ pode ser tomada uniforme numa vizinhança de f, de φ e de ψ.

□

Por fim, apresentaremos outra consequência do resultado de linear response fórmula. Para isso, apresentaremos inicialmente o Teorema Central do Limite enunciado a seguir:

Teorema 3.8. *Seja $f \in \mathcal{F}^r$. Se $\psi \in C^r(M,\mathbb{R})$ então:*
(i) ou $\psi = u\circ f - u + \int \psi d\mu_{f,\phi}$ para algum $u \in L^2(M,\mu_{f,\phi})$ (dizemos que ψ é cohomóloga a uma constante em $L^2(M,\mu_{f,\phi})$)
(ii) ou a convergência em distribuição

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\psi\circ f^j \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$$

vale com média $m = m_f(\psi) = \int \psi d\mu_{f,\phi}$ e variância σ^2 dada por

$$\sigma^2 = \sigma^2_f(\psi) = \int \tilde{\psi}^2 d\mu_{f,\phi} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\int \tilde{\psi}(\tilde{\psi}\circ f^n)d\mu_{f,\phi}$$

onde $\tilde{\psi} = \psi - \int \psi d\mu_{f,\phi}$ é uma função com média 0 dependendo de f.

Este resultado pode ser encontrado em [PU10]. Veremos que o teorema acima é válido mesmo para funções $u \in C^r(M,\mathbb{R})$, para isso, precisaremos do seguinte resultado:

Teorema 3.9. *(Livschitz) Seja M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ expansora, aberta e topologicamente mixing. Se $\psi \in C^\alpha(M,\mathbb{R})$ é um observável Holder tal que $S_n\psi(x) = 0$ para todo ponto periódico x de período n então existe uma função $u \in C^\alpha(M,\mathbb{R})$ tal que $\psi = u\circ f - u$. Suponhamos adicionalmente que M é uma variedade riemanniana e que $\psi \in \mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})$ então existe $u \in C^r(M,\mathbb{R})$ tal que $\psi = u\circ f - u$.*

Demonstração. Ver [KB95].

□

Agora, enunciaremos nosso resultado de estabilidade do Teorema Central do Limite, que é uma aplicação direta do teorema anterior e uma consequência dos resultados já discutidos e provados anteriormente. Este resultado foi originalmente provado em [Bom14] e em [BC17].

Teorema 3.10. *Sejam $r \geq 2$, $(f, \phi) \in \mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R})$. Se $\psi \in C^r(M, \mathbb{R})$, então:*
(i) ou $\psi = u \circ f - u + \int \psi d\mu_{f,\phi}$ para algum $u \in C^r(M, \mathbb{R})$ (dizemos que ψ é cohomóloga a uma constante em $C^r(M, \mathbb{R})$)
(ii) ou a convergência em distribuição

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

vale com média $m = m_{f,\phi}(\psi) = \int \psi d\mu_{f,\phi}$ e variância σ^2 dada por

$$\sigma^2 = \sigma^2_{f,\phi}(\psi) = \int \tilde{\psi}^2 d\mu_{f,\phi} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int \tilde{\psi}(\tilde{\psi} \circ f^n) d\mu_{f,\phi}$$

onde $\tilde{\psi} = \psi - \int \psi d\mu_{f,\phi}$ é uma função com média 0 dependendo de f e ϕ.

Ademais, as aplicações $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto m_{f,\phi}(\psi)$ e $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto \sigma^2_{f,\phi}(\psi)$ são C^{r-1}.

Demonstração. O resultado antes do ademais seria o Teorema Central do Limite se, a solução u da equação cohomológica pertencesse a $L^2(\mu_{f,\phi})$. Mas, como M é uma variedade riemanniana e f é expansora $C^r(M, M)$, em [BC17] e em [Bom14] é provado que ψ ser cohomóloga a uma constante em $L^2(\mu_{f,\phi})$ é equivalente a ser cohomóloga a uma constante em C^0. Daí, temos pelo teorema de Livschitz que existe $u \in C^r(M, \mathbb{R})$ tal que ψ é cohomóloga a uma constante em $C^r(M, \mathbb{R})$. Dessa forma, está provada a primeira parte da proposição. Resta mostrar então a regularidade das aplicações $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto m_{f,\phi}(\psi)$ e $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto \sigma^2_{f,\phi}(\psi)$.

Observe que, como vimos no teorema 3.5 (linear response), $\mu_{f,\phi}$ é C^{r-1} e como $\psi \in C^r(M, \mathbb{R})$, segue então que $\mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto m_{f,\phi}(\psi) = \int \psi d\mu_{f,\phi}$ é C^{r-1}.

Mostremos agora a regularidade da variância σ^2. Note que, como $\tilde{\psi} = \psi - \int \psi d\mu_{f,\phi}$ e pelo linear response $D^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto \mu_{f,\phi}$ é C^{r-1}, então $D^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto \int \psi d\mu_{f,\phi}$ é C^{r-1}. Logo, $D^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto \tilde{\psi}$ é C^{r-1}. Sendo assim, como

$$\sigma^2_{f,\phi}(\psi) = \int \tilde{\psi}^2 d\mu_{f,\phi} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int \tilde{\psi}(\tilde{\psi} \circ f^n) d\mu_{f,\phi},$$

resta mostrarmos que $D^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \int \tilde{\psi}(\tilde{\psi} \circ f^n) d\mu_{f,\phi}$ é C^{r-1}.

Seguindo nesta direção, fixemos $(f_0, \phi_0) \in \mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R})$. Para cada $(f, \phi) \in \mathcal{D}^r \times C^r(M, \mathbb{R})$, definamos $E_{0,f,\phi} := Ker(\nu_{f,\phi}) \cap C^r(M, \mathbb{R})$ e $T_{f,\phi} : C^r(M, \mathbb{R}) \to C^r(M, \mathbb{R})$ dada por

$$T_{f,\phi}(g) = \big(g - \int g d\mu_{f,\phi}\big) \cdot h_{f,\phi}$$

$T_{f,\phi}$ é um operador contínuo e $T_{f,\phi}$ restrito a E_{0,f_0,ϕ_0} é um isomorfismo linear sobre $E_{0,f,\phi}$, pois se $g \in Ker(T_{f,\phi}|_{E_{0,f_0,\phi_0}})$, temos que

$$T_{f,\phi}|_{E_{0,f_0,\phi_0}}(g) = 0 \iff \big(g - \int g d\mu_{f,\phi}\big) \cdot h_{f,\phi} = 0$$

$$\iff g - \int g d\mu_{f,\phi} = 0, \quad \text{pois} \quad h_{f,\phi} > 0 \iff g = \int g d\mu_{f,\phi}$$

$$\Rightarrow \int g d\nu_{f_0,\phi_0} = \int \int g d\mu_{f,\phi} d\nu_{f_0,\phi_0} \iff \int g d\mu_{f,\phi} = 0 \quad \text{pois} \quad g \in E_{0,f_0,\phi_0} \Rightarrow g = 0.$$

Logo, $T_{f,\phi}|_{E_{0,f_0,\phi_0}}$ é injetiva e $Im(T_{f,\phi}(E_{0,f_0,\phi_0})) = E_{0,f,\phi}$, pois dada $g \in E_{0,f_0,\phi_0}$

$$\begin{aligned}
\int T_{f,\phi}(g) d\nu_{f,\phi} &= \int \Big(g - \int g d\mu_{f,\phi}\Big) h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} \\
&= \int g d\mu_{f,\phi} - \int g d\mu_{f,\phi} \int h d\nu_{f,\phi} \\
&= 0, \quad \text{pois} \quad \int h d\nu_{f,\phi} = 1
\end{aligned}$$

Além disso, $T_{f,\phi}^{-1} : Ker(\nu_{f,\phi}) \to Ker(\nu_{f_0,\phi_0})$ é dada por

$$T_{f,\phi}^{-1}(g) = \frac{g}{h_{f,\phi}} - \int \frac{g}{h_{f,\phi}} d\nu_{f_0,\phi_0}$$

De fato, $T_{f,\phi} \circ T_{f,\phi}^{-1} = id_{Ker\nu_{f,\phi}}$ e $T_{f,\phi}^{-1} \circ T_{f,\phi} = id_{Ker\nu_{f_0,\phi_0}}$

$$\begin{aligned}
T_{f,\phi} \circ T_{f,\phi}^{-1}(g) &= T_{f,\phi}\Big(\frac{g}{h_{f,\phi}} - \int \frac{g}{h_{f,\phi}} d\nu_{f_0,\phi_0}\Big) \\
&= T_{f,\phi}\Big(\frac{g}{h_{f,\phi}}\Big) - T_{f,\phi}\Big(\int \frac{g}{h_{f,\phi}} d\nu_{f_0,\phi_0}\Big) \quad \text{por linearidade de} \quad T_{f,\phi} \\
&= \Big(\frac{g}{h_{f,\phi}} - \int \frac{g}{h_{f,\phi}} d\mu_{f,\phi}\Big) h_{f,\phi} - \Big(\int \frac{g}{h_{f,\phi}} d\nu_{f_0,\phi_0} - \int \int \frac{g}{h_{f,\phi}} d\nu_{f_0,\phi_0} d\mu_{f,\phi}\Big) h_{f,\phi} \\
&= g - \int \frac{g}{h_{f,\phi}} d\nu_{f_0,\phi_0} h_{f,\phi} + \int \frac{g}{h_{f,\phi}} d\nu_{f_0,\phi_0} \int d\mu_{f,\phi} h_{f,\phi}, \quad \text{pois} \quad \int g d\nu_{f,\phi} = 0 \\
&= g, \quad \text{pois} \quad \int d\mu_{f,\phi} = \int h d\nu_{f,\phi} = 1
\end{aligned}$$

Agora, note que dada $\psi \in C^r(M,\mathbb{R})$

$$\int \tilde{\psi}(\tilde{\psi} \circ f^n) d\mu_{f,\phi} = \int \tilde{\psi} \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\tilde{\psi} \cdot h_{f,\phi}) d\nu_{f,\phi} = \int \tilde{\psi} T^{-1}_{f,\phi} \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} T_{f,\phi} T^{-1}_{f,\phi}(\tilde{\psi} \cdot h_{f,\phi}) d\mu_{f,\phi}.$$

Já vimos na demonstração do gap espectral do operador de transferência que $E_{0,f,\phi}$ é invariante por $\mathcal{L}_{f,\phi}$ e que $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}(E_{0,f,\phi})$ é uma contração.

Assim, o operador $T^{-1}_{f,\phi} \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} T_{f,\phi}|_{E_{0,f_0,\phi_0}}$ é uma contração. Logo, $||T^{-1}_{f,\phi} \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} T_{f,\phi}|_{E_{0,f_0,\phi_0}}|| < 1$. Dessa forma, temos da análise funcional que $\sum_{n=1}^{\infty} T^{-1}_{f,\phi} \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} T_{f,\phi} = (I - T^{-1}_{f,\phi} \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} T_{f,\phi})^{-1}$. Daí,

$$\sigma^2_{f,\phi}(\psi) = \int \tilde{\psi}^2 d\mu_{f,\phi} + 2 \int \tilde{\psi}(I - T^{-1}_{f,\phi} \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} T_{f,\phi})^{-1} T^{-1}_{f,\phi}(\tilde{\psi} \cdot h_{f,\phi}) d\mu_{f,\phi}.$$

Utilizaremos então o teorema de [GL06] para concluirmos o resultado. Para isso, vamos checar que o operador $T^{-1}_{f,\phi} \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} T_{f,\phi}$ satisfaz as hipóteses do teorema.

Tome $A_t = A_{f,\phi} = T^{-1}_{f,\phi} \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} T_{f,\phi} : E_{0,f_0,\phi_0} \to E_{0,f_0,\phi_0}$. Considere $\mathcal{B}^0 = \{g \in C^0(M,\mathbb{R});\ \int g d\nu_{f_0,\phi_0} = 0\}$, $\mathcal{B}^1 = \{g \in C^{r-1}(M,\mathbb{R});\ \int g d\nu_{f_0,\phi_0} = 0\}$ e $\mathcal{B}^2 = \{g \in C^r(M,\mathbb{R});\ \int g d\nu_{f_0,\phi_0} = 0\}$.

Observe que a aplicação $(f,\phi) \mapsto A_{f,\phi} = T^{-1}_{f,\phi} \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} T_{f,\phi} : \mathcal{B}^1 \to \mathcal{B}^0$ é contínua, pois dado $g \in \mathcal{B}^1$, $T_{f,\phi} : \mathcal{B}^1 \to C^{r-1}(M,\mathbb{R})$ dada por

$$T_{f,\phi}(g) = \left(g - \int g d\mu_{f,\phi}\right) h_{f,\phi}$$

é um operador contínuo em relação a g e como já vimos, $\mu_{f,\phi}$ e $h_{f,\phi}$ variam continuamente em relação a (f,ϕ). Logo, $T_{f,\phi}$ varia continuamente em relação a (f,ϕ). De forma análoga, o operador inversão $T^{-1}_{f,\phi} : C^0(M,\mathbb{R}) \to \mathcal{B}^0$ dado por

$$T^{-1}_{f,\phi}(g) = \frac{g}{h_{f,\phi}} - \int \frac{g}{h_{f,\phi}} d\nu_{f_0,\phi_0}$$

também varia continuamente em relação a (f,ϕ). Como já vimos também que $\mathcal{L}_{f,\phi} : C^{r-1}(M,\mathbb{R}) \to C^0(M,\mathbb{R})$ e $\lambda_{f,\phi}$ variam continuamente em relação a (f,ϕ), segue então que o operador composição $A_{f,\phi} = T^{-1}_{f,\phi} \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} T_{f,\phi}$ varia continuamente em relação a (f,ϕ).

Dessa forma, fixados $(f_0,\phi_0) \in \mathcal{D}^r \times C^r(M,\mathbb{R})$, existem vizinhanças U de f_0 e V de ϕ_0 tais que $\sup_{(f,\phi)\in U\times V} ||T_{f,\phi}||_0 < +\infty$ e $\sup_{(f,\phi)\in U\times V} ||T^{-1}_{f,\phi}||_0 < +\infty$. Temos também, do gap espectral do operador de transferência que dada $g \in E_{0,f_0,\phi_0} \cap C^r(M,\mathbb{R})$, temos que $||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} g||_r \leq k\tau^n ||g||_r$. Daí, tome

$$M = 1, \quad \alpha = \tau \quad \text{e} \quad C = \max\{k, \sup_{(f,\phi)\in U\times V} ||T_{f,\phi}||_0 \sup_{(f,\phi)\in U\times V} ||T^{-1}_{f,\phi}||_0\}$$

Assim, para todo $g \in \mathcal{B}^0$ e $(f,\phi) \in U \times V$

$$\begin{aligned}
||A^n_{f,\phi}g||_0 &= ||T^{-1}_{f,\phi}\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}T_{f,\phi}(g)||_0 \\
&\leq ||T^{-1}_{f,\phi}|_{C^0}||||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}|_{E_{0,f_0,\phi_0}}||_0||T_{f,\phi}(g)||_0 \\
&\leq k\tau^n||T^{-1}_{f,\phi}|_{C^0}||||T_{f,\phi}||_0||g||_0 \\
&\leq C\tau^n||g||_0 \\
&\leq CM^n||g||_0, \quad \text{pois} \quad \tau < 1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
||A^n_{f,\phi}g||_{\mathcal{B}^1} &\leq ||T^{-1}_{f,\phi}|_{C^{r-1}}||||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}|_{C^{r-1}\cap E_{0,f_0,\phi_0}}||_0||T_{f,\phi}(g)||_{r-1} \\
&\leq k\tau^n||T^{-1}_{f,\phi}|_{C^{r-1}}||||T_{f,\phi}||_{r-1}||g||_{r-1} \\
&\leq C\tau^n||g||_{r-1} \\
&\leq C\alpha^n||g||_{r-1} + CM^n||g||_0
\end{aligned}$$

Além disso, pelo linear response e pelo que discutimos anteriormente, temos que $(f,\phi) \mapsto T_{f,\phi} : \mathcal{B}^2 \to C^2(M,\mathbb{R})$ é C^{r-1}, pela proposição (3.2) $(f,\phi) \mapsto \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} : C^r(M,\mathbb{R}) \to C^{r-s}(M,\mathbb{R})$ é C^s e $(f,\phi) \mapsto T^{-1}_{f,\phi} : C^1 \to \mathcal{B}^1$ é C^{r-1}. Logo, a aplicação $(f,\phi) \mapsto A_{f,\phi} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^2,\mathcal{B}^1)$ é C^1, $(f,\phi) \mapsto A_{f,\phi} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^2,\mathcal{B}^0)$ é C^{r-1}, $(f,\phi) \mapsto A_{f,\phi} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^0)$ é C^{r-2}; além disso claramente suas derivadas são limitadas em relação a (f,ϕ). Logo, podemos aplicar o teorema de [GL06] e concluir então que a aplicação $U \times V \ni (f,\phi) \mapsto (I - T^{-1}_{f,\phi}\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}T_{f,\phi})^{-1}$ é C^{r-1}. Portanto, $\mathcal{D}^r \times C^r(M,\mathbb{R}) \times C^r(M,\mathbb{R}) \ni (f,\phi,\psi) \mapsto \sigma^2_{f,\phi}(\psi)$ é C^{r-1}.

$\square$

Referências

[AKM65] Adler, R.; Konheim, A. and McAndrew, M. *Topologycal entropy.* Trans. Amer. Math. Soc., 114:309-319, 1965.

[AM06] Arbieto, A.; Matheus, C. *Fast decay of correlations of equilibrium states of open classes of non-uniformly expanding maps and potentials*, preprint http://www.preprint.impa.br, 2006.

[BaS08] Baladi, V.; Smania, D. *Linear response formula for piecewise expanding unimodal maps*, Nonlinearity, 2008, 21 677-711.

[BS09] Baladi, V and Smania, D. *Analyticity of the SRB measure for holomorphic families of quadratic-like Collet-Eckmann maps.* Proc. Amer. Math. Soc., 137: 1431-1437, 2009.

[BS12] Baladi, V.; Smania, D. *Linear response for smooth deformations of generic nonuniformly hyperbolic unimodal maps.* Annales scientifiques de l'ENS, 861-926, 2012.

[Bir57] G. Birkhoff. Extension of Jentzsch's theorem. *Trans. A.M.S.*, 85, 219-227, 1957.

[Bom14] Bomfim, T. *Contribuições para o estudo do operador de transferência, linear response formula e análise multifractal*, Salvador: UFBA, 2014.

[BCV16] Bomfim, T.; Castro, A.; Varandas, P. Differentiability of thermodynamical quantities in non-uniformly expanding dynamics. *Advances in Math.*, 2016.

[BC17] Bomfim, T. and Castro, A. Linear response, and consequences for differentiability of statistical quantities and Multifractal Analysis. *preprint*, 2017.

[BK83] Brin, M. and Katok, A. *On local entropy.* In Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), volume 1007 of Lectures Notes in Mathematics, pages 30-38. Springer, 1983.

[Cas08] Castro, A. *Curso de Teoria da Medida.* 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 193 p. (Projeto Euclides)

[CV13] Castro, A and Varandas, P. *Equilibrium states for non-uniformly expanding maps: decay of correlations and strong stability*, preprint 2013.

[Cha85] S. B. Chae. Holomorphy and calculus in normed spaces. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, New York: M. Dekker, 1985.

[DG75] Guzman, M. *Differentiation of integrals in Rn*, volume 481 of Lect. Notes in Math. Springer Verlag, 1975.

[Dol04] Dolgopyat, D. *On differentiability of SRB states for partially hyperbolic systems.* Invent. Math., 155, 389-449, 2004.

[Dun58] Dunford, N. and Schwartz, J. T. *Linear operators Spectral Theory*, vol. I e II. Interscience Publishers, New York, 1958

[Fr79] Franks, J. *Manifolds of C^r Mappings and Applications to Differentiable Dynamical Systems.* Studies in Analysis. Advances in Mathematics Supplementary Studies, vol 4, 271-290. Academic Press, 1979.

[GL06] Gouezel, S. e Liverani, C. *Banach spaces adapted to Anosov systems Ergod.* Th. Dynam. Sys. , 26, 189-217, 2006.

[K95] Kato, T. *Perturbation theory for linear operators.* Classics in mathematics. Berlin: Springer, 1995.

[KB95] Katok, A.; Hasselblatt, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Encyclopedia of mathematics and its applications, v. 54, New York: Cambridge University Press, 1995.

[KKPW89] Katok, A.; Knieper, G.; Pollicott, M. and Weiss, H. *Differentiability and analyticity of topological entropy for Anosov and geodesic flows.* Inventiones Math., 98 581-597, 1989.

[La62] Lang, S. *Introduction of Differentiable Manifolds.* Wiley (Interscience), New York, 1962.

[Li95] Liverani, C. *Decay of correlations*, Annals of Math., 142 (1995), 239-301

[Mac05] Maciel, A. *Operador de Ruelle-Perron-Frobenius e Transformações Expansoras.* Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, março de 2005. 124 p.

[Mañ87] R. Mañé. *Ergodic theory and differentiable dynamics.* Springer Verlag, 1987.

[PU10] Przytycki, F.; Urbanski, M. *Conformal fractals: ergodic theory methods.* London Mathematical Society lecture note series, 371, New York: Cambridge University Press, 354 p, 2010.

[Rud70] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1970. 412 p. (McGraw-Hill Series in Higher Mathematics)

[Rud91] Rudin, W. *Functional Analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991. 424 p. (McGraw-Hill Series in Higher Mathematics)

[Rue97] Ruelle, D. *Differentiation of SRB states*. Commun. Math. Phys. 187 227-41, 1997.

[Rue03] Ruelle, D. *Correction and complements*. Commun. Math. Phys. 234 185-90, 2003.

[Rue05] Ruelle, D. *Differentiating the absolutely contimuous invariant measure of an interval map f with respect to f.* Commun. Math. Phys., 258, 2005.

[Rue09] Ruelle, D. *A review of linear response theory for general differentiable dynamical systems*, Nonlinearity 22 : 855-870, 2009.

[VV10] Varandas, P. and Viana, M. *Existence, uniqueness and stability of equilibrium states for non-uniformly expanding maps.* Annales de l'Institut Henri Poincaré- Analyse Non-Linéaire, 27:555-593, 2010.

[Vi97] Viana, M. *Stochastic Dynamics of Deterministic Systems*. Rio de Janeiro: IMPA, 1997. (Publicações dos Colóquios de Matemática, 21º CBM)

[VO14] Viana, M.; Oliveira, K. *Fundamentos da Teoria Ergódica.* Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[Wal82] Walters, P. *An introduction to ergodic theory*. Springer Verlag, 1982.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

---

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 - 110
<http://www.pgmat.ufba.br>