Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática
Programa de Pós Graduação em Matemática

Propriedades Ergódicas de Sistemas com Especificação

Anderson Reis da Cruz

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2013

Propriedades Ergódicas de Sistemas com Especificação

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas.

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2013

Cruz, Anderson Reis da.

Propriedades Ergódicas de Sistemas com Especificação / Anderson Reis da Cruz. – Salvador: UFBA, 2013.

59 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2013.

Referências bibliográficas.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Teoria Ergódica. 3. Especificação. 4. Medidas Invariantes. 5. Pressão Topológica. I. Varandas, Paulo César R. Pinto. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 517.938

: 519.218.84

Propriedades Ergódicas de Sistemas com Especificação.

Anderson Reis da Cruz

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 27 de fevereiro de 2013.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Manuel Stadlbauer
UFBA

Prof. Dr. Eduardo Garibaldi
UNICAMP

A memória de Victor César.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tornar isto possível. Aos meus pais, Nilda e Ambrosio, pelo apoio incondicional às minhas decisões e pela formação da pessoa que hoje sou. Agradeço a Dayana pela compreensão e incentivo.

Ao professor Paulo Varandas pela orientação, disponibilidade e paciência, além de sua contribuição na evolução do meu modo de pensar e estudar a Matemática. Aos professores Manuel Stadlbauer e Eduardo Garibaldi por terem aceitado participar da comissão julgadora desta dissertação.

Agradeço a Marcus Morro, com quem tive a oportunidade de compartilhar bons momentos desde a graduação. Aos colegas: Ângela, Darlan, Edward, Elaine, Elen, Raimundo, pelos momentos de descontração e resenhas. A Thiago Bomfim, Andressa e Roberto, por sempre estarem dispostos a ajudar durante as disciplinas das quais tive o privilégio de cursarmos juntos. A Luiz, pelas conversas e conselhos nestes dois anos de curso.

Aos funcionários e professores do Departamento de Matemática da UFBA, pelo seu profissionalismo.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão de mais esta etapa da minha vida.

Finalmente, a CAPES pelo apoio financeiro.

"O único homem que está isento de erros é aquele que não arrisca acertar"
Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho estudamos sistemas que satisfazem a propriedade de especificação do ponto de vista da teoria ergódica. Apresentamos duas consequências interessantes dessa propriedade: a primeira, conforme Sigmund, é que o conjunto de medidas com suporte em órbitas periódicas é denso no conjunto de medidas invariantes. A partir disto teremos que o conjunto de medidas atômicas, de medidas abertas e de medidas ergódicas são vazios ou residuais no espaço de medidas invariantes. A segunda, conforme Thompson, é que o conjunto dos pontos cuja média de Birkhoff não converge ou é vazio ou tem pressão topológica total. Apresentamos ainda uma aplicação deste último resultado a fluxos de suspensão.
Palavras-chave: Teoria Ergódica; Especificação; Medidas Invariantes;Conjunto Irregular; Pressão Topológica; Fluxos de Suspensão.

Abstract

In this work we study systems with the specification property from the pointview of ergodic theory. We present two consequences of this property: the first, as Sigmund, is that the set of measures with support in periodic orbits is dense in the set of invariant measures. From this we obtain that the set of non atomic measures, the set of open measures and the set of ergodic measures are either empty or residual in the space of invariante measures. The second, as Thompson, is that the set of points whose the Birkhoff average not exists is either empty or has full topological pressure. We give an application of this result for suspension flows.
Keywords: Ergodic Theory; Specification; Invariant Measures; Irregular Set; Topological Pressure; Suspension Flows.

Sumário

Introdução

Dado um sistema dinâmico (X, f) onde X é um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma aplicação contínua, uma questão interessante diz respeito da existência de pontos periódicos para tal dinâmica. Gostaríamos de saber, por exemplo, do ponto de vista topológico, sob que condições tais pontos são abundantes no espaço. Se (X, f) satisfaz a especificação, temos que $Per(f) := \{x \in X; x \text{ é periódico}\}$ é um conjunto denso em X.

Mas o que vem a ser a propriedade de especificação? Em [3], Bowen, no estudo da distribuição dos pontos periódicos para difeomorfismos que satisfazem o Axioma A de Smale, mostrou que, para homeomorfismos cujo conjunto instável de qualquer ponto periódico é denso no espaço, é possível aproximar trechos finitos de órbita (em quantidade também finita) por uma órbita periódica, o que ele chamou de especificação.

Mais precisamente, seja $f : X \to X$ um homeomorfismo de um espaço métrico compacto (X, d), dizemos que f é $C-$denso se o conjunto instável de p, ou seja, $W^u(p) := \{y \in X : d(f^{-n}(p), f^{-n}(y)) \to 0 \text{ quando } n \to \infty\}$ é denso em X para todo ponto $p \in X$ periódico. Bowen mostrou então que:

Teorema 0.0.1 (Bowen,1971)**.** *Suponha $f : X \to X$ um homeomorfismo C-denso e $\epsilon > 0$. Então existe $m(\epsilon)$ tal que dados $x_1, ..., x_k \in X$, $\mathcal{I} = \{I_1, ..., I_k\}$, onde $I_j := [a_j, b_j] := \{k \in \mathbb{Z} : a_j \leq k \leq b_j\}$, satisfazendo $a_j - b_{j-1} \geq m(\epsilon)$, $\forall j = 2, ..., k$ e $p \geq m(\epsilon) + b_k - a_1$ existe um ponto periódico $x \in X$ de período p que satisfaz:*

$$d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon, \ \forall k \in I_j, \ \forall j = 1, ..., k.$$

Diremos então que uma aplicação contínua $f : X \to X$ de um espaço métrico compacto (X, d) satisfaz a propriedade de especificação se satisfaz o teorema acima. Como veremos adiante, um exemplo simples de aplicação contínua que satisfaz a especificação é o shift completo num alfabeto finito. Considerando $X := \{1, ..., n\}^{\mathbb{N}}$ podemos munir este espaço de uma métrica que o torna compacto e a aplicação $\sigma : X \to X$ dada por $\sigma((i_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((i_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$ contínua. Note que para este sistema é fácil construirmos pontos periódicos, basta tomarmos uma sequência finita de símbolos e concatená-la para formar uma sequência em X.

Temos que se existe uma aplicação contínua e sobrejetiva $\phi : X \to Y$ onde (X, d) e (Y, d) são espaços métricos compactos tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$ com $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ aplicações contínuas, então se f satisfaz a propriedade de especificação então g também satisfaz. Tal fato, nos dá outros exemplos como a família Manneville Pomeau, indexada por $\alpha \in [0, 1]$ dada por $f_\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$, $f_\alpha(t) = t + t^{1+\alpha} \mod 1$. Vista como aplicação de S^1 temos que f_α é contínua e é conjugada ao shift num alfabeto de dois símbolos, o que significa que existe um homeomorfismo $\phi : S^1 \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $\phi \circ f_\alpha = \sigma \circ \phi$.

Em [1] temos que toda aplicação topologicamente mixing no intervalo satisfaz a especificação. E no intervalo estas são todas as aplicações que satisfazem a propriedade.

A noção de especificação tornou-se uma ferramenta muito útil em sistemas dinâmicos, tanto do ponto de vista da teoria geométrica como da teoria da medida. Bowen em [4] mostrou que se f é um homeomorfismo expansivo então dada uma função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$, com algumas hipóteses sobre sua variação, existe e é único estado de equilíbrio de f com respeito a φ. Lembramos que $f : X \to X$ é dita ser expansiva se existe ϵ tal que $x \neq y$ implica a existência de $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$. Em [8], Haydn e Ruelle mostraram que, neste mesmo contexto, este único estado de equilíbrio é um estado de Gibbs.

No presente trabalho optamos por apresentar uma caracterização do espaço de medidas invariantes para sistemas que satisfazem a propriedade de especificação, destacando alguns subconjuntos que, do ponto de vista topológico, são grandes neste espaço. Como, por exemplo, o conjunto de medidas com suporte em órbitas periódicas, que veremos ser denso nas medidas invariantes, o conjunto das medidas não atômicas, ou seja, cujos pontos tem medida nula e o conjunto das medidas abertas são residuais neste espaço. Apresentaremos ainda o teorema devido a Thompson ([19]) que diz que o conjunto dos pontos cuja média de Birkhoff não converge, dado um sistema com especificação ou é vazio ou tem pressão topológica total.

No capítulo 1, apresentamos alguns resultados gerais de teoria ergódica, como o Teorema de Birkhoff e o Teorema da Decomposição Ergódica, além de tópicos de teoria da medida e uma visão geral sobre o conceito de especificação.

No capítulo 2, segundo [15] vamos estabelecer a caracterização topológica do espaço de medidas invariantes para f que satisfaz especificação.

Finalmente, no capítulo 3, veremos que o conjunto irregular, ou seja, dos pontos cuja média de Birkhoff não converge, ou é vazio ou tem pressão topológica total.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 O espaço de medidas

Considere (X, d) um espaço métrico compacto.

Definição 1.1.1. Dizemos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma σ-álgebra de conjuntos se satisfaz as seguintes condições:

(i) $X \in \mathcal{A}$;

(ii) se $A \in \mathcal{A}$ então $A^C \in \mathcal{A}$;

(iii) se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ então $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Observe que se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra então $\emptyset \in \mathcal{A}$, por i e ii. Temos ainda que $\mathcal{A}$ será fechada para interseções enumeráveis pois se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ então $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = (\cup_{i=1}^{\infty} A_i^C)^C$.

Definição 1.1.2. Uma medida μ definida numa σ-álgebra $\mathcal{A}$ é uma aplicação $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ são dois a dois disjuntos

Se $\mu(X) = 1$ dizemos que μ é uma probabilidade. Consideraremos a partir daqui a σ-álgebra $\mathcal{B}(X)$ gerada pela topologia de X, em outras palavras $\mathcal{B}(X)$ é a menor σ-álgebra que contém os abertos de X. Chamamos $\mathcal{B}(X)$ de σ-álgebra de Borel e a medida nela definida de boreliana. Denotaremos por $\mathfrak{M}(X)$ o conjunto de todas as probabilidades borelianas.

Dada $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ e um conjunto $\Phi := \{\phi_1, ..., \phi_r\} \subset C(X)$, $C(X)$ o espaço das funções contínuas em X, defina $V(\mu, \Phi, \epsilon) := \{\nu \in \mathfrak{M}(X) : |\int \phi_j d\mu - \int \phi_j d\nu| < \epsilon, \ \forall j = 1, ..., r\}$. Considerando a família $\mathcal{V}_\mu := \{V(\mu, \Phi, \epsilon) : \Phi \subset C(X) \text{ é finito}, \ \epsilon > 0\}$ temos uma base de vizinhanças para cada $\mu \in \mathfrak{M}(X)$. Definimos então em $\mathfrak{M}(X)$ a topologia fraca* como a topologia gerada por essa base de vizinhanças. Temos que:

Teorema 1.1.3. *Seja $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathfrak{M}(X)$. Então μ_n converge a μ na topologia fraca*, $\lim_{n\to\infty}\mu_n \overset{w*}{=} \mu$, se e somente se $\lim_{n\to\infty}\int \phi d\mu_n = \int \phi d\mu$, $\forall \phi \in C(X)$. Ademais temos que $\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F) \leq \mu(F)$ para todo F subconjunto fechado de X e $\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A) \geq \mu(A)$ para todo A subconjunto aberto de X.*

Tal resultado é um caso particular do *Teorema 6.1* do Capítulo II de [13].

Conforme *Teoremas 6.4* e *6.5* de [20] temos:

Teorema 1.1.4. *Se X é um espaço compacto e metrizável então $\mathfrak{M}(X)$ é compacto na topologia fraca* e metrizável.*

Definição 1.1.5. Uma aplicação $f : X \to X$ é dita mensurável se $\forall A \in \mathcal{B}(X)$ temos $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$.

Definição 1.1.6. Seja $f : X \to X$ uma aplicação mensurável, dizemos que $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ é f-invariante se $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}(X)$. Denotamos por $\mathfrak{M}_f(X)$ o conjunto de todas as medidas f-invariantes.

Temos a seguinte caracterização para uma medida f-invariante, conforme [20, Teorema 6.8]:

Teorema 1.1.7. *Seja $f : X \to X$ aplicação contínua. $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$ se, e somente se $\int \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu$, $\forall \phi \in C(X)$.*

Além disso a existência de medidas invariantes é sempre garantida se a dinâmica é contínua, como em [20, Teorema 6.9]:

Teorema 1.1.8. *Se $f : X \to X$ é contínua então $\mathfrak{M}_f(X) \neq \emptyset$.*

Definição 1.1.9. $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$ é dita ergódica com respeito a $f : X \to X$ ou f-ergódica, se dado $A \subset X$ f-invariante, isto é, $f^{-1}(A) = A$, então $\mu(A)\mu(A^C) = 0$. Denotemos por $\mathfrak{M}_e$ o conjunto das medidas ergódicas.

Dada $f : X \to X$ e $x \in X$ defina $\mu_x := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}$ quando tal limite existir. Lembramos que δ_y é a medida de Dirac em $y \in X$, isto é, $\delta_y(A) = 0$ se $y \notin A$ e $\delta_y(A) = 1$ caso contrário. Definimos também

$$\Sigma(f) := \{x \in X : \mu_x \text{ é } f\text{-invariante e ergódica}\}.$$

Conforme resultados da *Seção 6* do *Capítulo 2* de [10], mostra-se que $\Sigma(f)$ tem probabilidade total, ou seja, $\mu(\Sigma(f)) = 1$ para toda $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$. Temos o seguinte resultado.

Teorema 1.1.10 (Decomposição Ergódica)**.** *Sejam $f : X \to X$ uma aplicação mensurável e $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$. Então para toda $\phi \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ é μ_x-integrável para μ q.t.p. $x \in \Sigma(f)$ e*

$$\int_X \phi d\mu = \int_X \left(\int_X \phi d\mu_x \right) d\mu.$$

Veja [10, Teorema 6.4].

1.2 Especificação

Considere $\mathcal{M}$ uma variedade compacta e $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ um difeomorfismo, por simplicidade. Alguns dos resultados e definições valem para o caso f não invertível. Definimos:

Definição 1.2.1. Dizemos que $p \in \mathcal{M}$ é um ponto periódico para f se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(p) = p$. Denotaremos por $Per(f)$ o conjunto de pontos periódicos para f. Dizemos que $p \in \mathcal{M}$, tem período n, se $n = min\{m \geq 1 : f^n(p) = p\}$. Denotaremos por $Per_n(f)$ o conjunto do pontos periódicos de f de período n.

Definição 1.2.2. Definimos o conjunto não-errante de f como

$$\Omega(f) := \{x \in \mathcal{M} : \text{para toda vizinhança } U \text{de } x, \text{existe } n > 0 \text{ tal que } f^n(U) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Claramente o conjunto de pontos periódicos de f está contido em $\Omega(f)$. Temos ainda que $\Omega(f)$ é um subconjunto fechado e f-invariante. De fato, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\Omega(f)$ com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathcal{M}$, dada uma vizinhança aberta U de x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, $\forall n \geq n_0$. Então como $x_n \in U$ temos que existe $V_{x_n} \subset U$ aberto tal que $x_n \in V_{x_n}$ para cada $n > n_0$. Fixe $n > n_0$, como $x_n \in \Omega(f)$ temos que existe $m \geq 1$ tal que $f^m(V_{x_n}) \cap V_{x_n} \neq \emptyset$, logo $f^m(U) \cap U \neq \emptyset$ e portanto $x \in \Omega(f)$.

Por outro lado temos que se $x \in f(\Omega(f))$ então $x = f(y)$ com $y \in \Omega(f)$. Seja V uma vizinhança de x, temos que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de y, logo existe $n > 0$ tal que $f^n(f^{-1}(V)) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ donde $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. Portanto $x \in \Omega(f)$, ou seja $f(\Omega(f)) \subseteq \Omega(f)$. A reciproca é facilmente verificada, já que supomos f um difeomorfismo, logo $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$.

Definição 1.2.3. Seja μ uma medida, então o conjunto

$$supp(\mu) := \{x \in \mathcal{M} : \mu(U) > 0, \text{para toda vizinhança } U \text{ de } x\}$$

é dito o suporte de μ.

Observação 1.2.4. Se μ é uma medida de probabilidade f-invariante então $supp\mu \subseteq \Omega(f)$. De fato, se $x \in supp(\mu)$ e U é vizinhança de x, então $\mu(U) > 0$ e pelo teorema de recorrência de Poincaré, para μ-q.t.p. $y \in U$ existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} = (n_k(y))_{k\in\mathbb{N}}$ com $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ tal que $f^{n_k}(y) \in U$. Em particular, existe m tal que $f^m(U)\cap U \neq \emptyset$. Portanto $x \in \Omega(f)$.

Em [3], Bowen estudou a distribuição de pontos periódicos para uma classe de difeomorfismos estabelecida por Smale, cuja definição segue abaixo:

Definição 1.2.5. $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é difeomorfismo Axioma A se:

1. $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$.

2. $\Omega(f)$ é um conjunto hiperbólico.

Lembre que $\Lambda \subseteq \mathcal{M}$ é um conjunto hiperbólico para f se Λ é compacto e f-invariante e para todo $x \in \Lambda$ temos que $T_x\mathcal{M}$ admite uma decomposição $T_x\mathcal{M} = E^s \oplus E^u$ Df-invariante tal que existem $\lambda \in (0,1)$ e $c > 0$ que satisfazem $\|Df^n(x)|_{E^s}\| \leq c\lambda^n$ e $\|Df^{-n}(x)|_{E^u}\| \leq c\lambda^n$, para todo $n \geq 1$.

Para essa classe de difeomorfismos em [17, Teorema 6.2] temos a seguinte caracterização do conjunto não-errante para f :

Teorema 1.2.6 (Teorema da Decomposição Espectral de Smale)**.** *Se f é um difeomorfismo Axioma A então existe única decomposição de $\Omega(f)$ em união finita de subconjuntos fechados, disjuntos, invariantes e indecomponíveis, $\Omega(f) = \Omega_1\dot{\cup}...\dot{\cup}\Omega_k$, tal que $f|_{\Omega_i}$ é topologicamente transitivo para $i = 1, ..., k$. Cada Ω_i é chamado de conjunto básico para f.*

A partir deste teorema, temos que toda medida f-invariante pode ser escrita como combinação de medidas suportadas em conjuntos básicos. Isto nos permite analisar o difeomorfismo f a partir de $f_i := f|_{\Omega_i},\ i = 1, ..., l$.

Definição 1.2.7. Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ um difeomorfismo. Definimos $W^u(x) := \{y \in \mathcal{M} : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0, \text{ quando } n \to -\infty\}$ como o conjunto instável de x. Dizemos que f é C-denso se $W^u(x)$ é denso em $\mathcal{M}$, para todo $x \in \mathcal{M}$ periódico.

Em [3], temos:

Teorema 1.2.8 (Teorema de Decomposição C-Densa)**.** *Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ um difeomorfismo Axioma A, em uma variedade compacta $\mathcal{M}$. Então, dado Ω_i conjunto básico para f da decomposição espectral de Smale podemos escrever $\Omega_i = \Omega_{i,1}\dot{\cup}...\dot{\cup}\Omega_{i,m_i}$ com $\Omega_{i,k}$ fechado para cada $k = 1, ..., m_i$ e $f(\Omega_{i,k}) = \Omega_{i,k+1}$ ($\Omega_{i,m_i+1} = \Omega_{i,1}$) e $f_i^{m_i} : \Omega_{i,j} \to \Omega_{i,j}$ é C-denso para $j = 1, .., m_i$.*

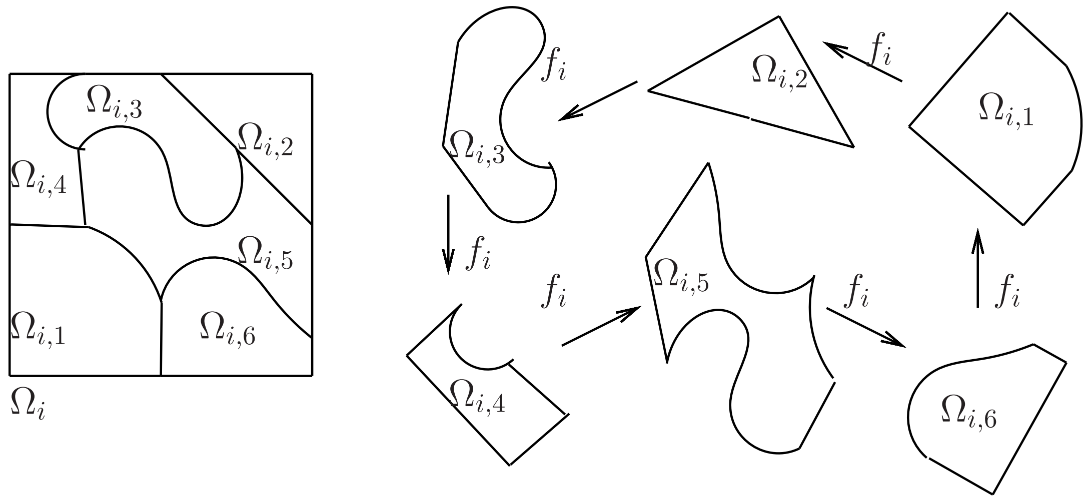

Figura 1.2.1: Decomposição C-densa de um conjunto básico.

Temos então a noção de especificação introduzida por Bowen, e o resultado por ele obtido para transformações C-densas.

Definição 1.2.9. Uma especificação é um par (γ, P), onde $\gamma = \{I_1, ..., I_n\}$, com I_j conjuntos finitos e disjuntos de naturais consecutivos e P uma aplicação tal que $P : \cup_{j=1}^{n} I_j \to X$ satisfazendo que $f^{t_2 - t_1}(P(t_1)) = P(t_2)$ se $t_1, t_2 \in I_j$. Se (γ, P) é uma especificação e $\delta > 0$ definimos $U(\gamma, P, \delta) = \{x \in X : d(f^t(x), P(t)) < \delta, \forall t \in \cup_{j=1}^{n} I_j\}$. Ordenando γ ,sem perda de generalidade, de modo que, denotando $I_j = [a_j, b_j]$, tenhamos $a_j > b_{j-1},\ j = 2, ..., n$ dizemos que (γ, P) é M-afastada se $M \leq \min\limits_{2 \leq j \leq n} |a_j - b_{j-1}|$ e definimos o comprimento de γ como $L(\gamma) := b_n - a_1$.

Teorema 1.2.10 (Teorema de Especificação de Bowen)**.** *Se f é C-denso então para $\delta > 0$ existe um inteiro $M(\delta)$ tal que, sempre que (γ, P) é uma especificação $M(\delta)$-afastada e k um inteiro tal que $k \geq M(\delta) + L(\gamma)$, existe um ponto periódico de período k pertencente a $U(\gamma, P, \delta)$.*

A especificação definida acima é simplesmente uma associação entre intervalos de naturais e trechos de órbitas de f. O conjunto $U(\gamma, P, \delta)$ representa o conjunto dos pontos cuja órbita está δ-próxima das órbitas associadas pela especificação. E o Teorema de Especificação, garante que se f é C-denso então essa aproximação pode ser feita por pontos periódicos.

Consideremos a partir daqui $f : X \to X$ como uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto (X, d). Diremos que f satisfaz a propriedade de especificação se para quaisquer trechos de órbita ocorre o fenômeno acima, ou seja, existe um ponto periódico cuja órbita aproxima as órbitas dadas. Mais precisamente, usaremos a seguinte formulação da propriedade de especificação, devida a Ruelle, por simplicidade notacional.

Definição 1.2.11. Dizemos que f satisfaz a propriedade de especificação se para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro $m := m(\epsilon)$ tal que dados $x_1, x_2, ..., x_k \in X$, inteiros $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq ... \leq a_k \leq b_k$ com $a_j - b_{j-1} \geq m(\epsilon),\ \forall j = 2, ..., k$ e $p \geq b_k + m(\epsilon)$ existe um ponto $x \in X$ periódico de período p tal que

$$d(f^{j+a_i}(x), f^j(x_i)) < \epsilon,\ \forall j = 0, ..., b_i - a_i \tag{1.2.1}$$

Exemplo 1.2.12. Considere o shift completo de dois símbolos

$$\begin{aligned} \sigma \ : \ & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ & (i_0, i_1, i_2, ...) \mapsto (i_1, i_2, ...) \end{aligned}$$

Vejamos que tal aplicação satisfaz a especificação.

Temos que $d : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0, \infty)$ dada por $d(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta(a_i, b_i)$ (onde $\delta(a_i, b_i) = 1$ se $a_i = b_i$ e $\delta(a_i, b_i) = 0$, caso contrário) define uma distância em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Temos ainda que $d(\bar{a}, \bar{b}) < \epsilon$ se, e somente se, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = b_i\ \forall 0 \leq i \leq n(\epsilon)$, como pode ser visto em [7, Subseção 7.3.4].

Sejam $\bar{y} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, inteiros $a \leq b$ e $\epsilon > 0$, arbitrários. Seja $m(\epsilon) = a + n(\epsilon)$ com $n(\epsilon)$ como acima. Para $p \geq b - a + m(\epsilon)$ vamos exibir $\bar{x}$ que satisfaça (1.2.1). Seja x_i a i-ésima coordenada de $\bar{x}$. Defina x_i arbitrariamente para $i = 1, ..., a-1$. Para $i = a, ..., b, b+n(\epsilon)$ defina $x_i := y_i$. Para $i = b+n(\epsilon)+1, ..., p$ definamos x_i aleatoriamente. Denotemos $\bar{x}_p = (x_1, ..., x_p)$. Então fixemos $\bar{x} := (\bar{x}_p, \bar{x}_p, \bar{x}_p, ...)$. Não é difícil ver que $\bar{x}$ assim definido tem período p e satisfaz (1.2.1). Com um argumento análogo verificamos que vale para qualquer conjunto finito de pontos.Concluímos assim que o shift completo satisfaz especificação.

De fato o shift completo, tanto unilateral como bilateral, de k símbolos satisfaz especificação, qualquer que seja o $k \in \mathbb{N}$, já que o raciocínio utilizado acima funciona independentemente da quantidade de símbolos.

Proposição 1.2.13. *Sejam $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ aplicações contínuas nos espaços métricos (X, d) e (Y, d'). Temos:*

(a) Se f satisfaz especificação então $f^k : X \to X$ também satisfaz especificação $\forall\ k \geq 1$.

(b) Se existir $\phi : X \to Y$ contínua sobrejetiva tal que $g \circ \phi = \phi \circ f$ e f satisfaz especificação então g satisfaz especificação.

Prova:

$\boxed{(a)}$

Suponha $f : X \to X$ satisfazendo a especificação. Dado $\epsilon > 0$ seja $\hat{m}(\epsilon) = \left[\frac{m(\epsilon)}{k}\right] := \min\{z \in \mathbb{N}; z \geq \frac{m(\epsilon)}{k}\}$ onde $m(\epsilon)$ é dado pela propriedade de especificação para

f. Sejam $x_1, ..., x_s \in X$ e $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq ... \leq a_s \leq b_s$ inteiros com $a_j - b_{j-1} \geq \hat{m}(\epsilon)$. Então $ka_j - kb_{j-1} \geq m(\epsilon)$. Dado $p \geq b_s - a_1 + \hat{m}(\epsilon)$ temos $np \geq kb_s - ka_1 + m(\epsilon)$.

Segue então que existe $x \in X$ periódico de período kp para f tal

$$d(f^{j+na_i}(x), f^j(x_i)) < \epsilon, \ \forall j = 0, ..., kb_i - ka_i, \ \forall i = 1, ..., s$$

Então

$$d(g^{r+a_i}(x), g^r(x_i)) < \epsilon, \ \forall r = 0, ..., b_i - a_i, \ \forall i = 1, ..., s$$

onde $g = f^k$ Portanto f^k satisfaz especificação.

$\boxed{(b)}$

Dados $\epsilon > 0$, $y_1, ..., y_s \in X$ e inteiros $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq ... \leq a_s \leq b_s$. Sejam $x_1, ..., x_s$ tais que $\phi(x_i) = y_i$. Como X é compacto, ϕ é uniformemente contínua. Logo existe $\delta > 0$ tal que $d(w, z) < \delta \Rightarrow d'(\phi(w), \phi(z)) < \epsilon$. Temos por hipótese que existe $m(\delta)$ tal que para $p \geq b_s - a_1 + m(\delta)$ existe $x \in X$ periódico de período p satisfazendo:

$$d(f^{j+a_i}(x), f^j(x_i)) < \delta, \ \forall j = 0, ..., b_i - a_i, \ \forall i = 1, ..., s.$$

Logo,

$$d'(\phi(f^{j+a_i}(x)), \phi(f^j(x_i))) < \epsilon, \ \forall j = 0, ..., b_i - a_i, \ \forall i = 1, ..., s.$$

Mas então,

$$d'(g^{j+a_i}(\phi(x)), g^j(\phi(x_i))) < \epsilon, \ \forall j = 0, ..., b_i - a_i, \ \forall i = 1, ..., s.$$

Portanto,

$$d'(g^{j+a_i}(\phi(x)), g^j(y_i)) < \epsilon, \ \forall j = 0, ..., b_i - a_i, \ \forall i = 1, ..., s \Rightarrow$$

Assim tomando $m(\epsilon) = m(\delta)$ encontramos $y := \phi(x)$ periódico de período p satisfazendo (1.2.1). Portanto g satisfaz especificação.

□

No caso em que ocorre o item (b) da proposição acima, dizemos que f e g são semi-conjugados. Caso ϕ seja um homeomorfismo dizemos que f e g são topologicamente conjugados. Deduz-se portanto que a propriedade de especificação é um invariante topológico.

Exemplo 1.2.14. Seja $f : [0, 1]/ \sim \to [0, 1]/ \sim$ dada por $f(x) = 2x(\mod 1)$, onde $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$. Considere $\phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1]/ \sim$ dada por $\phi(a_0, a_1, a_2, ...) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$. Temos que ϕ é contínua e sobrejetiva e $f \circ \phi = \phi \circ \sigma$, portanto σ e f são semi-conjugados. Logo pela proposição, f satisfaz a especificação.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 1.2.2: Sistemas conjugados.

Como no exemplo do shift, $f(x) = \beta x(\mod 1)$ satisfaz a especificação $\forall \beta \in \mathbb{N}$, valendo a semi-conjugação com o shift de β símbolos. Mais ainda, o conjunto dos β tal que $\beta x(\mod 1)$ satisfaz especificação é denso em $[1, +\infty)$, como mostrado em [6].

Definição 1.2.15. Dizemos que $f : X \to X$ é topologicamente mixing se dados quaisquer abertos não vazios U e V existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.

Temos então o seguinte resultado devido a Blokh:

Teorema 1.2.16. *Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma aplicação contínua. Então f satisfaz a propriedade de especificação se e somente se f é topologicamente mixing.*

A prova deste resultado pode ser vista em [1] ou [6]. Notamos que, em geral, se $f : X \to X$ satisfaz especificação então f é topologicamente mixing e o conjunto de pontos periódicos é denso, sendo a recíproca válida neste contexto unidimensional.

1.3 Teorema Ergódico de Birkhoff

Considere um conjunto $E \subset X$ e uma transformação $f : X \to X$, mensurável. Dado um ponto $x \in X$ gostaríamos de estimar a frequência de visita da órbita deste ponto ao conjunto E. Podemos calcular o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n : f^j(x) \in E\}$ que nos fornecerá em média por quanto tempo, em termos de iterados, a órbita de x intersecta E. Contudo, tal limite em geral não existe. Por exemplo se considerarmos $E := \{f^{10^j}(x), f^{10^j+1}(x), ..., f^{10^{j+1}-1}(x) : j \in \{1,3,5,7,...\}\}$ temos que tal limite não existe. Denotemos

$$\tau(E, x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n : f^j(x) \in E\}.$$

Observe que podemos reescrever $\tau(E, x)$ como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_E \circ f^j(x)$, o que nos leva a questão mais geral: dada uma função $\phi : X \to \mathbb{R}$ e uma transformação $f : X \to X$ existe $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j(x)$? No contexto da Física, tal limite representa o comportamento de uma determinada quantidade observável, ϕ, ao longo da trajetória de um ponto x no espaço pela dinâmica f. Nesta direção temos o seguinte resultado devido a George David Birkhoff, cuja demonstração pode ser vista em [10, Teorema 1.1, Capítulo II]:

Teorema 1.3.1 (Birkhoff). *Sejam $f : X \to X$ uma transformação mensurável, $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$ e $\phi \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Temos:*

(a) $\tilde{\phi}(x) := \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j(x)$ existe para μ q.t.p. $x \in X$

(b) $\int \tilde{\phi} d\mu = \int \phi d\mu$

Ademais, se $\mu \in \mathfrak{M}_e$ temos que $\tilde{\phi}(x) = \int \phi d\mu$ para μ q.t.p. $x \in X$.

Dada $\phi \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ denotaremos $S_n\phi(x) := \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j(x)$ a n-ésima soma de Birkhoff do ponto x. A $\frac{1}{n}S_n\phi(x)$ nos referimos a n-ésima média de Birkhoff do ponto x. Note que a sequência $(S_n\phi(x))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz $S_{n+m}\phi(x) = S_n\phi(x) + S_m\phi(f^n(x))$.

Exemplo 1.3.2. Considere $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}x$, temos que a única medida invariante para tal sistema é a Dirac em 0, δ_0. De fato, em virtude do teorema de recorrência de Poincaré, se $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$ então $supp(\mu) \subset Rec(f) := \{y \in [0, 1] :$ para toda vizinhança V de $y, \#\{n \in \mathbb{N} : f^n(y) \in V\} = \infty\} = \{0\}$. Então pelo teorema de Birkhoff, temos que dada $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1], \delta_0)$ existe um conjunto X_ϕ com $\delta_0(X_\phi) = 1$ tal que o limite acima existe para todo $x \in X_\phi$. Mas um conjunto tal que sua medida de Dirac é 1, do ponto de vista topológico, pode ser pequeno em $[0, 1]$, podendo ser por exemplo $\{0\}$. Ressaltamos assim, que a existência do limite das médias de Birkhoff, apesar de ocorrer em um conjunto grande do ponto de vista da medida, pode ser pequeno sob outras óticas.

Exemplo 1.3.3. Consideremos um campo vetorial suave no plano com dois pontos de sela, a e b, cujo retrato de fase está indicado na figura abaixo:

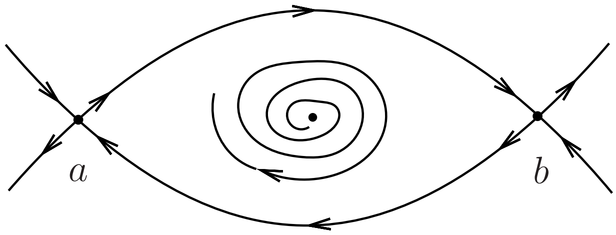

Figura 1.3.1: Olho de Bowen

Como pode ser visto em [18], podemos escolher os autovalores dos campos linearizados nas selas de modo que as órbitas sejam atraídas para o ciclo. Além disso, essa escolha pode ser feita tal que para uma função contínua φ em $\mathbb{R}^2$ com $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ temos que qualquer ponto do interior do ciclo que não seja a singularidade, não existe o limite de Birkhoff. A ideia é que dadas duas vizinhanças arbitrariamente pequenas das selas e um ponto x no interior do ciclo, sua órbita passa cada vez mais tempo nestas vizinhanças e muito mais rápido fora delas.

Definição 1.3.4. Seja (X, d) um espaço métrico, definimos a distância dinâmica associada ao tempo n como:

$$\begin{aligned} d_n \quad &: \quad X \times X \to [0, \infty) \\ &\quad (x, y) \mapsto d_n(x, y) := \max\{d(f^j(x), f^j(y)); j = 0, ..., n-1\}. \end{aligned}$$

De fato, d_n é uma distância para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam $x, y, z \in X$, temos que

$$d_n(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(f^j(x), f^j(y)) = 0 \text{ para todo } j = 0, ..., n-1.$$

Mas isto ocorre se, e somente se $x = y$. É claro que $d_n(x, y) = d_n(y, x)$. Finalmente

$$\begin{aligned} d_n(x, z) &= \max\{d(f^j(x), f^j(z)); j = 0, ..., n-1\} \\ &\leq \max\{d(f^j(x), f^j(y)) + d(f^j(y), f^j(z)); j = 0, ..., n-1\} \\ &\leq d_n(x, y) + d_n(y, z). \end{aligned}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ podemos definir a bola de raio ϵ segundo essa distância, que denotaremos por $B(x, n, \epsilon) := \{y \in X; d_n(x, y) < \epsilon\}$, a qual também denominaremos bola dinâmica de comprimento n, raio ϵ e centro em x.

Observação 1.3.5. Considere $\phi : X \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua, ou seja, tal que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ com $d(x, y) < \delta$ implica $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$, para todo $x, y \in X$. Então

$$d_n(x, y) < \delta \Rightarrow |\phi(f^j(x)) - \phi(f^j(y))| \leq \epsilon, \ \forall j = 0, 1, ..., n-1.$$

Assim,

$$|S_n\phi(x) - S_n\phi(x)| = \left| \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j(x) - \phi \circ f^j(y) \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |\phi \circ f^j(x) - \phi \circ f^j(y)| < n\epsilon.$$

Portanto $d_n(x, y) < \delta \Rightarrow |S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| < n\epsilon$. Isto nos dá uma estimativa de quão próximas ficam as médias de Birkhoff para pontos cujas órbitas permanecem também próximas.

Definição 1.3.6. Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$ definimos a variação de ϕ de raio ϵ como sendo $Var(\phi, \epsilon) := \sup\{|\phi(x) - \phi(y)|; d(x, y) < \epsilon\}$.

Observação 1.3.7. Considere $\phi : X \to \mathbb{R}$. Podemos fazer uma estimativa análoga a observação 1.3.5 usando a variação de ϕ. Temos que se $x, y \in X$ são tais que $d_n(x,y) < \epsilon$ então $|S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |\phi \circ f^j(x) - \phi \circ f^j(y)| \leq nVar(\phi, \epsilon)$.

Lema 1.3.8. *Seja* $\phi \in C(X)$ *tal que* $\phi = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n$ *na norma do* $\sup$ *com* $\phi_n \in C(X), \forall n \geq 1$. *Suponha que exista* $x \in X$ *tal que existe* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} S_k\phi_n(x), \forall n \geq 1$. *Então existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{k} S_k\phi(x)$.

Prova: Fixado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \|\phi - \phi_n\| < \frac{\epsilon}{3}$. Fixe $n \geq n_0$. Como, por hipótese, existe $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} S_k\phi_n(x)$ temos que $\left(\frac{1}{k} S_k\phi_n(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo, existe $k_0 \geq 1$ tal que $r, t \geq k_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{r} S_r\phi_n(x) - \frac{1}{t} S_t\phi_n(x)\right| < \frac{\epsilon}{3}$. Assim:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{r} S_r\phi(x) - \frac{1}{t} S_t\phi(x)\right| &\leq \left|\frac{1}{r} S_r\phi(x) - \frac{1}{r} S_r\phi_n(x)\right| + \left|\frac{1}{t} S_t\phi_n(x) - \frac{1}{r} S_r\phi_n(x)\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{t} S_t\phi_n(x) - \frac{1}{t} S_t\phi(x)\right| \\
&\leq \|\phi - \phi_n\| + \left|\frac{1}{t} S_t\phi_n(x) - \frac{1}{r} S_r\phi_n(x)\right| + \|\phi - \phi_n\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

$\forall r, t \geq k_0$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário temos que $\left(\frac{1}{k} S_k\phi(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo convergente.

□

1.4 Pressão topológica

Nesta seção definiremos os conceitos básicos de entropia, métrica e topológica, e pressão topológica que serão utilizados no capítulo 3. As definições aqui apresentadas e resultados sem demonstração podem ser consultados em [20]. A menos que se diga o contrário estaremos sempre considerando X um espaço métrico compacto e medidas borelianas em X.

Definição 1.4.1. Seja $\mu \in \mathfrak{M}(X)$. Uma partição de $X \mod \mu$ em borelianos é uma coleção enumerável $\mathbb{P} := \{P_i : i \in N \subset \mathbb{N}\}$ tal que $P_i \in \mathcal{B}(X), \forall i \in N$, $P_i \cap P_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ e $\mu(X \setminus \cup_{i\in N} P_i) = 0$. Dadas duas partições $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ dizemos que $\mathbb{Q}$ refina $\mathbb{P}$ (denotamos por $\mathbb{P} \leq \mathbb{Q}$) se para cada elemento $Q \in \mathbb{Q}$ existe $P \in \mathbb{P}$ tal que $Q \subset P$. Definimos ainda a partição $\mathbb{P} \vee \mathbb{Q} := \{P \cap Q : P \in \mathbb{P} \text{ e } Q \in \mathbb{Q}\}$. Dada uma transformação mensurável $f : X \to X$ temos $f^{-1}(\mathbb{P}) := \{f^{-1}(P) : P \in \mathbb{P}\}$.

Definição 1.4.2. Seja $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$ e $\mathbb{P}$ uma partição. Definimos a entropia de $\mathbb{P}$ com respeito a μ com a quantidade:

$$H_\mu(\mathbb{P}) := -\sum_{P\in\mathbb{P}} \mu(P) \log \mu(P). \tag{1.4.1}$$

Dizemos que

$$H_\mu(f,\mathbb{P}) := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathbb{P})) \tag{1.4.2}$$

é a entropia de f com respeito a partição $\mathbb{P}$. Por fim definimos a entropia métrica de f com respeito a μ como sendo

$$h_\mu(f) := \sup_{\mathbb{P}} H_\mu(f,\mathbb{P}) \tag{1.4.3}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas $\mod \mu$ de X.

De fato, o limite em (1.4.2) existe e o supremo acima pode ser tomado sobre o conjunto de todas as partições tais que $H_\mu < +\infty$, como pode ser visto em [10, Seção 4, Capítulo 4].

Note que o cálculo da entropia de uma dada transformação pode ser uma árdua tarefa, já que teríamos que fazer o cálculo sobre todas as partições possíveis. Temos então o seguinte teorema que nos permite em muitos casos analisar apenas uma partição em particular.

Teorema 1.4.3 (Kolmogorov-Sinai)**.** *Seja $f : X \to X$ mensurável. Se $\mathbb{P}$ é uma partição de X tal que $\bigcup_{n\geq 0}\bigvee_{j=0}^{n} f^{-j}(\mathbb{P}) = \mathcal{B}(X) = \mod \mu$ então $H_\mu(f,\mathbb{P}) = h_\mu(f)$.*

Exemplo 1.4.4. Seja $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ o shift. Considere a partição de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dada por $\mathbb{P} := \{C_0, C_1\}$ onde $C_0 := \{(i_0,i_1,i_2,...); i_0 = 0\}$ e $C_1 := \{(i_0,i_1,i_2,...); i_0 = 1\}$. Temos que $\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathbb{P}) = \{C_{i_0,i_1,...,i_{n-1}}; (i_0,i_1,...,i_{n-1}) \in \{0,1\}^n\}$ com $C_{i_0,i_1,...,i_{n-1}} := \{(j_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}; i_k = j_k,\ \forall k = 0,1,...,n-1\}$. Temos então que $\mathbb{P}$ é uma partição geradora e portanto $h_\mu(\sigma) := H_\mu(f,\sigma)$. Por exemplo se considerarmos μ a medida tal que $\mu(C_0) = \frac{1}{2} = \mu(C_1)$ e $\mu(C_{i_0,i_1,...,i_{n-1}}) = \frac{1}{2^n}$ teremos que $h_\mu(\sigma) = \log 2$.

Definição 1.4.5. Considere $f : X \to X$ uma transformação contínua e $E \subset X$. Dado $\epsilon > 0$ e $n \in N$ dizemos que E é um conjunto (n,ϵ)-separado se $\forall x,y \in E$ com $x \neq y$ temos que $d_n(x,y) \geq \epsilon$. Denotemos por $s(n,\epsilon)$ a maior cardinalidade de um conjunto (n,ϵ)-separado em X.

Definição 1.4.6. Defina:

$$s(\epsilon) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s(n,\epsilon).$$

Então a entropia topológica de uma transformação contínua $f : X \to X$ será dada por:

$$h_{top}(f) := \lim_{\epsilon\to 0} s(\epsilon).$$

Observação 1.4.7. Para definir a entropia topológica de uma transformação, podemos utilizar o conceito dual de conjunto separado, que é o de conjunto gerador. Dizemos que

$E \subset X$ é um conjunto (n,ϵ)-gerador se $\forall x \in X, \exists y \in E$ tal que $d_n(x,y) < \epsilon$. Neste caso, denotando $r(n,\epsilon)$ como a cardinalidade do menor conjunto (n,ϵ)-gerador para X, pode-se provar que:

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r(n,\epsilon).$$

Suponha que desejamos contar as órbitas distinguíveis de comprimento n da dinâmica f, ou seja, conjuntos da forma $\{x, f(x), f^2(x), ..., f^{n-1}(x)\}$. Contudo, tais conjuntos são distinguíveis entre si, apenas se eles estão a uma distância maior do que ϵ. Assim, podemos interpretar $s(n,\epsilon)$ como a quantidade desse conjuntos a menos de um erro ϵ e então $h_{top}(f)$ mede a taxa de crescimento dessas órbitas quando aumentamos o n e a precisão, ou seja, diminuímos o ϵ.

Teorema 1.4.8 (Princípio Variacional)**.** *Seja* $f : X \to X$ *contínua. Então* $h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f) : \mu \in \mathfrak{M}_f(X)\}$

Veja [20, Teorema 8.6]

Definição 1.4.9. Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Para $n \geq 1$ e $\epsilon > 0$ defina:

$$P(f,\phi,n,\epsilon) := \sup\{\sum_{x \in E} \exp(S_n\phi(x)) : E \text{ é um conjunto } (n,\epsilon) - \text{separado}\}$$

Então a pressão topológica de ϕ com respeito a f será dada por:

$$P_{top}(f,\phi) := \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P(f,\phi,n,\epsilon).$$

Observe que se $\phi \equiv 0$ então $P_{top}(f,\phi) = h_{top}(f)$.

Teorema 1.4.10 (Princípio Variacional)**.** *Seja* $f : X \to X$ *contínua e* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *também contínua. Então* $P_{top}(f,\phi) := \sup\{h_\mu(f) + \int \phi d\mu; \mu \in \mathfrak{M}_f(X)\}$.

Veja [20, Teorema 9.10].

Capítulo 2

Medidas Invariantes e Sistemas com Especificação

Na seção 1.1 vimos algumas propriedades do conjunto das probabilidades em um espaço métrico compacto, e destacamos dois de seus subconjuntos associados a dinâmica do espaço, o das medidas invariantes por uma transformação f e das medidas ergódicas. Agora, considerando o caso específico de aplicações que satisfaçam a propriedade de especificação, vamos estudar a distribuição, do ponto de vista topológico, de determinados subconjuntos de $\mathfrak{M}(X)$, conforme [15] e [16].

Temos a primeira definição.

Definição 2.0.11. Seja x um ponto periódico para $f : X \to X$ de período k. A medida $\mu_x := \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \delta_{f^j(x)}$ suportada na órbita de x é dita uma medida periódica, onde $\delta_{f^j(x)}$ é a medida de Dirac no ponto $f^j(x)$. Denotaremos por $\mathfrak{M}_p$ o conjunto das medidas periódicas.

Observe que se μ_x é uma medida periódica, então μ_x é invariante. De fato, dado $A \in \mathcal{B}(X)$ temos que

$$\begin{aligned}
\mu_x(f^{-1}(A)) &= \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \delta_{f^j(x)}(f^{-1}(A)) = \frac{1}{k}\#\{0 \leq j < k : f^j(x) \in f^{-1}(A)\} \\
&= \frac{1}{k}\#\{0 \leq j < k : f^{j+1}(x) \in A\} = \frac{1}{k}\#\{1 \leq j < k+1 : f^j(x) \in A\} \\
&= \frac{1}{k}\#\{0 \leq j < k : f^j(x) \in A\} = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \delta_{f^j(x)}(A) = \mu_x(A).
\end{aligned}$$

A penúltima igualdade vale pois $f^k(x) = x$.

Observação 2.0.12. Uma outra forma de vermos que μ_x é uma medida invariante é através do operador $f_* : \mathfrak{M}(X) \to \mathfrak{M}(X), \mu \mapsto f_*\mu = \mu \circ f^{-1}$. Onde $\mu \circ f^{-1} : \mathcal{B}(X) \to [0,1], \mu \circ f^{-1}(A) := \mu(f^{-1}(A))$. $f_*\mu$ é dito o push-forward de μ por f. Não é difícil ver que

f_* é linear e contínuo. Temos que μ é invariante por f se e somente se μ é um ponto fixo para f_*. Assim, para μ_x periódica, segue que: $f_*\mu_x := f_*\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\delta_{f^j(x)} := \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} f_*\delta_{f^j(x)} = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\delta_{f^{j+1}(x)} = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\delta_{f^j(x)} = \mu_x$.

Temos ainda que μ_x é ergódica. De fato, suponha A um conjunto f-invariante, então temos que ou $\mathcal{O}^+(x) := \{f^j(x) : j \geq 0\} \subset A$ ou $\mathcal{O}^+(x) \subset A^C$ pois $O^+(x)$ também é invariante por f. Mas então ou $\mu_x(A^C) = 0$ ou $\mu(A) = 0$, respectivamente.

Vimos que se f satisfaz especificação o conjunto de pontos periódicos é denso. Apesar de, a priori, não haver clara relação entre a topologia do espaço e a topologia do conjunto das probabilidade sobre este espaço, veremos adiante que $\mathfrak{M}_p$ é um subconjunto denso de $\mathfrak{M}_f(X)$, e assim qualquer medida f invariante pode ser obtida como limite de medidas periódicas na topologia fraca*.

Destacaremos ainda alguns outros tipos de medidas em $\mathfrak{M}_f(X)$.

Definição 2.0.13. Seja $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$. Dizemos que:

1. μ é não atômica se $\mu(\{x\}) = 0 \ \forall x \in X$.

2. μ é aberta se $\mu(A) > 0, \ \forall A$, aberto.

Dizemos que $x \in X$ é um átomo para μ se $\mu(\{x\}) > 0$. Uma medida não atômica então é uma medida sem átomos. Um exemplo clássico é a medida de Lebesgue.

Uma medida aberta se comporta bem com a topologia do espaço, já que de seu ponto de vista, todos os conjuntos abertos são relevantes.

Denotaremos por $\mathfrak{M}_n$ o subconjunto de $\mathfrak{M}_f(X)$ de medidas não atômicas e por $\mathfrak{M}_d$ o subconjunto das medidas abertas em $\mathfrak{M}_f(X)$. O que mostraremos a seguir é que tais subespaços são residuais, ou seja, interseção enumerável de abertos e densos em $\mathfrak{M}_f(X)$. Mostraremos ainda que o conjunto $\mathfrak{M}_z$, das medidas em $\mathfrak{M}_f(X)$ tais que $h_\mu(f) = 0$, no caso particular em que f satisfaz a propriedade de especificação e é uniformemente hiperbólico, contém um residual em $\mathfrak{M}_f(X)$.

2.1 Caracterização das Medidas para Sistemas com Especificação

As provas dos teoremas apresentados nesta seção podem ser vistas em [15] para difeomorfismos Axioma A, contexto estudado por Bowen em [3]. Como mencionado em [16], temos as mesmas provas válidas para o caso geral de uma aplicação que satisfaz a propriedade de especificação, com exceção do teorema referente ao conjunto de medidas com entropia zero, já que em sua demonstração utiliza-se a existência de partições de Markov, a qual é garantida para difeomorfismos Axioma A em [2].

Temos o primeiro teorema:

Teorema 2.1.1. *$\mathfrak{M}_p$ é denso em $\mathfrak{M}_f(X)$.*

Para a prova deste teorema, assim como a prova dos seguintes, utilizaremos o lema abaixo. Além de mostrar que dada uma vizinhança em $\mathfrak{M}_f(X)$ sempre podemos encontrar um ponto periódico cuja medida correspondente pertence a esta vizinhança, ele nos dirá que esse ponto pode ser escolhido em qualquer vizinhança do espaço X e de período tão grande quanto queiramos. Teremos ainda a liberdade de escolhê-lo de modo que sua órbita aproxime uma fixada órbita em X durante uma quantidade finita e arbitrária de iterados.

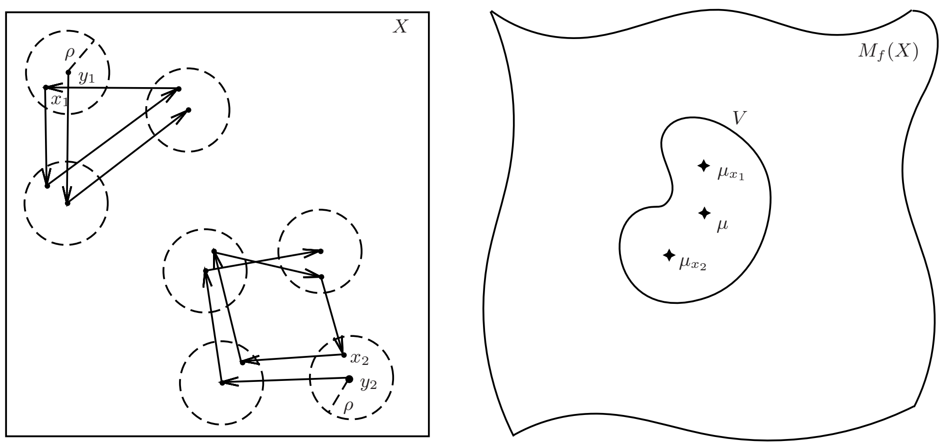

Figura 2.1.1: Associação entre densidade de pontos periódicos e densidade das medidas periódicas.

Lema 2.1.2. *Suponha $f : X \to X$ satisfazendo a propriedade de especificação. Seja V uma vizinhança de $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$. Seja $\rho > 0$ e N_0 um inteiro positivo. Então existe um inteiro $N > 0$ tal que para todo $y \in X$ e todo $p \in \mathbb{N}$, $p \geq N$, existe um ponto $x \in X$ periódico de período p tal que $\mu_x \in V$ e $d(f^k(x), f^k(y)) < \rho$ para $0 \leq k < N_0$.*

Prova: Assuma $V = V(\mu, \Phi, \epsilon)$, $\Phi = \{\phi_1, ..., \phi_r\} \subset C(X)$. Como X é compacto está bem definido $k = \max\{\|\phi_l\| : 1 \leq l \leq r\}$ e existe $\delta > 0$ tal que

$$y_1, y_2 \in X \text{ e } d(y_1, y_2) < \delta \Rightarrow |\phi_l(y_1) - \phi_l(y_2)| < \frac{\epsilon}{4} \tag{2.1.1}$$

para todo $1 \leq l \leq r$.

Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff existe um boreliano Q com $\mu(Q) = 1$ tal que

$$\tilde{\phi}_l(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_l(f^i(x))$$

existe para todo $x \in Q$, e todo $l \in \{1, ..., r\}$. Além disso:

$$\int \tilde{\phi}_l d\mu = \int \phi_l d\mu.$$

Note que $\tilde{\phi}_l$ é uma função limitada pois $\min\{\varphi_l(x); 1 \leq l \leq r, x \in X\} \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \phi_l(f^i(x)) \leq \max\{\phi_l(x); 1 \leq l \leq r, x \in X\}$,para todo $x \in Q$ e todo $l \in \{1, ..., r\}$. Consideremos então $Q_1, ..., Q_s$ uma partição de Q em borelianos não vazios tais que: $Var(\tilde{\phi}_l|_{Q_j}) := \sup\{|\tilde{\phi}_l(x) - \tilde{\phi}_l(y)| : x, y \in Q_j\} < \frac{\epsilon}{4}$, para todo $1 \leq l \leq r$ e todo $1 \leq j \leq s$. Escolha $x_j \in Q_j$. Então:

$$\begin{aligned} \left|\int \tilde{\phi}_l d\mu - \sum_{j=1}^{s} \mu(Q_j)\tilde{\phi}_l(x_j)\right| &= \left|\int \tilde{\phi} d\mu - \int \sum_{j=1}^{s} \tilde{\phi}_l(x_j)\chi_{Q_j} d\mu\right| \\ &\leq \int \left|\tilde{\phi} - \sum_{j=1}^{s} \tilde{\phi}_l(x_j)\chi_{Q_j}\right| d\mu < \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Seja $N_1 \geq 1$ tal que

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \phi_l(f^i(x_j)) - \tilde{\phi}_l(x_j)\right| < \frac{\epsilon}{4} \tag{2.1.3}$$

para todo $N \geq N_1,\ l = 1, ..., r,$ e $j = 1, ..., s$.

Escolha $N_2 \geq 1$ tal que possamos escrever $m \geq N_2$ na forma:

$$m = \sum_{j=1}^{s} m_j$$

com

$$\left|\frac{m_j}{m} - \mu(Q_j)\right| < \frac{\epsilon}{12ks} \tag{2.1.4}$$

para $j = 1, ..., s$.

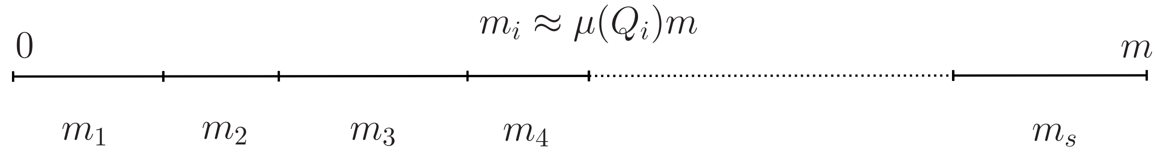

Figura 2.1.2: Divisão do inteiro m em partes proporcionais a medida dos elementos da partição.

Finalmente, escolha N_3 maior do que N_1 e N_2 tal que $\forall m \geq N_3$ temos:

$$\frac{N_0 + 2M(\delta) + mM(\delta) + N_3}{N_0 + M(\delta) + mM(\delta) + mN_3} < \frac{\epsilon}{12k}$$

onde $M(\delta)$ é dado pelo Teorema de Especificação de Bowen.

Afirmamos que $N = N_3[N_3 + M(\delta)] + N_0 + M(\delta)$ satisfaz as condições do lema. De fato, suponha $p \geq N$ dado. Podemos escrever $p = m[N_3 + M(\delta)] + N_0 + M(\delta) + q$ com $m \geq N_3$ e $0 \leq q < N_3 + M(\delta)$. Assim

$$\frac{p - mN_3}{p} < \frac{N_0 + 2M(\delta) + mM(\delta) + N_3}{N_0 + M(\delta) + mM(\delta) + mN_3} < \frac{\epsilon}{12k} \tag{2.1.5}$$

Seja $y \in X$ qualquer. Escolhamos inteiros, $a_0 = 0$, $b_0 = N_0 - 1$ e $a_{j,i}$ com $i \in \{1, ..., m_j\}$ e $j \in \{1, ..., s\}$, satisfazendo:

1. $a_{1,1} - b_0 = M(\delta)$.

2. $b_{j,i} - a_{j,i} = N_3$ fixado j e $i = 1, ..., m_j$.

3. $b_{j,i+1} - a_{j,i} = M(\delta)$ fixado j e $i = 1, ..., m_j - 1$.

4. $a_{j+1,1} - b_{j,m_j} = M(\delta)$, $j = 1, ..., s - 1$

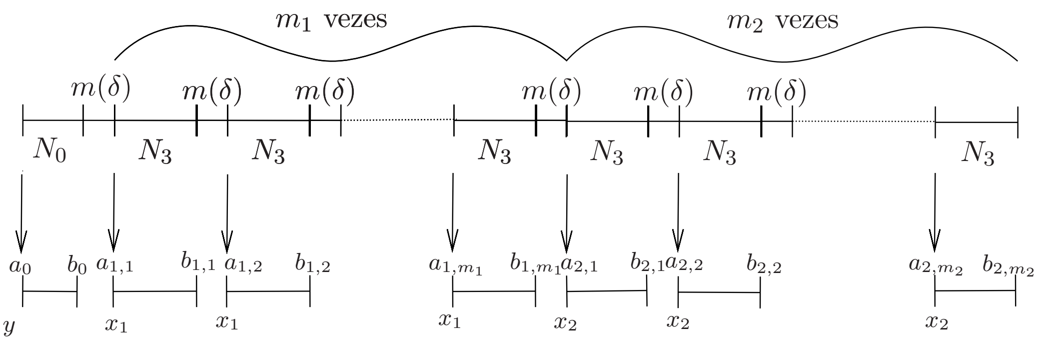

Figura 2.1.3: Associação entre inteiros e trechos de órbita de x_i, para $i = 1, 2$.

Pela propriedade de especificação, existe um $x \in X$ periódico de período p tal que:

$$d(f^{t+a_0}(x), y) < \delta, \ t = 0, ..., b_0 - a_0$$
$$d(f^{t+a_{j,i}}(x), f^t(x_j)) < \delta, \ t = 0, ..., b_{j,i} - a_{j,i}, \ i = 1, ..., m_j, \ j = 1, ..., s$$

Em outras palavras, o ponto x especifica o trecho de órbita de y com comprimento N_0. Após $M(\delta)$ iterados especifica o ponto x_1 durante N_3 iterados, após $M(\delta)$ iterados volta a especificar x_1 durante N_3 iterados, repetindo esse processo m_1 vezes, quando começa, após mais $M(\delta)$ iterados, a especificar a órbita de x_2 com comprimento N_3, repetindo essa especificação m_2 vezes, e assim por diante para $x_3, ..., x_s$. Na figura abaixo ilustramos esse comportamento, considerando, por simplicidade visual, as órbitas dos pontos como se fossem objetos contínuos.

Falta mostrarmos então que $\mu_x \in V$.

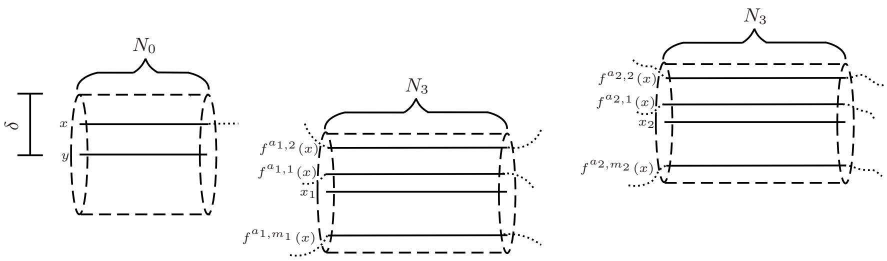

Figura 2.1.4: Esquema de especificação do ponto x.

Considere $\phi \in \{\phi_1, ..., \phi_r\}$. Temos:

$$\int \phi d\mu_x = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\phi(f^i(x)).$$

Denotemos $I_0 := [a_0, b_0]$ e $I_{j,k} := [a_{j,k}, b_{j,k}],\ i = 1, ..., m_j,\ j = 1, ...s$. Escrevamos $I = \cup_{j=1}^{s}\cup_{k=1}^{m_j} I_k^j$. Observe que $\#I = mN_3$ e $I \subset \{0, 1, ..., p-1\}$. Então:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\phi(f^i(x)) - \frac{1}{p}\sum_{i\in I}\phi(f^i(x))\right| &= \left|\frac{1}{p}\sum_{i\in\{0,1,\ldots,p-1\}\setminus I}\phi(f^i(x))\right| \\
&\leq \frac{1}{p}\sum_{i\in\{0,1,\ldots,p-1\}\setminus I}\|\phi\| \\
&= \frac{p - mN_3}{p}\|\phi\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{12}. \qquad (2.1.6)
\end{aligned}$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{p}\sum_{i\in I}\phi(f^i(x)) - \frac{1}{mN_3}\sum_{i\in I}\phi(f^i(x))\right| &\leq \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{mN_3}\right| mN_3\|\phi\| \\
&= \frac{p - mN_3}{p}\|\phi\| \leq \frac{\epsilon}{12}. \qquad (2.1.7)
\end{aligned}$$

Fixado $j \in \{0, 1, ..., s\}$ e $i \in \{0, 1, ..., m_j\}$ temos da propriedade de especificação que $d(f^{t+a_{j,i}}(x), f^t(x_j)) < \delta$, $\forall\ t = 0, 1, ..., b_{j,i}-1$ e portanto $|\phi(f^{t+a_{j,i}}(x)) - \phi(f^t(x_j))| < \epsilon$. Assim sendo:

$$\left|\frac{1}{b_{j,i} - a_{j,i}}\sum_{t=0}^{b_{j,i}-a_{j,i}-1}\phi(f^{t+a_{j,i}}(x)) - \frac{1}{b_{j,i} - a_{j,i}}\sum_{t=0}^{b_{j,i}-a_{j,i}-1}\phi(f^t(x_j))\right| \leq$$

$$\frac{1}{N_3}\sum_{t=0}^{N_3-1}\left|\phi(f^{t+a_{j,i}}(x)) - \phi(f^t(x_j))\right| < \frac{\epsilon}{4},$$

para todo $i = 1, ..., m_j$ e todo $j = 1, ..., s$.

Como $N_3 \geq N_1$ segue que:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N_3}\sum_{t=0}^{N_3-1}\phi(f^{t+a_{j,i}}(x)) - \tilde{\phi}(x_j)\right| &\leq \left|\frac{1}{N_3}\sum_{t=0}^{N_3-1}\phi(f^{t+a_{j,i}}(x)) - \frac{1}{N_3}\sum_{t=0}^{N_3-1}\phi(f^t(x_j))\right| \\ &+ \left|\frac{1}{N_3}\sum_{t=0}^{N_3-1}\phi(f^t(x_j)) - \tilde{\phi}(x_j)\right| < \frac{\epsilon}{2}. \qquad (2.1.8)\end{aligned}$$

para todo $i = 1, ..., m_j$ e todo $j = 1, ..., s$.

Mas então:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{mN_3}\sum_{t\in I}\phi(f^t(x)) - \sum_{j=1}^{s}\frac{m_j}{m}\tilde{\phi}(x_j)\right| &= \left|\frac{1}{mN_3}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{m_j}\sum_{t=0}^{N_3-1}\phi(f^{t+a_{j,i}}(x)) - \sum_{j=1}^{s}\frac{m_j}{m}\tilde{\phi}(x_j)\right| \\ &= \left|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{m_j}\left(\frac{1}{N_3}\sum_{t=0}^{N_3-1}\phi(f^{t+a_{j,i}}(x)) - \tilde{\phi}(x_j)\right)\right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}. \qquad (2.1.9)\end{aligned}$$

Temos ainda:

$$\left|\sum_{j=1}^{s}\frac{m_j}{m}\tilde{\phi}(x_j) - \sum_{j=1}^{s}\mu(Q_j)\tilde{\phi}(x_j)\right| \leq \|\phi\|\sum_{j=1}^{s}\left|\frac{m_j}{m} - \mu(Q_j)\right| \leq \frac{\epsilon}{12}. \qquad (2.1.10)$$

Combinando as desigualdades (2.1.2), (2.1.6),(2.1.7), (**??**) e (**??**), temos que $\left|\int \phi d\mu_x - \int \phi d\mu\right| < \epsilon$. Como ϕ é um elemento arbitrário em $\{\phi_1, ..., \phi_r\}$ temos que $\mu_x \in V$.

□

O lema anterior, como veremos nos dois teoremas a seguir, nos permitirá expressar o conjunto de medidas não atômicas e o conjunto de medidas abertas como o complementar de uma união enumerável de fechados com interior vazio, ou seja, o complementar de um conjunto de primeira categoria.

Teorema 2.1.3. $\mathfrak{M}_n := \{\mu \in \mathfrak{M}_f(X) : \mu$ *é não atômica*$\}$ *é o complementar de um conjunto de primeira categoria em* $\mathfrak{M}_f(X)$.

Prova: Para $\tau > 0$ defina $C(\tau) := \{\mu \in \mathfrak{M}_f(X) : \mu(\{x\}) \geq \tau,$ para algum $x \in X\}$. Assim definido, $C(\tau)$ é fechado. De fato, considere $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C(\tau)$ convergindo na topologia fraca* a $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe x_n tal que $\mu(\{x_n\}) \geq \tau$. Como X é compacto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente, digamos, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ com $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X$. Logo, dado $r > 0$ existe n_r tal que

$\mu_n(B_{\frac{1}{r}}(x_0)) \geq \tau,\ \forall n \geq n_r$, portanto $\overline{\lim}_{n\to\infty}\mu_n(B_{\frac{1}{r}}(x_0)) \geq \tau$. Como r foi escolhido arbitrariamente temos que $\overline{\lim}_{n\to\infty}\mu_n(B_{\frac{1}{r}}(x_0)) \geq \tau,\ \forall r > 0$. Portanto temos $\mu(\{x_0\}) \geq \tau$ e $\mu \in C(\tau)$.

Note também que $C(\tau)$ tem interior vazio. Caso contrário existiria um aberto $V \subset C(\tau)$. Pelo lema 2.1.2, tomando N o inteiro correspondente a V e p primo tal que $p \geq N$ e $\frac{1}{p} < \tau$ temos que existe x periódico de período p com $\mu_x \in V$. Mas $\mu_x\{y\} < \tau,\ \forall y \in X$. De fato se y não pertence a órbita de x então $\mu_x(\{y\}) = 0 < \tau$ e se y pertence a órbita de x temos $\mu_x(\{y\}) = \frac{1}{p} < \tau$. Temos uma contradição pois supomos $V \subset C(\tau)$.

Ora, então $\cup_{r=1}^{\infty}C(\frac{1}{r})$ é um conjunto de primeira categoria e $(\cup_{r=1}^{\infty}C(\frac{1}{r}))^C = \cap_{r=1}^{\infty}(C(\frac{1}{r}))^C = \mathfrak{M}_n$.

$\square$

Teorema 2.1.4. $\mathfrak{M}_d := \{\mu \in \mathfrak{M}_f(X) : \mu(A) > 0$ *para todo aberto* $A \subset X\}$ *é o complementar de um conjunto de primeira categoria em* $\mathfrak{M}_f(X)$.

Prova: Seja $G \subset X$ um subconjunto aberto. Defina $D(G) := \{\mu \in \mathfrak{M}_f(X) : \mu(G) = 0\}$. Então $D(G)$ é fechado, pois, se $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{D}(G)$ convergindo a $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$ na topologia fraca* temos que $\mu(G) \leq \liminf_{n\to\infty}\mu_n(G) = 0 \Rightarrow \mu \in D(G)$. Temos também que $D(G)$ tem interior vazio. Caso contrário existiria um aberto $V \subset D(G)$. Escolhamos $y \in G$ e $\rho > 0$ tal que $B_\rho(y) \subset G$. Aplicando o lema 2.1.2 para $N_0 = 1$, existe um ponto periódico $x \in X$ de período p tal que $\mu_x \in V$ e $d(x,y) < \rho$. Assim $x \in G$ e $\mu_x(G) > \mu_x(\{x\}) = \frac{1}{p} > 0$. Donde $\mu_x \notin D(G)$.

Consideremos $\{G_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ uma base de abertos enumerável do espaço métrico compacto X. Temos $\cup_{r=1}^{\infty}D(G_r)$ é de primeira categoria e $\cup_{r=1}^{\infty}D(G_r) = \cap_{r=1}^{\infty}(D(G_r))^C = \mathfrak{M}_d$.

$\square$

O seguinte teorema mostra que as medidas ergódicas para um sistema com especificação são abundantes.

Teorema 2.1.5. $\mathfrak{M}_e := \{\mu \in \mathfrak{M}_f(X) : \mu$ *é ergódica*$\}$ *é um residual em* $\mathfrak{M}_f(X)$.

Prova: Vimos que $\mathfrak{M}_p \subset \mathfrak{M}_e$. Logo $\mathfrak{M}_e$ é denso em $\mathfrak{M}_f(X)$. Em [10, Proposição 2.5, Capítulo II] temos que $\mathfrak{M}_e$ é o conjunto de pontos extremais do espaço métrico compacto e convexo $\mathfrak{M}_f(X)$. Portanto $\mathfrak{M}_e$ deve ser um G_δ, ou seja, interseção enumerável de abertos, como pode ser visto em [12]. Portanto $\mathfrak{M}_e$ é residual.

$\square$

O próximo resultado dá destaque ao conjunto de medidas cuja entropia é nula. Mostraremos que se f satisfaz a especificação este conjunto contém um residual em $\mathfrak{M}_f(X)$. Necessitaremos do seguinte lema:

Lema 2.1.6. *Seja $A \neq X$ um subconjunto fechado tal que $f(A) \subset A$ ou $f^{-1}(A) \subset A$. Então existe um conjunto residual $\mathfrak{R}$ em $\mathfrak{M}_f(X)$ tal que $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M}_p$ é denso em $\mathfrak{M}_f(X)$ e $\mu(A) = 0,\ \forall \mu \in \mathfrak{R}$.*

Prova: Denote por B o conjunto fechado $\cap_{n\geq 0} f^n(A)$ ou $\cap_{n\geq 0} f^{-n}(A)$ de acordo com $f(A) \subset A$ ou $f^{-1}(A) \subset A$. B é invariante sobre f. O conjunto $\mathfrak{M}_B = \{\mu \in \mathfrak{M}_f(X) : \mu(B) = 1\}$ é fechado em $\mathfrak{M}_f(X)$. De fato, se uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathfrak{M}_B$ converge fraca* a $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$, temos $\mu(B) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(B) = 1$, logo $\mu(B) = 1$.

Para toda $\mu \in \mathfrak{R} := \mathfrak{M}_e \cap (\mathfrak{M}_f(X) \backslash \mathfrak{M}_B)$ temos que $\mu(B) < 1$ e como B é invariante, devemos ter $\mu(B) = 0$. Afirmamos que $\mu(A) = 0$. De fato, se $f^{-1}(A) \subset A$, temos $... \subset f^{-n}(A) \subset f^{-n+1}(A) \subset ... \subset f^{-1}(A) \subset A$. Daí $f^{-n}(A) \searrow B \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(f^{-n}(A)) = \mu(B)$. Mas como μ é f-invariante temos $\mu(f^{-n}(A)) = \mu(f^{-n+1}(A)),\ \forall n \geq 1$. Assim $\mu(f^{-n}(A)) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, em particular para $n = 0$. Caso $f(A) \subset A$ temos $... \subset f^n(A) \subset f^{n-1}(A) \subset ... \subset f(A) \subset A$. Temos que $f^n(A) \subset f^{-1}(f^{n+1}(A)),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Logo $\mu(f^n(A)) \leq \mu(f^{-1}(f^{n+1}(A))) = \mu(f^{n+1}(A)) \leq \mu(A)$. Novamente como $f^n(A) \searrow B$, temos que $\mu(f^n A) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Isto prova a afirmação.

Como B é um conjunto fechado, $X \backslash B$ é aberto. Tome $y \in X \backslash B$ e $\rho > 0$ tal que $B_\rho(y) \subset X \backslash B$. Dada $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$ e qualquer vizinhança V de μ existe um ponto periódico x tal que $\mu_x \in V$ e $x \in B_\rho(y) \subset X \backslash B$. Assim $\mu_x(B) = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} \delta_{f^j(x)}(B) \leq \frac{p-1}{p} < 1$. Logo $\mu_x \in \mathfrak{M}_f(X) \backslash \mathfrak{M}_B$ e portanto $\mu_x \in \mathfrak{R}$. Daí,$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M}_p$ e $\mathfrak{R}$ são densos em $\mathfrak{M}_f(X)$.

Note que $\mathfrak{R}$ é interseção enumerável de abertos, pois $\mathfrak{M}_e$ é residual e $\mathfrak{M}_f(X) \backslash \mathfrak{M}_B$ é aberto. Segue que $\mathfrak{R}$ é um residual em $\mathfrak{M}_f(X)$.

$\square$

Consideremos então $f : X \to X$ uma aplicação uniformemente hiperbólica, ou seja, f é um difeomorfismo e para todo $y \in X$ temos que $T_y X$ admite uma decomposição $T_y X = E^s \oplus E^u$ Df-invariante tal que existem $\lambda \in (0, 1)$ e $c > 0$ que satisfazem $\|Df^n(y)|_{E^s}\| \leq c\lambda^n$ e $\|Df^{-n}(y)|_{E^u}\| \leq c\lambda^n$, para todo $n \geq 1$. Para aplicações deste tipo que satisfazem a propriedade de especificação temos teorema seguinte:

Teorema 2.1.7. $\mathfrak{M}_z := \{\mu \in \mathfrak{M}_f(X) : h_\mu(f) = 0\}$ *contém um conjunto residual em* $\mathfrak{M}_f(X)$.

Prova: Bowen mostrou em [2] que existe uma partição de Markov para (X, f), $\mathfrak{C} := \{E_1, ..., E_r\}$, satisfazendo:

1. $\cup_{k=1}^{r} E_k = X$
2. $E_k \cap E_l \subset \partial E_k \cap \partial E_l,\ \forall k \neq l$
3. Para cada bisequência $(E_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathfrak{C}$, $\# \cap_{i=-\infty}^{+\infty} f^{-i}(E_{k_i}) \geq 1$.
4. Para cada k, ∂E_k pode ser escrita como união de dois conjuntos fechados $\partial^s E_k$ e $\partial^u E_k$ tal que, com $\partial^s \mathfrak{C} := \cup_{k=1}^{r} \partial^s E_k$ e $\partial^u \mathfrak{C} := \cup_{k=1}^{r} \partial^u E_k$ temos $f(\partial^s \mathfrak{C}) \subset \partial^s \mathfrak{C}$ e $f^{-1}(\partial^u \mathfrak{C}) \subset \partial^u \mathfrak{C}$

Pelo lema , existe um residual $\mathfrak{R}$ em $\mathfrak{M}_f(X)$ tal que $\mu(\partial^s \mathfrak{C}) = \mu(\partial^u \mathfrak{C}) = 0,\ \forall \mu \in \mathfrak{R}$ e tal que $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M}_p$ é denso em $\mathfrak{M}_f(X)$. Para obtermos o resultado é suficiente mostrar que $\mathfrak{M}_z \cap \mathfrak{R}$ é um G_δ denso em $\mathfrak{R}$, ou seja interseção enumerável de abertos densa em $\mathfrak{R}$.

De fato, que $\mathfrak{M}_z \cap \mathfrak{R}$ é denso em $\mathfrak{R}$ segue imediatamente do fato que $\mathfrak{M}_p \subset \mathfrak{M}_z$ e $\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{R}$ é denso em $\mathfrak{R}$. Para vermos que $\mathfrak{M}_z \cap \mathfrak{R}$ é G_δ em $\mathfrak{R}$, observe que para cada $\mu \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{C}$ é uma partição μ-mensurável no sentido que $\mu(\cup_{k=1}^{r} E_k) = 1$ e para todo $k \neq l$, $\mu(E_k \cap E_l) \leq \mu(\partial E_k \cap \partial E_l) \leq \mu(\partial^s \mathfrak{C} \cup \partial^u \mathfrak{C}) = 0$. Além disso, pela propriedade 3, $\mathfrak{C}$ é um gerador com respeito a f. Pelo teorema de Kolmogorov-Sinai, uma medida $\mu \in \mathfrak{R}$ pertence a $\mathfrak{M}_z$ se, e somente se $H_\mu(f, \mathfrak{C}) = 0$, i.e. se, e somente se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} H_\mu\Big(\bigvee_{i=-n}^{n} f^{-i}(\mathfrak{C})\Big) = 0.$$

Como o limite acima sempre existe, podemos substituir lim por lim inf nesta equação. Logo:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_z \cap \mathfrak{R} &= \{\mu \in \mathfrak{R} : \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} H_\mu\Big(\bigvee_{i=-n}^{n} f^{-i}(\mathfrak{C})\Big) = 0\} \\
&= \cap_{r=1}^{\infty} \{\mu \in \mathfrak{R} : \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} H_\mu\Big(\bigvee_{i=-n}^{n} f^{-i}(\mathfrak{C})\Big) < \frac{1}{r}\} \\
&= \cap_{r=1}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} \left\{\mu \in \mathfrak{R} : \frac{1}{2n+1} H_\mu\Big(\bigvee_{i=-n}^{n} f^{-i}(\mathfrak{C})\Big) < \frac{1}{r}\right\}. \quad (2.1.11)
\end{aligned}$$

Portanto é suficiente mostrarmos que $H_\epsilon := \{\mu \in \mathfrak{R} : H_\mu(\bigvee_{i=-n}^{n} f^{-i}(\mathfrak{C})) \geq \epsilon\}$ é fechado em $\mathfrak{R}$, $\forall \epsilon > 0$. Seja então $\mu_m \xrightarrow{w^*} \mu$ com $\mu_m \in H_\epsilon, \forall m \in \mathbb{N}$ e $\mu \in \mathfrak{R}$. Assim $H_{\mu_m}(\bigvee_{i=-n}^{n} f^{-i}(\mathfrak{C})) \geq \epsilon, \forall m \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$-\sum_{k_{-n}\dots k_n} \mu_m(\cap_{i=-n}^{n} f^{-i}(E_{k_i})) \log \mu_m(\cap_{i=-n}^{n} f^{-i}(E_{k_i})) \geq \epsilon.$$

Como $\mu \in \mathfrak{R}$, os conjuntos da forma $\cap_{i=-n}^{n} f^{-i} E_{k_i}$ são μ-contínuos já que as medidas μ de seus bordos são zero. Como $\mu_m \xrightarrow{w^*} \mu$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_m(\cap_{i=-n}^{n} f^{-i} E_{k_i}) = \mu(\cap_{i=-n}^{n} f^{-i} E_{k_i})$$

e portanto

$$-\sum_{k_{-n}\dots k_n} \mu(\cap_{i=-n}^{n} f^{-i}(E_{k_i})) \log \mu(\cap_{i=-n}^{n} f^{-i}(E_{k_i})) \geq \epsilon,$$

ou seja,

$$H_\mu(\bigvee_{i=-n}^{n} f^{-i}(\mathfrak{C})) \geq \epsilon.$$

Portanto $\mu \in H_\epsilon$ e H_ϵ é fechado em $\mathfrak{R}$. Mas então $\mathfrak{M}_z \cap \mathfrak{R} = \cap_{r=1}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} (H_{\frac{1}{r}})^C$ é um G_δ em $\mathfrak{R}$. Logo $\mathfrak{M}_z \cap \mathfrak{R}$ é um residual em $\mathfrak{R}$ e portanto em $\mathfrak{M}_f(X)$.

$\square$

Capítulo 3

Pressão Topológica para o Conjunto Irregular

Apresentaremos neste capítulo os resultados de [19].

Definição 3.0.8. Seja (X, d) um espaço métrico, $f : X \to X$ uma aplicação contínua e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ um potencial também contínuo. Definimos o conjunto irregular para φ com respeito a f como o conjunto:

$$\hat{X}_{f,\varphi} := \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\varphi(x) \text{ não existe} \right\}$$

Temos pelo Teorema Ergódico de Birkhoff (Teorema 1.3.1) que o conjunto irregular de um potencial $\varphi \in C(X)$ tem medida nula para qualquer probabilidade invariante. Contudo o que veremos a seguir é que este conjunto, quando diferente do vazio, tem pressão topológica total. Para isto devemos utilizar uma generalização do conceito de pressão topológica visto na definição 1.4.9, uma vez que esta definição aplica-se apenas quando tratamos com conjuntos compactos e invariantes pela dinâmica. A noção de pressão topológica que apresentaremos a seguir é uma característica dimensional devida a Pesin e Pitskel.

Seja $Z \subset X$ um conjunto mensurável arbitrário e $\psi : X \to \mathbb{R}$ contínua. Considere $\Gamma := \{B(x_i, n_i, \epsilon)\}_i$ uma coleção enumerável de bolas dinâmicas em X. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ defina:

$$Q(Z, \alpha, \Gamma, \psi) := \sum_{B(x_i,n_i,\epsilon)\in\Gamma} \exp\left(-\alpha n_i + \sup_{x\in B(x_i,n_i,\epsilon)} S_{n_i}\psi(x) \right)$$

Tome $\Gamma_N^\epsilon := \{\{B(x_i, n_i, \epsilon)\}_{i\in I} : x_i \in X,\ n_i \geq N,\ I \text{ enumerável},\ \cup_{i\in I} B(x_i, n_i, \epsilon) \supset Z\}$ e defina:

$$M(Z, \alpha, \epsilon, N, \psi) := \inf\{Q(Z, \alpha, \Gamma, \epsilon); \Gamma \in \Gamma_N^\epsilon\}.$$

Observe que se $N_1 < N_2$ então $\Gamma \in \Gamma^{\epsilon}_{N_2} \Rightarrow \Gamma \in \Gamma^{\epsilon}_{N_1}$. Logo $\Gamma^{\epsilon}_{N_2} \subset \Gamma^{\epsilon}_{N_1}$ e temos $M(Z, \alpha, \epsilon, N_1, \psi) \leq M(Z, \alpha, \epsilon, N_2, \psi)$. Concluímos então que $M(Z, \alpha, \epsilon, N, \psi)$ é não-decrescente em N, e existe o limite (podendo ser infinito):

$$m(Z, \alpha, \epsilon, \psi) = \lim_{N \to \infty} M(Z, \alpha, \epsilon, N, \psi).$$

Lema 3.0.9. *Se existir $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $m(Z, \beta, \epsilon, \psi) < \infty$ então:*

(a) Para todo $\alpha < \beta$ temos $m(Z, \alpha, \epsilon, \psi) = \infty$.

(b) Para todo $\alpha > \beta$ temos $m(Z, \alpha, \epsilon, \psi) = 0$.

Prova: Fixe $N \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$. Tome $\Gamma \in \Gamma^{\epsilon}_N$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq \beta$ temos:

$$\begin{aligned} Q(Z, \alpha, \Gamma, \psi) &= \sum_{B_i \in \Gamma} \exp\left(-n_i \alpha + \sup_{x \in B_i} S_{n_i}\psi(x)\right) \\ &= \sum_{B_i \in \Gamma} \exp\left(-n_i(\alpha - \beta + \beta) + \sup_{x \in B_i} S_{n_i}\psi(x)\right) \\ &= \sum_{B_i \in \Gamma} \exp[-n_i(\alpha - \beta)] \exp\left(-n_i\beta + \sup_{x \in B_i} S_{n_i}\psi(x)\right). \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

Assim sendo, se $\alpha < \beta$ então:

$$\begin{aligned} Q(Z, \alpha, \Gamma, \psi) &= \sum_{B_i \in \Gamma} \exp[-n_i(\alpha - \beta)] \exp\left(-n_i\beta + \sup_{x \in B_i} S_{n_i}\psi(x)\right) \\ &\geq \sum_{B_i \in \Gamma} \exp[N(\beta - \alpha)] \exp\left(-n_i\beta + \sup_{x \in B_i} S_{n_i}\psi(x)\right) \\ &= \exp[N(\beta - \alpha)] \sum_{B_i \in \Gamma} \exp\left(-n_i\beta + \sup_{x \in B_i} S_{n_i}\psi(x)\right) \\ &= \exp[N(\beta - \alpha)] Q(Z, \beta, \Gamma, \psi). \end{aligned}$$

Como Γ foi tomado arbitrário temos

$$M(Z, \alpha, \Gamma, N, \psi) \geq \exp[N(\beta - \alpha)] M(Z, \beta, \Gamma, N, \psi).$$

E tal desigualdade vale para todo $N \in \mathbb{N}$ pois a escolha deste também foi arbitrária. Portanto, fazendo $N \to \infty$, como $m(Z, \beta, \epsilon, \psi) < \infty$ e $\lim_{N \to \infty} \exp[N(\beta - \alpha)] = \infty$ temos que $m(Z, \alpha, \epsilon, \psi) = \infty$, o que conclui a prova de (a).

Por outro lado se $\alpha > \beta$ então, usando a expressão (3.0.1), temos:

$$\begin{aligned} Q(Z, \alpha, \Gamma, \psi) &= \sum_{B_i \in \Gamma} \exp[-n_i(\alpha - \beta)] \exp\left(-n_i\beta + \sup_{x \in B_i} S_{n_i}\psi(x)\right) \\ &\leq \sum_{B_i \in \Gamma} \exp[-N(\alpha - \beta)] \exp\left(-n_i\beta + \sup_{x \in B_i} S_{n_i}\psi(x)\right) \\ &= \exp[-N(\alpha - \beta)] \sum_{B_i \in \Gamma} \exp\left(-n_i\beta + \sup_{x \in B_i} S_{n_i}\psi(x)\right) \\ &= \exp[-N(\alpha - \beta)] Q(Z, \beta, \Gamma, \psi). \end{aligned}$$

Então, aplicando raciocínio análogo ao anterior teremos que $m(Z,\alpha,\epsilon,\psi)=0$, o que finaliza a prova do lema.

$\square$

O lema anterior nos permite definir

$$P_Z(\psi,\epsilon) := \inf\{\alpha : m(Z,\alpha,\epsilon,\psi)=0\} = \sup\{\alpha : m(Z,\alpha,\epsilon,\psi)=\infty\}.$$

Definição 3.0.10. Definimos a pressão topológica de ψ em $Z\subset X$ por:

$$P_Z(\psi) := \lim_{\epsilon\to 0} P_Z(\psi,\epsilon).$$

O limite da definição acima existe como pode ser visto em [14, Teorema 11.1].

Neste capítulo também utilizaremos uma versão mais fraca da definição para especificação, retirando a hipótese do ponto que aproxima as órbitas ser periódico e exigindo apenas que os pontos especificados pertençam a um subconjunto invariante do espaço.

Definição 3.0.11. Uma aplicação contínua $f: X\to X$ satisfaz a propriedade de especificação em $X'\subseteq X$, $f-$invariante, se $\forall\epsilon>0$, existe um inteiro $m(\epsilon)$ tal que para qualquer coleção $\{I_j=[a_j,b_j]\subset\mathbb{N} : j=1,..,k\}$ de intervalos finitos com $a_{j+1}-b_j\geq m(\epsilon)$ para $j=1,...,k-1$ e quaisquer $x_1,...,x_k\in X'$ existe $x\in X$ tal que:

$$d(f^{p+a_j}(x),f^p(x_j))<\epsilon \text{ para todo } p=0,...,b_j-a_j \text{ e todo } j=1,...,k.$$

Definição 3.0.12. Sejam $\phi_1,\phi_2\in C(X)$. Dizemos que ϕ_1 é cohomóloga a ϕ_2 se elas diferem por um cobordo, i.e., existe $h\in C(X)$ tal que $\phi_1-\phi_2=h-h\circ f$

A noção de cohomologia é mais geral e abrange cobordos descontínuos, mas, em nosso caso, a continuidade se faz necessária. Observe que se ϕ_1 e ϕ_2 são cohomólogas, então as médias de Birkhoff coincidem para as duas funções. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi_1(f^j(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi_2(f^j(x)+h(f^j(x))+h\circ f(f^j(x)))\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi_2(f^j(x))+\frac{1}{n}(h(x)+h(f^n(x)))
\end{aligned}$$

Fazendo $n\to\infty$, como h é contínua em X, compacto, temos que ela é limitada, logo a segunda parcela da última expressão vai à zero. Logo $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}S_n\phi_1(x) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}S_n\phi_2(x)$.

Para uma constante $c\in\mathbb{R}$, denotemos por $Cob(X,f,c)$ o espaço das funções cohomólogas a $\phi\equiv c$ e $\overline{Cob(X,f,c)}$ o fecho na norma do sup. Note que se $\varphi\in Cob(X,f,c)$ então $\hat{X}_{f,\varphi}=\emptyset$. O seguinte lema, mostrará que tais condições são equivalentes.

Lema 3.0.13. *Quando f satisfaz especificação, são equivalentes:*

(a) $\varphi \notin \cup_{c\in\mathbb{R}} \overline{Cob(X,f,c)}$.

(b) $\dfrac{1}{n}S_n\varphi$ *não converge uniformemente a uma constante.*

(c) $\inf\{\int \varphi d\mu; \mu \in \mathfrak{M}_f(X)\} < \sup\{\int \varphi d\mu; \mu \in \mathfrak{M}_f(X)\}$.

(d) $\inf\{\int \varphi d\mu; \mu \in \mathfrak{M}_f^e(X)\} < \sup\{\int \varphi d\mu; \mu \in \mathfrak{M}_f^e(X)\}$.

(e) $\hat{X}_{f,\varphi} \neq \emptyset$.

Prova:

$\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$

Suponha por absurdo que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{n}S_n\varphi$ convirja uniformemente para c. Tome $h_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\varphi\circ f^{i-1}(x)$. Observe que como $\varphi \in C(X)$ temos que $h_n \in C(X)$. Note que

$$\begin{aligned}
h_n - h_n\circ f &= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\varphi\circ f^{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\varphi\circ f^{i}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\varphi\circ f^{i-1} - \sum_{i=2}^{n}(n-i+1)\varphi\circ f^{i-1}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[(n-1)\varphi + \sum_{i=2}^{n-1}\left[(n-i)-(n-i+1)\right]\varphi\circ f^{i-1} - \varphi\circ f^{n-1}\right] \\
&= \varphi - \frac{1}{n}\left(\varphi - \sum_{i=2}^{n-1}\varphi\circ f^{i-1} - \varphi\circ f^{n-1}\right) = \varphi - \frac{1}{n}S_n\varphi
\end{aligned}$$

Segue então que, como $\frac{1}{n}S_n\varphi$ converge uniformemente a c, $\varphi = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n\varphi + h_n - h_n\circ f = \lim_{n\to\infty} c + h_n - h_n\circ f$ portanto $\varphi \in \overline{Cob(X,f,c)}$.

$\boxed{(b) \Rightarrow (c)}$

Se $\frac{1}{n}S_n\varphi$ não converge uniformemente para uma constante, em particular, dada uma medida invariante μ, $\frac{1}{n}S_n\varphi$ não converge uniformemente a $\int \varphi d\mu$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $k \geq 1$ existe $n_k \geq k$ e $x_k \in X$ tal que $|\frac{1}{n_k}S_{n_k}\varphi(x_k) - \int \varphi d\mu| \geq \epsilon$.

Consideremos $\nu_k := \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\delta_{f^j(x_k)}$. Como $\mathfrak{M}(X)$ é compacto, temos, que existe um ponto de acumulação de $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Passando a subsequência se necessário, consideremos $\nu := \lim_{k\to\infty}\nu_k$.

Temos que ν é f-invariante, de fato:

$$\begin{aligned} f_*\nu - \nu &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} f_*\delta_{f^j(x_k)} - \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\delta_{f^j(x_k)} \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\delta_{f^{j+1}(x_k)} - \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\delta_{f^j(x_k)} \\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{n_k-1}\delta_{f^{j+1}(x_k)} - \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\delta_{f^j(x_k)} \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{n_k}(\delta_{f^{n_k}(x_k)} - \delta_{x_k})\right) = 0 \end{aligned}$$

Logo $f_*\nu = \nu$, ou seja, ν é f-invariante. Vimos que $\lim_{k\to\infty}\nu_k = \nu \Leftrightarrow \int \varphi d\nu = \lim_{k\to\infty}\int\varphi d\nu_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}S_{n_k}\varphi(x_k)$. Assim $|\int\varphi d\mu - \int\varphi d\nu| \geq |\int\varphi d\mu - \frac{1}{n_k}S_{n_k}\varphi(x_k)| - |\frac{1}{n_k}S_{n_k}\varphi(x_k) - \int\varphi d\nu| \geq \frac{\epsilon}{2}$, tomando k tal que $|\frac{1}{n_k}S_{n_k}\varphi(x_k) - \int\varphi d\nu| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto $\inf\{\int\varphi d\mu; \mu\in\mathfrak{M}_f(X)\} < \sup\{\int\varphi d\mu; \mu\in\mathfrak{M}_f(X)\}$

$\boxed{(c) \Rightarrow (d)}$

Suponhamos por absurdo que $\inf\{\int\varphi d\mu : \mu\in\mathfrak{M}_f^e(X)\} = \sup\{\int\varphi d\mu : \mu\in\mathfrak{M}_f^e(X)\}$. Então $\int\varphi d\mu = k \in \mathbb{R}, \forall\mu\in\mathfrak{M}_f^e(X)$. Temos pelo Teorema da Decomposição Ergódica (Teorema 1.1.10) que se $\nu\in\mathfrak{M}_f(X)$ então $\int\varphi d\nu = \int\left(\int\varphi d\nu_x\right)d\nu$ onde $\nu_x\in\mathfrak{M}_f^e(X)$. Logo $\int\varphi d\nu = \int k d\nu = k$. Então temos que $\int\varphi d\nu = k$, $\forall\nu\in\mathfrak{M}_f(X)$ e portanto $\inf\{\int\varphi d\nu : \nu\in\mathfrak{M}_f(X)\} = \sup\{\int\varphi d\nu : \nu\in\mathfrak{M}_f(X)\}$.

$\boxed{(d) \Rightarrow (e)}$

A prova desta implicação será vista adiante, pois será consequência imediata da construção realizada para a prova do teorema principal (Lema 3.0.26).

$\boxed{(e) \Rightarrow (a)}$

Suponha que $\varphi \in \overline{Cob(X,f,c)}$ para algum $c\in\mathbb{R}$. Então $\varphi = \lim_{n\to\infty}\varphi_n$ com $\varphi_n \in Cob(X,f,c)$, ou seja, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $h_n\in C(X)$ tal que $\varphi_n = c + h_n - h_n\circ f$. Mas isto implica que para todo $x\in X$, $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}S_k\varphi_n(x) = c$. Pelo lema 1.3.8 temos que para todo $x\in X$, existe $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}S_k\varphi(x)$. Portanto $\hat{X}_{f,\varphi} = \emptyset$.

□

O resultado seguinte é útil para o cálculo da pressão topológica.

Proposição 3.0.14. *Seja $f : X \to X$ contínua. Seja $Z \subseteq X$ um boreliano arbitrário. Suponha que existe uma constante $s \geq 0$ tal que para ϵ suficientemente pequeno podemos encontrar uma medida de probabilidade μ_ϵ satisfazendo:*

(i) $\mu_\epsilon(Z) > 0$;

(ii) *$\mu_\epsilon(B(x,n,\epsilon)) \leq k(\epsilon)\exp(-ns + S_n\psi(x))$ para algum $k(\epsilon) > 0$, n suficientemente grande e toda bola $B(x,n,\epsilon)$ tal que $B(x,n,\epsilon) \cap Z \neq \emptyset$.*

Então $P_Z(\psi) \geq s$

A prova desta proposição será consequência imediata de:

Proposição 3.0.15 (Princípio da distribuição da pressão generalizado)**.** *Seja $f : X \to X$ contínua. Seja $Z \subseteq X$ um boreliano arbitrário. Suponha que existam $\epsilon > 0$ e $s \geq 0$ tais que podemos encontrar uma sequência de medidas de probabilidades borelianas $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfazendo:*

(i) *se μ é um ponto de acumulação de $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ então $\mu(Z) > 0$*

(ii) $\limsup_{k\to\infty} \mu_k(B(x,n,\epsilon)) \leq K\exp(-ns + S_n\psi(x))$ *para algum $K > 0$, n suficientemente grande e toda bola $B(x,n,\epsilon)$ tal que $B(x,n,\epsilon) \cap Z \neq \emptyset$.*

Então $P_Z(\psi,\epsilon) \geq s$

Prova: Escolhamos $\epsilon > 0$ e μ uma medida como nas hipóteses do teorema. Seja $\Gamma = \{B(x_i,n_i,\epsilon)\}_i$ uma cobertura para Z com $n_i \geq N$, para N suficientemente grande. Assuma que $B(x_i,n_i,\epsilon) \cap Z \neq \emptyset$, $\forall i$. Então:

$$\begin{aligned}
Q(Z,s,\Gamma,\psi) &= \sum_{B(x_i,n_i,\epsilon)\in\Gamma} \exp(-sn_i + \sup_{x\in B(x_i,n_i,\epsilon)} S_{n_i}\psi(x)) \\
&\geq \sum_{B(x_i,n_i,\epsilon)\in\Gamma} \exp(-sn_i + S_{n_i}\psi(x_i)) \\
&\geq K^{-1} \sum_{B(x_i,n_i,\epsilon)\in\Gamma} \limsup_{k\to\infty} \mu_k(B(x_i,n_i,\epsilon)) \\
&\geq K^{-1} \sum_{B(x_i,n_i,\epsilon)\in\Gamma} \mu(B(x_i,n_i,\epsilon)) \\
&\geq K^{-1}\mu(Z) > 0
\end{aligned}$$

Então $M(Z,s,\epsilon,N,\psi) \geq K^{-1}\mu(Z)$ para todo N suficientemente grande, o que implica que $m(Z,s,\epsilon,\psi) \geq K^{-1}\mu(Z) > 0$. Portanto, $P_Z(\psi,\epsilon) = \inf\{\alpha : m(Z,\alpha,\epsilon,\psi) = 0\} \geq s$.

□

Proposição 3.0.16. *Seja (X,d) espaço métrico compacto, $f : X \to X$ aplicação contínua e μ uma medida ergódica e invariante. Para $\epsilon > 0$, $\gamma \in (0,1)$ e $\varphi \in C(X)$ defina:*

$$N^\mu(\varphi,\gamma,\epsilon,n) = \inf\left\{\sum_{x\in S} \exp(S_n\varphi(x))\right\}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todo subconjunto (n, ϵ)-gerador S para algum conjunto Z com $\mu(Z) > 1 - \gamma$.

Então

$$h_\mu + \int \varphi d\mu = \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} log N^\mu(\varphi, \gamma, \epsilon, n).$$

Além disso, a fórmula acima continua válida se substituirmos $\liminf$ *por* $\limsup$.

O resultado acima é uma generalização da fórmula de Katok para a entropia métrica com respeito a uma dada medida $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$ vista em [9] e sua demonstração pode ser vista em [11].

Teorema 3.0.17. *Seja (X, d) espaço métrico compacto, $f : X \to X$ uma aplicação contínua e $X' \subseteq X$ subconjunto f-invariante. Suponha que f satisfaz a propriedade de especificação em X' e $\varphi \in C(X)$ é tal que $\inf\{\int \varphi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_f(X')\} < \sup\{\int \varphi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_f(X')\}$. Fixe $\psi \in C(X)$ e seja $C := \sup\{h_\mu + \int \psi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_f(X')\}$. Suponhamos ainda $P_{top}(f, \psi) < \infty$ e para todo $\gamma > 0$ existem $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_f^e(X')$ que satisfaçam:*

(i) $h_{\mu_i} + \int \psi d\mu_i > C - \gamma$ *para* $i = 1, 2$;

(ii) $\int \varphi d\mu_1 \neq \int \varphi d\mu_2$.

Então $P_{\hat{X}_{f,\varphi}}(\psi) \geq C$. Se $X = X'$ então $C = P_{top}(f, \psi)$ e também $P_{\hat{X}_{f,\varphi}}(\psi) = P_{top}(f, \psi)$

O teorema acima garante que se existem medidas ergódicas com médias distintas e $h_\mu + \int \psi d\mu$ grande então o conjunto irregular tem pressão total. Note que pelo lema 3.0.13 temos que a hipótese $\inf\{\int \varphi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_f(X')\} < \sup\{\int \varphi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_f(X')\}$ nos garante que tal conjunto é não vazio.

Para a prova deste teorema construiremos um conjunto tipo Cantor, $F \subset \hat{X}_{f,\varphi}$ e estimaremos sua pressão relativa. A construção deste conjunto utilizará a propriedade de especificação. De fato, pela existência de medidas cujas integrais do potencial φ são distintas, poderemos construir uma família $\{S_k\}$ de conjuntos tais que as sequências das médias de Birkhoff para pontos em S_{2k-1} estão suficientemente próximas de $\int \varphi d\mu_1$ enquanto que para pontos em S_{2k}, tais sequências são suficientemente próximas de $\int \varphi d\mu_2$. Por especificação, podemos obter pontos que sombreiam ora pontos de S_{2k-1}, ora pontos de S_{2k}. É de se esperar que para pontos obtidos desta forma não exista o limite de Birkhoff, já que teremos um tipo de oscilação no valor das médias. Feito isso, construiremos uma sequência de medidas que nos permitirá estimar a pressão topológica conforme o princípio generalizado de distribuição da pressão.

3.0.1 Prova do Teorema 3.0.17

Fixemos $\gamma > 0$ e tomemos μ_1 e μ_2 como nas hipóteses do teorema. Escolhamos $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $|\int \varphi d\mu_1 - \int \varphi d\mu_2| > 4\delta$.

Sejam $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência estritamente decrescente com $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$ e $\delta_1 < \delta$ e $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência estritamente crescente tais que:

$$Y_k := \left\{ x \in X' : \left| \frac{1}{n} S_n\varphi(x) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)} \right| < \delta_k, \ \forall\, n \geq l_k \right\}$$

satisfaz $\mu_{\rho(k)}(Y_k) > 1 - \gamma$, onde $\rho : \mathbb{N} \to \{1, 2\}$ é dada por $\rho(k) = 1$, se k é ímpar e $\rho(k) = 2$, se k é par. Tal é possível pelo Teorema de Birkhoff.

Lema 3.0.18. *Para qualquer $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos encontrar uma sequência $n_k \to \infty$ e uma coleção enumerável de conjuntos finitos $\{\mathcal{S}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que cada $\mathcal{S}_k$ é um conjunto $(n_k, 4\epsilon)$ separado para Y_k e $M_k := \sum_{x\in\mathcal{S}_k} \exp(S_{n_k}\psi(x))$ satisfaz $M_k \geq \exp(n_k(C - 4\gamma))$. Além disso, a sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pode ser escolhida de modo que, para todo $k \in \mathbb{N}$ $n_k \geq l_k$ e $n_k \geq 2^{m_k}$, onde $m_k := m(\frac{\epsilon}{2^k})$ é a constante de especificação para $\frac{\epsilon}{2^k}$.*

Prova: Pela fórmula de Katok generalizada escolhamos ϵ tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N^{\mu_i}(\psi, \gamma, 4\epsilon, n) \geq h_{\mu_i} + \int \psi d\mu_i - \gamma \geq C - 2\gamma$$

para $i = 1, 2$.

Para $A \subset X$ sejam:

$$Q_n(A, \psi, \epsilon) = \inf\{\textstyle\sum_{x\in S} \exp(S_n\psi(x)) : S \text{ é } (n,\epsilon)\text{-gerador para } A\}$$
$$P_n(A, \psi, \epsilon) = \sup\{\textstyle\sum_{x\in S} \exp(S_n\psi(x)) : S \text{ é } (n,\epsilon)\text{-separado para } A\}$$

Temos $Q_n(A, \psi, \epsilon) \leq P_n(A, \psi, \epsilon)$. De fato, podemos tomar o supremo $P_n(A, \psi, \epsilon)$ sobre todo conjunto (n, ϵ)-separado maximal para A e se E é (n, ϵ)-separado maximal então E é (n, ϵ)-gerador para A. Se não o fosse, existiria $z \in A$ tal que $z \notin B(x, n, \epsilon)$ para todo $x \in E$. Mas então $d_n(z, x) > \epsilon$ para todo $x \in A$. Logo $E \cup \{z\}$ seria (n, ϵ)-separado o que contraria a maximalidade de E. Daí segue a desigualdade.

Como $\mu_{\rho(k)}(Y_k) > 1 - \gamma$, então $Q_n(Y_k, \psi, 4\epsilon) \geq N^{\mu_{\rho(k)}}(\psi, \gamma, 4\epsilon, n)$. Seja $M(k, n) := P_n(Y_k, \psi, 4\epsilon,)$ temos:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M(k, n) \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N^{\mu_{\rho(k)}}(\psi, \gamma, 4\epsilon, n) \geq C - 2\gamma.$$

Podemos então escolher uma sequência $n_k \to \infty$ com $\frac{1}{n_k} \log M(k, n_k) \geq C - 3\gamma$. Para cada k, seja $\mathcal{S}_k$ uma escolha de um conjunto $(n_k, 4\epsilon)$-separado para Y_k que satisfaça:

$$\frac{1}{n_k} \log \left\{ \sum_{x\in\mathcal{S}_k} \exp(S_n\psi(x)) \right\} \geq \frac{1}{n_k} \log M(k, n_k) - \gamma.$$

Para concluirmos o lema, basta observarmos que $\frac{1}{n_k} \log M_k \geq \frac{1}{n_k} \log M(k, n_k) - \gamma \geq C - 4\gamma$.

□

Prosseguimos com a prova do teorema.

Escolhamos ϵ suficientemente pequeno tal que $Var(\psi, 2\epsilon) < \gamma$ e $Var(\varphi, 2\epsilon) < \delta$ e fixe os ingredientes do lema anterior.

Escolhamos uma sequência $N_k \to \infty$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1} + m_{k+1}}{N_k} = 0; \ \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} N_j(n_j + m_j)}{N_{k+1}} = 0.$$

Enumeremos $\mathcal{S}_k := \{x_{k,i}; i = 1, ..., \#\mathcal{S}_k\}$.

Feita uma escolha de k considere o conjunto de palavras de comprimento N_k com entradas em $\{1, 2, ..., \#\mathcal{S}_k\}$. Cada tal palavra $\vec{i} = (i_1, ..., i_{N_k})$ corresponde a um ponto $(x_{k,i_1}, x_{k,i_2}, ..., x_{k,i_{N_k}}) \in {\mathcal{S}_k}^{N_k}$. Usando especificação, podemos escolher um ponto $y := y(\vec{i})$ que satisfaz:

$$d_{n_k}(x_{k,i_j}, f^{a_j}(y)) < \frac{\epsilon}{2^k} \ \forall \ j \in \{1, ..., N_k\}$$

onde $a_j := (j-1)(n_k + m_k)$.

Definimos então $\mathcal{C}_k := \{y(\vec{i}); \vec{i} \in \{1, 2, ..., \mathcal{S}_k\}^{N_k}\}$ e denotamos $c_k := N_k n_k + (N_k - 1)m_k$ o tamanho da órbita de um ponto $y \in \mathcal{C}_k$ usado para especificar pontos em $\mathcal{S}_k$.

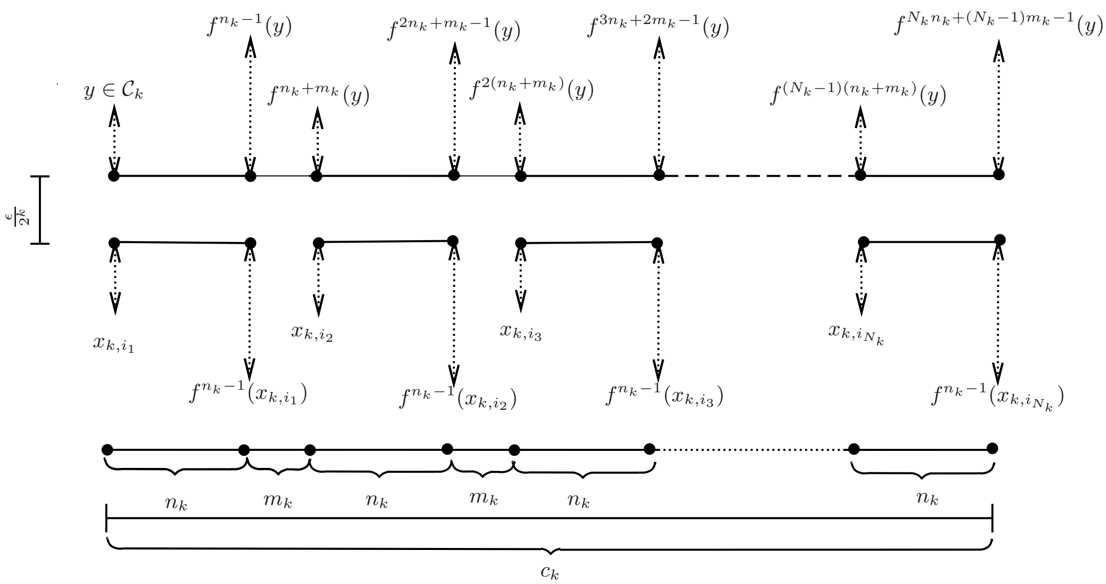

Figura 3.0.1: Esquema da construção de $\mathcal{C}_k$ via especificação.

O seguinte lema nos mostra que palavras distintas em $\{1, 2, ..., \mathcal{S}_k\}^{N_k}$ dão origem a pontos distintos em $\mathcal{C}_k$.

Lema 3.0.19. *Sejam $\vec{i}$ e $\vec{j}$ palavras distintas em $\{1, 2, ..., \mathcal{S}_k\}^{N_k}$. Então $d_{c_k}(y(\vec{i}), y(\vec{j})) > 3\epsilon$. Em particular, temos que $\mathcal{C}_k$ é um conjunto $(c_k, 3\epsilon)$-separado para $\mathcal{S}_k$.*

Prova: Seja $\vec{i} \neq \vec{j}$ então existe $l \in \{1, 2, ..., N_k\}$ tal que $i_l \neq j_l$. Temos então: $d_{n_k}(x_{k,i_l}, f^{a_l}(y(\vec{i}))) < \frac{\epsilon}{2^k}$, $d_{n_k}(x_{k,j_l}, f^{a_l}(y(\vec{j}))) < \frac{\epsilon}{2^k}$ e $d_{n_k}(x_{k,i_l}, x_{k,j_l}) > 4\epsilon$. Esta última pois $x_{k,i_l}, x_{k,j_l} \in \mathcal{S}_k$ que é, por definição, um conjunto $(n_k, 4\epsilon)$-separado.

Ora, como $a_l + n_k \leq c_k$, temos $d_{c_k}(y(\vec{i}), y(\vec{j})) \geq d_{n_k}(f^{a_l}(y(\vec{i})), f^{a_l}(y(\vec{j})))$ e pela desigualdade triangular, $d_{n_k}(x_{k,i_l}, x_{k,j_l}) \leq d_{n_k}(x_{k,i_l}, f^{a_l}(y(\vec{i}))) + d_{n_k}(f^{a_l}(y(\vec{i})), f^{a_l}(y(\vec{j}))) + d_{n_k}(f^{a_l}(y(\vec{j})), x_{k,j_l})$.

Portanto,

$$\begin{aligned} d_{c_k}(y(\vec{i}), y(\vec{j})) &\geq d_{n_k}(f^{a_l}(y(\vec{i})), f^{a_l}(y(\vec{j}))) \\ &\geq d_{n_k}(x_{k,i_l}, x_{k,j_l}) - d_{n_k}(x_{k,i_l}, f^{a_l}(y(\vec{i}))) - d_{n_k}(f^{a_l}(y(\vec{j})), x_{k,j_l}) \\ &> 4\epsilon - \frac{\epsilon}{2^k} - \frac{\epsilon}{2^k} > 3\epsilon. \end{aligned}$$

□

Com o lema anterior temos que $\#\mathcal{C}_k := (\#\mathcal{S}_k)^{N_k}$.

Até aqui escolhemos uma família $\{\mathcal{S}_k\}_{k\geq 1}$ em que cada $\mathcal{S}_k$ é um subconjunto de Y_k. Neste subconjunto destacamos pontos de Y_k cujas órbitas de comprimento n_k são distintas a menos de 4ϵ. Em seguida, usando especificação, construímos a partir de $\{\mathcal{S}_k\}_{k\geq 1}$ uma outra família $\{\mathcal{C}_k\}_{k\geq 1}$ que aproxima o comportamento de N_k trechos de órbita de tamanho n_k de pontos em $\mathcal{S}_k$. Por hipótese temos que para cada k as médias de Birkhoff para tempos suficientemente grandes se aproximam de $\int \varphi d\mu_{\rho(k)}$. Então, não é de se esperar que os pontos construídos até então consistam de pontos irregulares, pois as famílias $\{\mathcal{S}_k\}_{k\geq 1}$ e $\{\mathcal{C}_k\}_{k\geq 1}$ correspondem, a grosso modo, de pontos cujas órbitas aproximam as órbitas em Y_k e estes tem suas médias aproximando-se de um determinado valor fixado para cada k. Mas, como este valor fixado é diferente para cada k, gostaríamos de realizar uma mistura entre esses comportamentos, ou seja, gostaríamos encontrar pontos cujas órbitas ora aproximassem órbitas em $\mathcal{C}_{2k}$ ora em $\mathcal{C}_{2k+1}$. A propriedade de especificação nos permitirá fazer isto como veremos adiante.

Vamos construir agora uma terceira família $\mathcal{T}_k$ por indução. Definamos $\mathcal{T}_1 = \mathcal{C}_1$. Suponhamos que tenhamos definido $\mathcal{T}_k$. Seja $x \in \mathcal{T}_k$ e $y \in \mathcal{C}_{k+1}$. Tome $t_1 := c_1$ e $t_{k+1} := t_k + m_{k+1} + c_{k+1}$. Por especificação, obtemos um ponto $z := z(x, y)$ tal que:

$$d_{t_k}(z, x) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}},\ d_{c_{k+1}}(f^{t_k + m_{k+1}}(z), y) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}.$$

Definimos então $\mathcal{T}_{k+1} := \{z(x, y); x \in \mathcal{T}_k,\ y \in \mathcal{C}_{k+1}\}$. Desta forma, cada $\mathcal{T}_{k+1}$ corresponde a uma mistura entre $\mathcal{T}_k$ e $\mathcal{C}_{k+1}$. Por sua vez, $\mathcal{T}_k$ mistura $\mathcal{T}_{k-1}$ e $\mathcal{C}_k$. Prosseguindo assim, temos que $\mathcal{T}_{k+1}$ consiste de pontos cuja órbita aproxima trechos de órbita em $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_{k+1}$, nesta ordem.

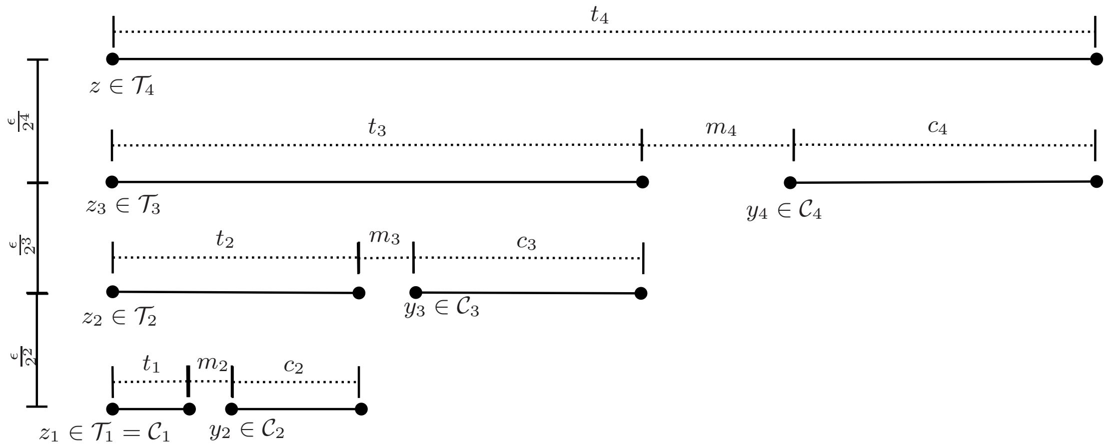

Figura 3.0.2: Esquema de especificação para pontos em $\mathcal{T}_k$ com $k = 1, 2, 3, 4$.

Lema 3.0.20. *Para todo $x \in \mathcal{T}_k$ e $y_1 \neq y_2 \in \mathcal{C}_{k+1}$ temos $d_{t_k}(z(x, y_1), z(x, y_2)) < \frac{\epsilon}{2^k}$ e $d_{t_{k+1}}(z(x, y_1), z(x, y_2)) > 2\epsilon$. Assim $\mathcal{T}_k$ é um conjunto $(t_k, 2\epsilon)$-separado. Em particular se $z, z' \in \mathcal{T}_k$ então $\overline{B}_{t_k}(z, \frac{\epsilon}{2^k}) \cap \overline{B}_{t_k}(z', \frac{\epsilon}{2^k}) = \emptyset$.*

Prova: Sejam $z_1 := z(x, y_1)$ e $z_2 := z(x, y_2)$. Por construção temos que

$$d_{t_k}(x, z_1) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \text{ e } d_{t_k}(x, z_2) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

donde segue a primeira desigualdade. Temos também:

$$\begin{aligned} d_{t_{k+1}}(z_1, z_2) &\geq d_{c_{k+1}}(f^{t_k+m_{k+1}}(z_1), f^{t_k+m_{k+1}}(z_2)) \\ &\geq d_{c_{k+1}}(y_1, y_2) - d_{c_{k+1}}(y_1, f^{t_k+m_{k+1}}(z_1)) - d_{c_{k+1}}(y_2, f^{t_k+m_{k+1}}(z_2)) \\ &\geq 3\epsilon - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = 2\epsilon \end{aligned}$$

$\therefore$ $\mathcal{T}_k$ é $(t_k, 2\epsilon)$-separado.
Que $\overline{B}_{t_k}(z, \frac{\epsilon}{2^k}) \cap \overline{B}_{t_k}(z', \frac{\epsilon}{2^k}) = \emptyset$ segue imediatamente do acima mostrado.

□

Diremos que $z \in \mathcal{T}_{k+1}$ descende de $x \in \mathcal{T}_k$ se $z = z(x, y)$ para algum $y \in \mathcal{C}_{k+1}$.

Lema 3.0.21. *Se $z \in \mathcal{T}_{k+1}$ descende de $x \in \mathcal{T}_k$ então $\overline{B}_{t_{k+1}}(z, \frac{\epsilon}{2^k}) \subset \overline{B}_{t_k}(x, \frac{\epsilon}{2^{k-1}})$.*

Prova: Seja $w \in \overline{B}_{t_{k+1}}(z, \frac{\epsilon}{2^k})$. Então $d_{t_k}(w, x) \leq d_{t_{k+1}}(w, z) + d_{t_k}(z, x) \leq \frac{\epsilon}{2^{k+1}} + \frac{\epsilon}{2^k} \leq \frac{\epsilon}{2^{k-1}}$

□

Observe que dado $z \in \mathcal{T}_k$ podemos representá-lo por uma palavra finita $(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_k)$ onde $\vec{p}_i = (p_1^i, p_2^i, ..., p_{N_i}^i)$ representa um ponto em $\mathcal{C}_i$. Escrevemos $z = z(x, y)$ onde $x \in \mathcal{T}_{k-1}$ e $y \in \mathcal{C}_k$. Temos pelo lema 3.0.20 que y é unicamente determinado. Denotemos então $\vec{p}_k := y$. Também $x \in \mathcal{T}_{k-1}$ é unicamente determinado, denotemos $z_{k-1} := x$. Repetindo o raciocínio para z_{k-1} temos que existem $z_{k-2} \in \mathcal{T}_{k-2}$ e $\vec{p}_{k-1} \in \mathcal{C}_{k-1}$ unicamente determinados. E então escrevemos $z = z(z_{k-2}, \vec{p}_{k-1}, \vec{p}_k)$. Prosseguindo com este raciocínio, poderemos representar z de maneira única por $z = z(\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_k)$, ou simplesmente $(\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_k)$. Associamos ainda para cada $k \in \mathbb{N}$ projeções sobre $\mathcal{T}_i$ para todo $i \in \{1, ..., k-1\}$, $\pi_i^k : \mathcal{T}_k \to \mathcal{T}_i$ dada por $\pi_i^k(z) = z_i$ e tal projeção é bem definida. Note que, se $z \in \mathcal{T}_k$ é dado por $(\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_k)$ então z_i será dado por $(\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_i), \forall i \in \{1, ..., k-1\}$.

Lema 3.0.22. *Dado $z \in \mathcal{T}_k$ temos que $d_{t_i}(z, z_i) < \epsilon$ para todo $i \in \{1, ..., k-1\}$.*

Prova: Por construção temos que $d_{t_{k-1}}(z, z_{k-1}) < \frac{\epsilon}{2^k} < \epsilon$. Mas, também por construção $d_{t_{k-2}}(z_{k-2}, z_{k-1}) < \frac{\epsilon}{2^{k-1}}$, donde $d_{t_{k-2}}(z, z_{k-2}) < \frac{\epsilon}{2^k} + \frac{\epsilon}{2^{k-1}} < \epsilon$. Então temos que $d_{t_i}(z, z_i) < \frac{\epsilon}{2^k} + \frac{\epsilon}{2^{k-1}} + ... + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} < \epsilon, \forall i \in \{1, ..., k-1\}$. Isto prova o lema.

□

Seja $\mathcal{F}_k := \cup_{z \in \mathcal{T}_k} \overline{B}_{t_k}(z, \frac{\epsilon}{2^{k-1}})$. Pelo lema 3.0.21 temos $\mathcal{F}_{k+1} \subset \mathcal{F}_k$. De fato, dado $x \in \mathcal{T}_{k+1}$, x descende de algum $y \in \mathcal{T}_k$ por definição, logo $\overline{B}_{t_{k+1}}(x, \frac{\epsilon}{2^k}) \subset \overline{B}_{t_k}(y, \frac{\epsilon}{2^{k-1}})$.

Definindo $\mathcal{F} := \cap_{k \geq 1} \mathcal{F}_k$ temos que este pode se escrever como união das interseções de sequências decrescentes de compactos conexos (componentes conexas das bolas dinâmicas acima) não vazios cujo diâmetro converge a zero. Temos que cada uma dessas interseções é não vazia, logo $\mathcal{F}$ também é não vazio. Além disso todo ponto $p \in \mathcal{F}$ pode ser unicamente representado por uma sequência $\vec{p} := (\vec{p}_1, \vec{p}_2, ...)$ onde cada $\vec{p}_k = (p_1^k, p_2^k, ..., p_{N_k}^k) \in \{1, 2, ..., \#\mathcal{S}_k\}^{N_k}$.

O seguinte lema mostra que, como em cada passo da construção acima consideramos a especificação com erro $\frac{\epsilon}{2^k}$, cada ponto em $\mathcal{T}_k$ continua 2ϵ próximo dos pontos iniciais em $\mathcal{S}_k$. Isto garante que as médias de Birkhoff permanecem próximas para os tempos adequados.

Lema 3.0.23. *Dado $z := z(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_k) \in \mathcal{T}_k$ temos $\forall\ i \in \{1, ..., k\}$ e $\forall\ l \in \{1, ..., N_i\}$:*

$$d_{n_i}(x_{i,p_l^i}, f^{t_{i-1}+m_i+(l-1)(m_i+n_i)}(z)) < 2\epsilon$$

onde $t_0 := -m_1$.

Prova: Fixe $i \in \{1, ..., k\}$ e $l \in \{1, ..., N_i\}$. Denotemos $a := t_{i-1} + m_i,\ b := (l-1)(m_i + n_i)$ e $z_j := z(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_j)$. Então:

$$d_{n_i}(x_{i,p_l^i}, f^{a+b}(z)) \leq d_{n_i}(x_{i,p_l^i}, f^b(y(\vec{p}_i))) + d_{n_i}(f^b(y(\vec{p}_i)), f^{a+b}(z_i)) + d_{n_i}(f^{a+b}(z_i), f^{a+b}(z))$$

Da construção de $\mathcal{C}_i$ temos:

$$d_{n_i}(x_{i,p_l^i}, f^b(y(\vec{p}_i))) < \frac{\epsilon}{2^i} \tag{3.0.2}$$

Como $n_i + b \leq c_i$, usando a construção de $\mathcal{T}_i$ temos:

$$d_{n_i}(f^b(y(\vec{p}_i)), f^{a+b}(z_i)) \leq d_{n_i+b}(y(\vec{p}_i), f^a(z_i)) \leq d_{c_i}(y(\vec{p}_i), f^a(z_i)) < \frac{\epsilon}{2^i} \tag{3.0.3}$$

Como $n_i + a + b = n_i + t_{i-1} + m_i + (l-1)(m_i + n_i) \leq t_{i-1} + m_i + c_i = t_i$ e $t_i < t_j,\ \forall j > i$. Temos:

$$\begin{aligned}
d_{n_i}(f^{a+b}(z_i), f^{a+b}(z)) &\leq d_{n_i+a+b}(z_i, z) \leq d_{t_i}(z_i, z) \\
&\leq d_{t_i}(z_i, z_{i+1}) + d_{t_i}(z_{i+1}, z_{i+2}) + ... + d_{t_i}(z_{k-1}, z_k) \\
&\leq d_{t_i}(z_i, z_{i+1}) + d_{t_{i+1}}(z_{i+1}, z_{i+2}) + ... + d_{t_{k-1}}(z_{k-1}, z_k) \\
&< \frac{\epsilon}{2^{i+1}} + \frac{\epsilon}{2^{i+2}} + ... + \frac{\epsilon}{2^k} \qquad (3.0.4)
\end{aligned}$$

Juntando (3.0.2),(3.0.3) e (3.0.4) temos a desigualdade enunciada.

□

Dado $\vec{p}_i = (p_1^i, p_2^i, ..., p_{N_i}^i) \in \{1, ..., \#\mathcal{S}_i\}^{N_i}$, lembremos que $\vec{p}_i$ representa de maneira única o ponto $(x_{i,p_1^i}, x_{i,p_2^i}, ..., x_{i,p_{N_i}^i}) \in \mathcal{S}_i^{N_k}$. Definimos:

$$\mathcal{L}(\vec{p}_i) := \prod_{l=1}^{N_i} \exp S_{n_i}\psi(x_{i,p_l^i})$$

Então dado $z \in \mathcal{T}_k$, digamos $z = z(\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_k)$ colocamos:

$$\mathcal{L}(z) := \prod_{j=1}^{k} \mathcal{L}(\vec{p}_j) = \prod_{j=1}^{k}\prod_{l=1}^{N_j} \exp\left(S_{n_j}\psi(x_{j,p_l^j})\right).$$

Construímos então uma medida atômica centrada em $\mathcal{T}_k$ como segue:

$$\nu_k := \sum_{z\in\mathcal{T}_k} \delta_z \mathcal{L}(z)$$

Denotemos por μ_k a probabilidade obtida a partir da normalização de ν_k, ou seja,

$$\mu_k := \frac{1}{\omega_k}\nu_k$$

onde $\omega_k := \sum_{z\in\mathcal{T}_k} \mathcal{L}(z)$.

Lema 3.0.24. $\omega_k = \prod_{j=1}^{N_k} M_j^{N_j}$

Prova:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\vec{p}_i\in\{1,\dots,\#\mathcal{S}_i\}^{N_i}} \mathcal{L}(\vec{p}_i) &= \sum_{\vec{p}_i\in\{1,\dots,\#\mathcal{S}_i\}^{N_i}} \prod_{l=1}^{N_i} \exp(S_{n_i}\psi(x_{i,p_l^i}))\\
&= \sum_{\vec{p}_i\in\{1,\dots,\#\mathcal{S}_i\}^{N_i}} \exp(S_{n_i}\psi(x_{i,p_1^i}))\exp(S_{n_i}\psi(x_{i,p_2^i}))\dots\exp(S_{n_i}\psi(x_{i,p_{N_i}^i}))\\
&= \sum_{p_1^i=1}^{\#\mathcal{S}_i} \exp(S_{n_i}\psi(x_{i,p_1^i}))\sum_{p_2^i=1}^{\#\mathcal{S}_i} \exp(S_{n_i}\psi(x_{i,p_2^i}))\cdot\dots\\
&\quad \cdot\sum_{p_{N_i}^i=1}^{\#\mathcal{S}_i} \exp(S_{n_i}\psi(x_{i,p_{N_i}^i}))\\
&= \underbrace{\sum_{x\in\mathcal{S}_i}\exp(S_{n_i}\psi(x))\sum_{x\in\mathcal{S}_i}\exp(S_{n_i}\psi(x))\dots\sum_{x\in\mathcal{S}_i}\exp(S_{n_i}\psi(x))}_{N_i\ \text{vezes}}\\
&= M_i^{N_i}
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
\omega_k &= \sum_{z\in\mathcal{T}_k}\mathcal{L}(z) = \sum_{\vec{p}_1\in\{1,\dots,\#\mathcal{S}_1\}^{N_1}}\ \sum_{\vec{p}_2\in\{1,\dots,\#\mathcal{S}_2\}^{N_2}}\dots\sum_{\vec{p}_k\in\{1,\dots,\#\mathcal{S}_k\}^{N_k 1}}\mathcal{L}(\vec{p}_1)\mathcal{L}(\vec{p}_2)\dots\mathcal{L}(\vec{p}_k)\\
&= \prod_{j=1}^{N_k} M_j^{N_j}
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.0.25. *Suponha μ um ponto de acumulação da sequência das probabilidades $\mu_k = \frac{1}{\omega_k}\nu_k$. Então $\mu(\mathcal{F}) = 1$, onde $\mathcal{F} = \bigcap_{k\geq 1}\mathcal{F}_k$.*

Prova: Suponha $\mu = \lim_{r\to\infty}\mu_{k_r}$ para alguma subsequência $(k_r)_{r\in\mathbb{N}}$. Note que para todo l fixado e todo $p \geq 0$ temos $\mu_{l+p}(\mathcal{F}_l) = 1$ pois $\mu_{l+p}(\mathcal{F}_{l+p}) = 1$ pela definição de μ_{l+p} e $\mathcal{F}_{l+p}\subset\mathcal{F}_l$. Como cada $\mathcal{F}_l$ é fechado temos que $\mu(\mathcal{F}_l) \geq \limsup_{r\to\infty}\mu_{k_r}(\mathcal{F}_l) = 1,\ \forall l\in\mathbb{N}$. Como $\mathcal{F} = \cap_l\mathcal{F}_l$, segue que $\mu(\mathcal{F}) = 1$.

□

Como mencionamos anteriormente, para cada k, $\mathcal{T}_k$ consiste de pontos cujas órbitas aproximam pontos de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k$ nesta ordem, e em cada $\mathcal{C}_j$ temos que as médias de Birkhoff estão próximas de $\int \varphi d\mu_{\rho(j)}$. Os elementos de $\mathcal{F}$, por construção, pertencem a bolas dinâmicas com centros em $\mathcal{T}_k$ para todo $k \geq 1$ com diâmetro suficientemente pequeno. Então as órbitas dos elementos de $\mathcal{F}$ são aproximações de trechos de órbitas em

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ...$ Assim sendo, o lema seguinte, nos permitirá concluir que este comportamento dos pontos de $\mathcal{F}$ faz com que eles sejam irregulares, ou seja, suas médias de Birkhoff não convirjam. Em linhas gerais, em virtude das escolhas de n_k e N_k, temos que na transição de $\mathcal{C}_k$ para $\mathcal{C}_{k+1}$ o tempo de especificação no seguinte é muito maior do que o anterior. Assim, a média de Birkhoff do ponto que especifica $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k$ tende a ser próxima da média de pontos em $\mathcal{C}_k$, ou seja de $\int \varphi d\mu_{\rho(k)}$. Ilustramos esse comportamento na figura abaixo.

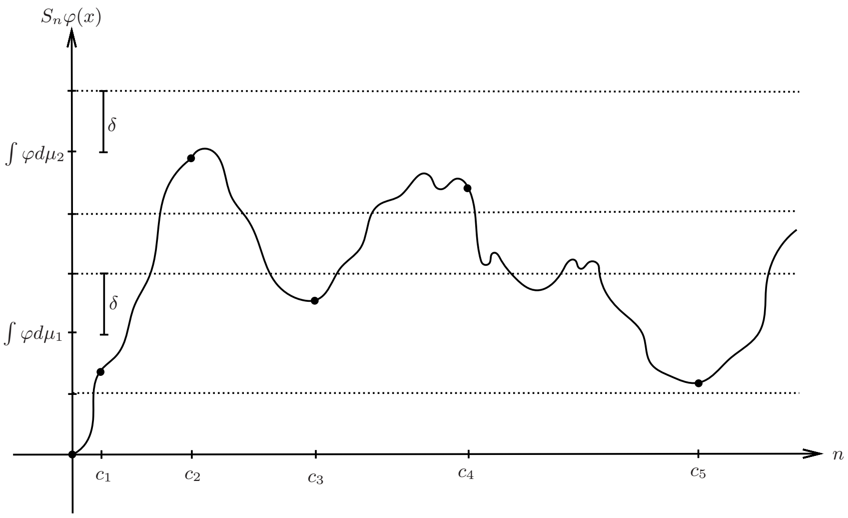

Figura 3.0.3: Gráfico $S_n\psi(x) \times n$ para $x \in \mathcal{F}$, representado de forma contínua pelo caráter ilustrativo.

Lema 3.0.26. *Para todo $p \in \mathcal{F}$ a sequência $\frac{1}{t_k}\sum_{i=0}^{t_k-1} \varphi(f^i(p))$ não converge.*

Prova: Seja $p \in F$. Vimos que podemos escrever $p := \vec{p} = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, ...)$. Considere $y_k := y(\vec{p}_k)$ e $z_k := z_k(\vec{p})$. Afirmamos que $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(y_k) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| = 0$, onde $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ corresponde ao tamanho da órbita de um ponto em $\mathcal{C}_k$ utilizado para especificar sequências de N_k pontos em $\mathcal{S}_k$. Mais precisamente $c_k := N_k n_k + (N_k - 1)m_k$. Em outras palavras, ao longo da sequência $(c_k)_{k\geq 1}$ temos que as médias de Birkhoff estão próximas ora de $\int \varphi d\mu_1$ ora de $\int \varphi d\mu_2$. De fato, denote $a_j := (j-1)(n_k + m_k)$, temos então que:

$$\left|S_{c_k}\varphi(y_k) - c_k\int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{N_k} S_{n_k}\varphi(f^{a_j}(y_k)) - c_k\int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| + m_k(N_k-1)\|\varphi\|$$

$$\leq \left|\sum_{j=1}^{N_k} S_{n_k}\varphi(f^{a_j}(y_k)) - \sum_{j=1}^{N_k} S_{n_k}\varphi(x_{k,i_j})\right| + \left|\sum_{j=1}^{N_k} S_{n_k}\varphi(x_{k,i_j}) - c_k\int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| + m_k(N_k-1)\|\varphi\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N_k}\left|S_{n_k}\varphi(f^{a_j}(y_k)) - S_{n_k}\varphi(x_{k,i_j})\right| + \sum_{j=1}^{N_k}\left|S_{n_k}\varphi(x_{k,i_j}) - n_k\int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right|$$

$$+m_k(N_k-1)\left[\|\varphi\| + \left|\int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right|\right]$$

A última desigualdade segue do fato que $d_{n_k}(f^{a_j}(y_k), x_{k,i_j}) < \frac{\epsilon}{2^k}$ por hipótese e que $x_{k,i_j} \in \mathcal{S}_k$ donde $\left|\frac{1}{n_k}S_{n_k}\varphi(x_{k,i_j}) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| < \delta_k$.

Observe que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k N_k}{c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k N_k}{n_k N_k + (N_k-1)m_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{m_k(N_k-1)}{n_k N_k}} = 1$$

pois $\frac{(N_k-1)m_k}{N_k n_k} \leq \frac{N_k-1}{N_k}\frac{m_k}{2^{m_k}}$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_k-1}{N_k}\frac{m_k}{2^{m_k}} = 0$. Analogamente temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m_k(N_k-1)}{c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{n_k N_k}{m_k(N_k-1)}} = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(y_k) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| \;\leq\;& \underbrace{\frac{n_k N_k}{c_k}}_{\text{limitado}} \underbrace{\left[Var(\varphi, \frac{\epsilon}{2^k}) + \delta_k\right]}_{\to 0 \text{ quando } k\to\infty} \\ &+ \underbrace{\frac{m_k(N_k-1)}{c_k}}_{\to 0 \text{ quando } k\to\infty} \underbrace{\left[\|\varphi\| + \left|\int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right|\right]}_{\text{limitado}}\end{aligned}$$

e portanto provamos a afirmação.

Pela definição de $\mathcal{F}$ temos que $d_{t_k}(p, z_k) < \frac{\epsilon}{2^{k-1}}$ então

$$d_{c_k}(f^{t_k-c_k}(p), y_k) \leq d_{c_k}(f^{t_k-c_k}(p), f^{t_k-c_k}(z_k)) + d_{c_k}(f^{t_k-c_k}(z_k), y_k) < \frac{\epsilon}{2^{k-1}} + \frac{\epsilon}{2^k} \leq \frac{\epsilon}{2^{k-2}}.$$

Temos então:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(f^{t_k-c_k}(p)) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| \;\leq\;& \left|\frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(f^{t_k-c_k}(p)) - \frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(y_k)\right| \\ &+ \left|\frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(y_k) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| \\ \leq\;& Var\left(\varphi, \frac{\epsilon}{2^{k-2}}\right) + \left|\frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(y_k) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right|.\end{aligned}$$

Da afirmação temos que o termo da direita tende a zero quanto $k \to \infty$.

Da forma como escolhemos as sequências $(n_k)_{k\geq 1}$, $(m_k)_{k\geq 1}$ e $(N_k)_{k\geq 1}$ temos que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{c_k}{t_k} = 1$. Logo para γ arbitrariamente pequeno e k suficientemente grande, temos $\left|\frac{c_k}{t_k} - 1\right| < \gamma$. Então:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{t_k}S_{t_k}\varphi(p) - \frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(f^{t_k-c_k}(p))\right| &= \left|\frac{1}{t_k}S_{t_k-c_k}\varphi(p) + \frac{1}{t_k}S_{c_k}\varphi(f^{t_k-c_k}(p))\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(f^{t_k-c_k}(p))\right| \\
&= \left|\frac{1}{t_k}S_{t_k-c_k}\varphi(p) + \frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(f^{t_k-c_k}(p))\left(\frac{c_k}{t_k}-1\right)\right| \\
&\leq \frac{t_k-c_k}{t_k}\|\varphi\| + \gamma\frac{1}{c_k}\left|S_{c_k}\varphi(f^{t_k-c_k}(p))\right| \\
&\leq 2\gamma\|\varphi\|
\end{aligned}
$$

Portanto $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{t_k}S_{t_k}\varphi(p) - \frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(f^{t_k-c_k}(p))\right| = 0$ e consequentemente

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{t_k}S_{t_k}\varphi(p) - \int\varphi d\mu_{\rho(k)}\right| = 0$$

mas isto significa que $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{t_{2k-1}}S_{t_{2k-1}}\varphi(p) = \int\varphi d\mu_1$ e $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{t_{2k}}S_{t_{2k}}\varphi(p) = \int\varphi d\mu_2$. Assim sendo obtemos que as médias de Birkhoff divergem, o que completa a prova do lema.

$\square$

O lema acima nos permite concluir que se existem medidas ergódicas μ_1, μ_2 tais que $\int\varphi d\mu_1 \neq \int\varphi d\mu_2$ e f satisfaz especificação então o conjunto irregular de φ com respeito a f é não vazio, o que finaliza a prova do lema 3.0.13.

Provaremos em seguida que as medidas $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfazem a propriedade de Gibbs aproximada (hipóteses da proposição 3.0.15.) Seja $B := B(q, n, \frac{\epsilon}{2})$ uma bola dinâmica arbitrária que tem interseção não vazia com $\mathcal{F}$. Seja k o único número que satisfaça $t_k \leq n < t_{k+1}$. Seja j tal que $j \in \{0, ..., N_{k+1}-1\}$ é o único natural tal que $t_k + (n_{k+1} + m_{k+1})j \leq n < t_k + (n_{k+1} + m_{k+1})(j+1)$.

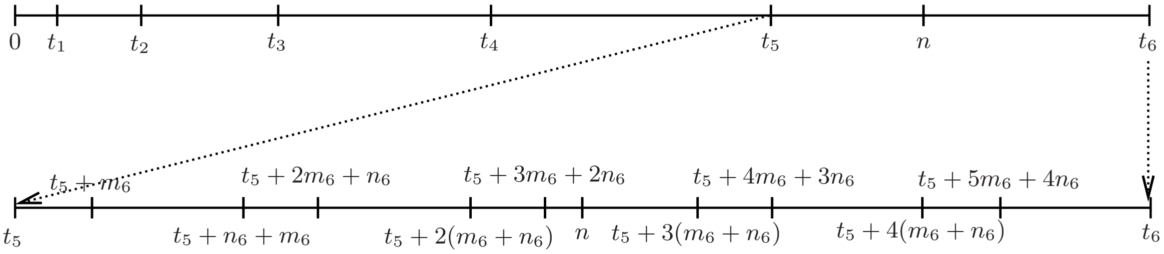

Figura 3.0.4: Escolha $k = 5$ e $j = 2$.

Lema 3.0.27. *Suponha $\mu_{k+1}(B) > 0$, então existe uma única escolha de $x \in \mathcal{T}_k$ e $i_1, ..., i_j \in \{1, ..., \#\mathcal{S}_{k+1}\}$ satisfazendo*

$$\nu_{k+1}(B) \leq \mathcal{L}(x)M_{k+1}^{N_{k+1}-j}\prod_{i=1}^{j}\exp(S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,i_l})).$$

Prova: Recorde que $\mu_k = \frac{1}{\omega_k}\nu_k$. Mais ainda, se $\mu_{k+1}(B) > 0$ então $\mathcal{T}_{k+1} \cap B \neq \emptyset$. Seja $z = z(x,y) \in \mathcal{T}_{k+1} \cap B$ onde $x \in \mathcal{T}_k$ e $y = y(i_1, ..., i_{N_{k+1}}) \in \mathcal{C}_{k+1}$. Por definição temos que $d_{t_k}(z,x) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$ e $d_{c_{k+1}}(f^{t_k+m_{k+1}}(z), y) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$. Observe que como $n \geq t_k$ então $d_n(z,q) < \frac{\epsilon}{2}$ implica que $d_{t_k}(z,q) < \frac{\epsilon}{2}$ portanto $d_{t_k}(x,q) \leq d_{t_k}(x,z) + d_{t_k}(z,q) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Também temos que $t_k + (n_{k+1} + m_{k+1})j \leq n$ e daí $d_n(z,q) < \frac{\epsilon}{2}$ implica

$$d_{n_{k+1}}(f^{t_k+lm_{k+1}+(l-1)n_{k+1}}(z), f^{t_k+lm_{k+1}+(l-1)n_{k+1}}(q)) < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall l = 1, ..., j.$$

Mas,

$$d_{c_{k+1}}(f^{t_k+m_{k+1}}(z), y) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \Rightarrow d_{n_{k+1}}(f^{t_k+lm_{k+1}+(l-1)n_{k+1}}(z), f^{(l-1)(n_{k+1}+m_{k+1})}(y)) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

para $l = 1, ..., N_{k+1}$ e

$$y \in \mathcal{C}_{k+1} \Rightarrow d_{n_{k+1}}(f^{(l-1)(m_{k+1}+n_{k+1})}(y), x_{k+1,i_l}) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}, \text{ para } l = 1, ..., N_{k+1}.$$

Segue então que

$$d_{n_{k+1}}(x_{k+1,i_l}, f^{t_k+lm_{k+1}+(l-1)n_{k+1}}(q)) < 2\epsilon, \forall l = 1, ..., j.$$

Seja $\mathcal{A}(x, i_1, ..., i_j) := \{z(x, y(l_1, ..., l_k)) \in \mathcal{T}_k; l_1 = i_1, ..., l_j = i_j\}$. Afirmamos que $\mathcal{T}_{k+1} \cap B \subseteq \mathcal{A}(x, i_1, ..., i_j)$. De fato, seja $z(x', y(\vec{l})) \in \mathcal{T}_{k+1} \cap B$. Pelo visto acima temos que $d_{t_k}(x', q) < \epsilon$ mas então $d_{t_k}(x, x') < 2\epsilon$ e como $\mathcal{T}_k$ é um conjunto $(t_k, 2\epsilon)$-separado temos $x = x'$. Também $d_{n_{k+1}}(x_{k+1,l_s}, f^{t_k+lm_{k+1}+(l-1)n_{k+1}}(q)) < 2\epsilon$ para $s = 1, ..., j$ implica que $d_{n_{k+1}}(x_{k+1,l_s}, x_{k+1,i_s}) < 4\epsilon$ e como $\mathcal{S}_{k+1}$ é $(n_{k+1}, 4\epsilon)$-separado temos $x_{k+1,l_s} = x_{k+1,i_s}$ para $s = 1, ..., j$. O que conclui a prova da afirmação.

Temos então que, como $\mathcal{T}_{k+1} \cap B \subseteq \mathcal{A}(x, i_1, ..., i_j)$:

$$\begin{aligned}
\nu_{k+1}(B) &\leq \nu_{k+1}(\mathcal{A}(x, i_1, ..., i_j)) = \sum_{z \in \mathcal{T}_{k+1}} \mathcal{L}(z)\delta_z(\mathcal{A}(x, i_1, ..., i_j)) = \sum_{z \in \mathcal{A}(x,i_1,...,i_j)} \mathcal{L}(z) \\
&= \sum_{\vec{p}_{k+1} \in (i_1,...,i_j) \times \{1,...,N_{k+1}\}^{N_{k+1}-j}} \mathcal{L}(x)\mathcal{L}(\vec{p}_{k+1}) \\
&= \mathcal{L}(x) \prod_{l=1}^{j} \exp(S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,i_l})) \sum_{(s_{j+1},...,s_{N_{k+1}}) \in \{1,...,N_{k+1}\}^{N_{k+1}-j}} \exp(S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,s_l})) \\
&= \mathcal{L}(x) \prod_{l=1}^{j} \exp(S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,i_l})) \prod_{l=j+1}^{N_{k+1}} \sum_{s_l=1}^{\#\mathcal{S}_{k+1}} \exp(S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,s_l})) \\
&= \mathcal{L}(x) \prod_{l=1}^{j} \exp(S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,i_l})) M_{k+1}^{N_{k+1}-j},
\end{aligned}$$

como pretendíamos mostrar. Isto completa a prova do lema.

$\square$

O lema anterior nos dá uma estimativa para a cota superior da medida ν_k em bolas dinâmicas em termos das médias de Birkhoff ao longo dos pontos especificado. O seguinte lema nos dá uma relação entre essas médias e a média do centro da bola dinâmica B.

Lema 3.0.28. *Seja $x \in \mathcal{T}_k$ e $i_1, ..., i_j$ como no lema anterior. Então*

$$\mathcal{L}(x)\prod_{i=1}^{j}\exp(S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,i_l})) \leq \exp[S_n\psi(q) + 2nVar(\psi, 2\epsilon) + \|\psi\|(\sum_{i=1}^{k} N_i m_i + (j+1)m_{k+1} + n_{k+1})].$$

Prova: Escrevamos $x = x(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_k)$. Temos por definição que

$$\mathcal{L}(x) = \prod_{i=1}^{k}\mathcal{L}(\vec{p}_i) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{l=1}^{N_i}\exp(S_{n_i}\psi(x_{i,p_l^i})) = \exp\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{N_i} S_{n_i}\psi(x_{i,p_l^i})\right)$$

Note que:

$$S_{t_k}\psi(x) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{N_i} S_{n_i}\psi(f^{t_{i-1}+m_i+(l-1)(n_i+m_i)}(x)) + \sum_{l=1}^{N_1-1} S_{m_1}\psi(f^{ln_1+(l-1)m_1}(x)) + \sum_{i=2}^{k}\sum_{l=1}^{N_i} S_{m_i}\psi(f^{t_{i-1}+(l-1)(m_i+n_i)}(x)).$$

O lema 3.0.23 nos diz que $d_{n_i}(f^{t_{i-1}+m_i+(l-1)(m_i+n_i)}(x), x_{i,p_l^i}) < 2\epsilon$ para todo $i \in \{1, ..., k\}$ e para todo $l \in \{1, ..., N_i\}$. Então:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{N_i} S_{n_i}\psi(x_{i,p_l^i}) - S_{t_k}\psi(x)\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{N_i} S_{n_i}\psi(x_{i,p_l^i}) - S_{n_i}\psi((f^{t_{i-1}+m_i+(l-1)(n_i+m_i)}(x))\right| \\
&\quad + \left|\sum_{l=1}^{N_1-1} S_{m_1}\psi(f^{ln_1+(l-1)m_1}(x))\right| \\
&\quad + \left|\sum_{i=2}^{k}\sum_{l=1}^{N_i} S_{m_i}\psi(f^{t_{i-1}+(l-1)(m_i+n_i)}(x))\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{N_i}\left|S_{n_i}\psi(x_{i,p_l^i}) - S_{n_i}\psi((f^{t_{i-1}+m_i+(l-1)(n_i+m_i)}(x))\right| \\
&\quad + \sum_{l=1}^{N_1-1}\left|S_{m_1}\psi(f^{ln_1+(l-1)m_1}(x))\right| \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k}\sum_{l=1}^{N_i}\left|S_{m_i}\psi(f^{t_{i-1}+(l-1)(m_i+n_i)}(x))\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{N_i} n_i Var(\psi, 2\epsilon) + \sum_{l=1}^{N_1-1} m_i\|\psi\| + \sum_{i=2}^{k}\sum_{l=1}^{N_i} m_i\|\psi\| \\
&\leq t_k Var(\psi, 2\epsilon) + \|\psi\|\sum_{i=1}^{k} N_i m_i
\end{aligned}$$

Assim

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{N_i} S_{n_i}\psi(x_{i,p_l^i}) \leq S_{t_k}\psi(x) + t_k Var(\psi, 2\epsilon) + \|\psi\| \sum_{i=1}^{k} N_i m_i$$

e portanto

$$\mathcal{L}(x) \leq \exp[S_{t_k}\psi(x) + t_k Var(\psi, 2\epsilon) + \|\psi\| \sum_{i=1}^{k} N_i m_i]$$

Analogamente temos:

$$S_{n-t_k}\psi(f^{t_k}(z)) = \sum_{l=1}^{j} S_{m_{k+1}}\psi(f^{t_k+(l-1)(n_{k+1}+m_{k+1})}(z)) + \sum_{l=1}^{j} S_{n_{k+1}}\psi(f^{t_k+lm_{k+1}+(l-1)n_{k+1}}(z))$$

$$+S_{n-(t_k+j(n_{k+1}+m_{k+1}))}\psi(f^{t_k+j(n_{k+1}+m_{k+1})}(z)).$$

Temos por hipótese que $d_{c_{k+1}}(f^{t_k+m_{k+1}}(z), y) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$ logo

$$d_{n_{k+1}}(f^{t_k+lm_{k+1}+(l-1)n_{k+1}}(z), f^{(l-1)(n_{k+1}+m_{k+1})}(y)) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

para $l = 1, ..., N_{k+1}$ e como $d_{n_{k+1}}(f^{(l-1)(n_{k+1}+m_{k+1})}(y), x_{k+1,i_l}) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$ para $l = 1, ..., N_{k+1}$ segue que $d_{n_{k+1}}(f^{t_k+lm_{k+1}+(l-1)n_{k+1}}(z), x_{k+1,i_l}) < \frac{\epsilon}{2^k}$ para $l = 1, ..., N_{k+1}$.

Daí:

$$\left|\sum_{l=1}^{j} S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,i_l}) - S_{n-t_k}\psi(f^{t_k}(z))\right| \leq$$

$$\sum_{l=1}^{j} \left|S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,i_l}) - S_{n_{k+1}}\psi(f^{t_k+m_{k+1}+(l-1)(m_{k+1}+n_{k+1})}(z))\right| +$$

$$\sum_{l=1}^{j} \left|S_{m_{k+1}}\psi(f^{t_k+(l-1)(m_{k+1}+n_{k+1})}(z))\right| + \left|S_{n-(t_k+j(n_{k+1}+m_{k+1}))}\psi(f^{t_k+j(n_{k+1}+m_{k+1})}(z))\right| \leq$$

$$jn_{k+1}Var\,(\psi, 2\epsilon) + jm_{k+1}\|\psi\| + (n - [t_k + j(m_{k+1} + n_{k+1})])\|\psi\| \leq$$

$$jn_{k+1}Var(\psi, 2\epsilon) + ((j+1)m_{k+1} + n_{k+1})\|\psi\|.$$

Portanto

$$\prod_{l=1}^{j} \exp(S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,i_l})) = \exp\left(\sum_{l=1}^{j} S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,i_l})\right)$$

$$\leq \exp[S_{n-t_k}\psi(f^{t_k}(z)) + jn_{k+1}Var(\psi, 2\epsilon) + ((j+1)m_{k+1} + n_{k+1})\|\psi\|)].$$

Relembre que supomos $z \in B\left(q, n, \frac{\epsilon}{2}\right)$, logo $d_n(z, q) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d_{n-t_k}(f^{t_k}(z), f^{t_k}(q)) < \frac{\epsilon}{2}$. Assim temos que $S_{n-t_k}\psi(f^{t_k}(z)) \leq S_{n-t_k}\psi(f^{t_k}(q)) + (n - t_k)Var\left(\psi, \frac{\epsilon}{2}\right)$, conforme observação 1.3.7. Temos ainda que, por definição, $d_{t_k}(z, x) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$, daí $d_{t_k}(x, q) \leq d_{t_k}(x, z) + d_{t_k}(z, q) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}} + \frac{\epsilon}{2} < 2\epsilon$. Então $S_{t_k}\psi(x) \leq S_{t_k}\psi(q) + t_k Var(\psi, 2\epsilon)$.

Segue que

$$\mathcal{L}(x) \leq \exp\left[S_{t_k}\psi(q) + 2t_k Var(\psi, 2\epsilon) + \|\psi\| \sum_{i=1}^{k} N_i m_i\right]$$

e

$$\prod_{l=1}^{j} \exp(S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,i_l})) \leq \exp\left[S_{n-t_k}\psi(f^{t_k}(q)) + (n - t_k + jn_{k+1})Var(\psi, 2\epsilon) + \right.$$

$$\left. ((j+1)m_{k+1} + n_{k+1})\|\psi\|\right].$$

Juntando estas duas expressões concluímos a prova do lema, bastando observar apenas que $t_k + jn_{k+1} + n \leq 2n$.

□

Lema 3.0.29. *Para todo $p \geq 1$ suponha $\mu_{k+p}(B) > 0$. Seja $x \in \mathcal{T}_k$ e $i_1, ..., i_j$ como nos lemas anteriores. Então todo ponto $z \in \mathcal{T}_{k+p} \cap B$ descende de algum ponto em $\mathcal{A}_{x,i_1,...,i_j}$. Temos*

$$\nu_{k+p}(B) \leq \mathcal{L}(x) M_{k+1}^{N_{k+1}-j} M_{k+2}^{N_{k+2}} ... M_{k+p}^{N_{k+p}} \prod_{i=1}^{j} \exp(S_{n_{k+1}}\psi(x_{k+1,i_l}))$$

Prova: Segue como no lema anterior. Basta observamos que como $\mu_{k+1}(B) > 0$ então os pontos de $\mathcal{T}_{k+p} \cap B$ descendem de $\mathcal{A}_{x,i_1,...,i_j}$. A desigualdade segue da mesma combinatória utilizada na demonstração do lema anterior.

□

Lema 3.0.30. $\mu_{k+p}(B) \leq \frac{1}{\omega_k M_{k+1}^j} \exp(S_n\psi(q) + 2nVar(\psi, 2\epsilon) + \|\psi\|(\sum_{i=1}^k N_i m_i + (j+1)m_{k+1} + n_{k+1}))$.

Prova: Usando o lema 3.0.28 segue do lema 3.0.29 que:

$$\nu_{k+p}(B) \leq M_{k+1}^{N_{k+1}-j} ... M_{k+1}^{N_{k+p}} \exp\{S_n\psi(q) + 2nVar(\psi, 2\epsilon)\}$$

$$+ \|\psi\| \left(\sum_{i=1}^{k} N_i m_i + (j+1)m_{k+1} + n_{k+1}\right)$$

Como $\mu_{k+p} = \frac{1}{\omega_{k+p}}\nu_{k+p}$ e $\omega_{k+p} = \omega_k M_{k+1}^{N_{k+1}} ... M_{k+1}^{N_{k+p}}$ segue o resultado.

□

Lema 3.0.31. *Seja $t_k + (n_{k+1} + m_{k+1})j \leq n < t_k + (n_{k+1} + m_{k+1})(j+1)$. Para n suficientemente grande temos $\omega_k M_{k+1}^j \geq \exp((C - 5\gamma)n)$.*

Prova: Por construção temos que $M_k \geq \exp((C-4\gamma)n_k)$. Então:

$$\begin{aligned}
\omega_k M_{k+1}^j &= M_1^{N_1}...M_k^{N_k} M_{k+1}^j \\
&\geq \exp\{(C-4\gamma)(N_1 n_1 + N_2 n_2 + ... + N_k n_k + j n_{k+1})\} \\
&\geq \exp\{(C-5\gamma)(N_1(n_1+m_1) + N_2(n_2+m_2) + ... + N_k(n_k+m_k) \\
&\quad + j(n_{k+1}+m_{k+1}))\} \\
&= \exp\{(C-5\gamma)(t_k + m_1 + j(n_{k+1}+m_{k+1}))\} \geq \exp\{(C-6\gamma)n\}
\end{aligned}$$

Na terceira linha, vale a desigualdade devido ao fato que devido a escolha das sequências $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ podemos adicionar sem perdas termos extras a expressão anterior.

□

Lema 3.0.32. *Para n suficientemente grande,*

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_k(B(q,n,\frac{\epsilon}{2})) \leq \exp(-n(C - 2Var(\psi,\epsilon) - 7\gamma) + S_n\psi(q)).$$

Prova: Pelos lemas 3.0.30 e 3.0.31 para n suficientemente grande e qualquer $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mu_{k+p}(B) &\leq \frac{1}{\omega_k M_{k+1}^j} \exp\left\{S_n\psi(q) + 2nV + \|\psi\| \left(\sum_{i=1}^k N_i m_i + (j+1)m_{k+1} + n_{k+1}\right)\right\} \\
&\leq \frac{1}{\omega_k M_{k+1}^j} \exp\left\{S_n\psi(q) + n(2V+\gamma)\right\} \\
&\leq \exp\{-n(C - 7\gamma - 2V) + S_n\psi(q)\}
\end{aligned}$$

onde $V = Var(\psi, 2\epsilon)$. Novamente utilizamos que n_k é muito maior que m_k.

□

Finalizamos agora a prova do 1º resultado principal.

Prova do teorema 3.0.17.

O lema 3.0.32 nos diz que as medidas $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfazem a propriedade de Gibbs aproximada com constante $s := C - 2Var(\psi,\epsilon) - 7\gamma$. Temos ainda que qualquer ponto de acumulação de $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaz $\mu(\mathcal{F}) = 1$ (lema 3.0.25). Portanto podemos aplicar Princípio de Distribuição da Pressão Generalizado (proposição 3.0.15) e temos

$$P_F(\psi,\epsilon) \geq C - 2Var(\psi,\epsilon) - 7\gamma.$$

Como ϵ foi escolhido arbitrariamente pequeno tal que $Var(\psi, \epsilon) < \gamma$, segue que

$$P_{\hat{X}_{f,\varphi}}(\psi, \epsilon) \geq P_{\mathcal{F}}(\psi, \epsilon) \geq C - 9\gamma.$$

Como γ e ϵ foram tomados arbitrários temos a conclusão do teorema.

$\square$

Observe que ao assumirmos a existência de duas medidas ergódicas tais que $\int \varphi d\mu_1 \neq \int \varphi d\mu_2$ o que nos garantiu, em virtude do teorema de Birkhoff, a convergência das médias $\frac{1}{n}S_n\varphi(x)$ para $\int \varphi d\mu_1$ e para $\int \varphi d\mu_2$ respectivamente em μ_1-q.t.p. $x \in X$ e em μ_2-q.t.p. $x \in X$. Isso nos levou a construção de um subconjunto relevante de $\hat{X}_{f,\varphi}$. Simultaneamente assumimos que estas duas medidas satisfaziam para um potencial φ fixado $h_{\mu_i} + \int \psi d\mu_i > C - \gamma,\ i = 1, 2$. Se X' fosse compacto, usando o princípio variacional teríamos que, tais medidas, dariam uma boa aproximação da pressão topológica de φ com respeito ao sistema restrito a X'. Contudo, em geral, a existência de medidas ergódicas satisfazendo ao mesmo tempo estas hipóteses não é garantida. Ainda assim, podemos remover essas hipóteses, fazendo pequenas modificações na prova, obtendo um resultado análogo de enunciado mais geral.

Teorema 3.0.33. *Seja (X, d) espaço métrico compacto, $f : X \to X$ uma aplicação contínua e $X' \subseteq X$ subconjunto f-invariante. Suponha que f satisfaz a propriedade de especificação em X' e $\varphi \in C(X)$ é tal que* $\inf\{\int \varphi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_f(X')\} < \sup\{\int \varphi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_f(X')\}$. *Dado $\psi \in C(X)$, seja $C_\psi := \sup\{h_\mu + \int \psi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_f(X')\}$. Então $P_{\hat{X}_{f,\varphi}}(\psi) \geq C_\psi$. Se $C_\psi = P_{top}(f, \psi)$ então temos $P_{\hat{X}_{f,\varphi}}(\psi) = P_{top}(f, \psi)$*

Imitaremos a construção do teorema 3.0.17 para a prova deste teorema. Iremos nos concentrar nas ideias envolvidas. Fixe $\psi \in C(X)$ e $\gamma > 0$ pequeno, por definição podemos escolher μ_1 ergódica tal que $h_{\mu_1} + \int \psi d\mu_1 > C_\psi - \frac{\gamma}{2}$. Por hipótese, existe ν ergódica tal que $\int \varphi d\mu_1 \neq \int \varphi d\nu$. Tome então $\mu_2 := t_1\mu_1 + t_2\nu$ com $t_1 + t_2 = 1$. Note que $h_{\mu_2} + \int \psi d\mu_2 = t_1(h_{\mu_1} + \int \psi d\mu_1) + t_2(h_\nu + \int \psi d\nu) > t_1(C_\psi - \frac{\gamma}{2}) + t_2(h_\nu + \int \psi d\mu)$, portanto escolhendo t_1 suficientemente próximo de 1 podemos supor que $h_{\mu_2} + \int \psi d\mu_2 > C_\psi - \gamma$. Observe também que $\int \varphi d\mu_2 = t_1 \int \varphi d\mu_1 + t_2 \int \varphi d\nu$ e portanto $\int \varphi d\mu_1 \neq \int \varphi d\mu_2$ pois, caso contrário,

$$\int \varphi d\mu_2 = t_1 \int \varphi d\mu_1 + t_2 \int \varphi d\nu \Leftrightarrow (1 - t_1) \int \varphi d\mu_1 = t_2 \int \varphi d\nu$$

$$\Leftrightarrow \int \varphi d\mu_1 = \int \varphi d\mu_2 = \int \varphi d\nu,$$

contradizendo a escolha de ν. Note no entanto que μ_2 não é ergódica, pois é combinação de medidas ergódicas.

Escolha $\delta > 0$ de modo que

$$\left|\int \varphi d\mu_1 - \int \varphi d\mu_2\right| > 8\delta.$$

Escolha uma sequência estritamente decrescente $\delta_k \searrow 0$ com $\delta_1 < \delta$. Para k ímpar, como antes, escolhemos uma sequência estritamente crescente $l_k \nearrow \infty$ tal que o conjunto

$$Y_k := \left\{x \in X' : \left|\frac{1}{n} S_n\varphi(x) - \int \varphi d\mu_1\right| < \delta_k, \ \forall n \geq l_k\right\}$$

satisfaz $\mu_1(Y_k) > 1 - \gamma$ para todo k ímpar. Para k par, escolha $l_k > l_k - 1$ e defina $Y_{k,1} := Y_{k-1}$ e

$$Y_{k,2} := \left\{x \in X'; \left|\frac{1}{n} S_n\varphi(x) - \int \varphi d\nu\right| < \delta_k, \ \forall n \geq l_k\right\}$$

satisfazendo $\nu(Y_{k,2}) > 1 - \gamma$.

Lema 3.0.34. *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e k par, podemos encontrar um sequência $\hat{n}_k \to \infty$ tal que $[t_i\hat{n}_k] \geq l_k$ para $i = 1, 2$ e conjuntos $\mathcal{S}_k^i$ $([t_i\hat{n}_k], 4\epsilon)$-separado em $Y_{k,i}$ com $M_k^i := \sum_{x\in\mathcal{S}_k^i} \exp\left(S_{\hat{n}_k}\psi(x)\right)$ satisfazendo*

$$M_k^1 \geq \exp\left([t_1\hat{n}_k]\left(h_{\mu_1} + \int \psi d\mu_1 - 4\gamma\right)\right),$$

$$M_k^2 \geq \exp\left([t_2\hat{n}_k]\left(h_{\nu} + \int \psi d\nu - 4\gamma\right)\right).$$

Além disso, a sequência $(\hat{n}_k)_{k\in 2\mathbb{N}}$ pode ser escolhida de modo que $\hat{n}_k \geq 2^{m_k}$ onde $m_k := m(\frac{\epsilon}{2^k})$ é constante de especificação.

Prova: A prova deste lema segue de maneira análoga ao lema 3.0.18.

□

Para $i = 1, 2$ tome $y_i \in \mathcal{S}_k^i$ e, usando a propriedade de especificação, defina $x := x(y_1, y_2)$ tal que

$$d_{[t_1\hat{n}_k]}(x, y_1) < \frac{\epsilon}{2^k} \text{ e } d_{[t_2\hat{n}_k]}(f^{[t_1\hat{n}_k + m_k]}(x), y_2) < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Definimos então $\mathcal{S}_k$ como o conjunto de pontos construídos desta forma. Temos que se $(y_1, y_2) \neq (w_1, w_2) \in \mathcal{S}_k^1 \times \mathcal{S}_k^2$ então $x(y_1, y_2) \neq x(w_1, w_2)$. Denote por $n_k := [t_1\hat{n}_k] + [t_2\hat{n}_k] + m_k$ o tamanho da órbita de pontos em $\mathcal{S}_k$ utilizado para especificar os pontos de $\mathcal{S}_k^1$ e $\mathcal{S}_k^2$. Teremos $\frac{n_k}{\hat{n}_k} \to 1$ quando $k \to \infty$. Observe que $\mathcal{S}_k$ é um conjunto $(n_k, 4\epsilon)$-separado e que $\#\mathcal{S}_k = \#\mathcal{S}_k^1 \#\mathcal{S}_k^1$.

Para cada k ímpar, construindo $\mathcal{S}_k$ como antes, teremos novamente uma família $(\mathcal{S}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos $(n_k, 4\epsilon)$-separados, do qual, por especificação construiremos as famílias $(\mathcal{C}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\mathcal{T}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, exatamente como na demonstração do teorema anterior. Nos passos seguintes a prova segue sem maiores mudanças. Isto termina o esboço da prova do teorema 3.0.33.

3.1 Aplicação a Fluxos de Suspensão

Definição 3.1.1. Considere $f : X \to X$ um homeomorfismo de um espaço métrico compacto (X, d) e $\rho : X \to [0, \infty)$. Definimos o *espaço de supensão de X por ρ* como sendo o conjunto:

$$X_\rho := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}; 0 \leq x \leq \rho(x)\}$$

em que identificamos para cada $x \in X$ o ponto $(x, \rho(x))$ com $(f(x), 0)$

Podemos definir o espaço de suspensão de X por ρ de maneira alternativa, utilizando relação de equivalência. Considere $F : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ dada por $F(x, t) := (f(x), t - \rho(x))$. Temos que F é uma aplicação bijetiva. De fato, se $F(x, t) = F(y, s) \Rightarrow (f(x), t - \rho(x)) = (f(y), s - \rho(y)) \Rightarrow x = y$ e $s = t \Rightarrow (x, t) = (y, s)$, donde F é injetiva e dado $(x, t) \in X \times \mathbb{R}$ temos que $(x, t) = F(f^{-1}(x), t + \rho(x))$, logo F é sobrejetiva. Definamos a seguinte relação em $X \times \mathbb{R}$: $(x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $F^n(x, t) = (y, s)$.

Temos que $\sim$ é uma relação de equivalência: $(x, t) = F^0(x, t) \Rightarrow (x, t) \sim (x, t)$ daí $\sim$ é reflexiva; se $(x, t) \sim (y, s)$ então $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(x, t) = (y, s) \Leftrightarrow (x, t) = F^{-n}(y, s)$ portanto $(y, s) \sim (x, t)$ e $\sim$ é simétrica; por fim, se $(x, t) \sim (y, s)$ e $(y, s) \sim (z, r)$ então existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $F^n(x, t) = (y, s)$ e $F^m(y, s) = (z, r)$ logo $F^{n+m}(x, t) = (z, r)$ e então $(x, t) \sim (z, r)$ e $\sim$ é transitiva.

Observe que $F(x, t) = (f(x), t - \rho(x)) \Rightarrow F^2(x, t) = (f^2(x), t - \rho(x) - \rho(f(x))) \Rightarrow F^3(x, t) = (f^3(x), t - \rho(x) - \rho(f(x)) - \rho(f^2(x)))$. Portanto

$$F^n(x) = (f^n(x), t - \sum_{i=0}^{n-1} \rho(f^i(x))), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Temos também que $F^{-1}(x, t) = (f^{-1}(x), t + \rho(x) \Rightarrow F^{-2}(x, t) = (f^{-2}(x), t + \rho(f^{-1}(x))) \Rightarrow F^{-3}(x, t) = (f^{-3}(x), t + \rho(x) + \rho(f^{-2}(x)))$ logo

$$F^{-n}(x, t) = (f^{-n}(x), t + \sum_{i=1}^{n} \rho(f^{-i}(x))), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Podemos rescrever então a relação de equivalência como $(x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow$ ou $(x, t) = (y, s)$ ou$\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $(y, s) = (f^n(x), t - \sum_{i=0}^{n-1} \rho(f^i(x)))$, ou $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $(y, s) = (f^{-n}(x), t + \sum_{i=1}^{n} \rho(f^{-i}(x)))$.

X_ρ é um domínio fundamental para esta relação de equivalência, ou seja, cada classe admite um e apenas um representante em X_ρ, o que é consequência direta da definição de $\sim$. Podemos então considerar a projeção natural $\Pi : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}/\sim$ também como $\Pi : X \times \mathbb{R} \to X_\rho$.

Definimos então o *fluxo de suspensão* por $\Psi = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ onde $g_t : X_\rho :\to X_\rho$ dada por $g_t(x, s) = \Pi(x, s + t)$.

Dada uma função $\Phi : X_\rho \to \mathbb{R}$ associamos a função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) := \int_0^{\rho(x)} \Phi(x,t)dt$. Como a função ρ é contínua temos que se Φ é contínua φ também o é. Para $\mu \in \mathfrak{M}_f(X)$ definimos a medida μ_ρ como a única tal que:

$$\int \Phi d\mu_\rho := \frac{\int \varphi d\mu}{\int \rho d\mu}$$

para toda $\Phi \in C(X_\rho)$. Temos que μ_ρ é Ψ-invariante, isto é, $\mu_\rho(g_t^{-1}(\Lambda)) = \mu_\rho(\Lambda),\ \forall t \geq 0$ e para qualquer conjunto mensurável $\Lambda \subset X_\rho$.

De maneira análoga ao caso discreto podemos definir médias de Birkhoff para o fluxo digamos $\frac{1}{t}\int_0^t \Phi(g_t(x,s))dt$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Temos o respectivo teorema ergódico para fluxos que nos dirá que o conjunto dos pontos cuja média não converge tem medida nula com respeito a qualquer $\mu \in \mathfrak{M}_\Psi X_\rho$.

Definição 3.1.2. Nas condições acima, definimos o *conjunto irregular* para o fluxo de suspensão Ψ como o conjunto

$$\hat{X}_\Phi^\rho := \{(x,s) \in X_\rho : \nexists \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(g_t(x,s))dt\}.$$

3.1.1 Entropia Topológica para Fluxos

Definiremos a entropia topológica para fluxos do ponto de vista dimensional, de maneira análoga a definição de pressão topológica usada anteriormente. Seja $Z \subset X$ um conjunto boreliano arbitrário. Seja $\Psi := \{\psi_t\}$ um fluxo em X espaço métrico compacto. Consideremos coleções finitas e enumeráveis da formal $\Gamma := \{B_{t_i,x_i,\epsilon}\}_i$ onde $t_i \in (0,\infty),\ x_i \in X$ e

$$B(t,x,\epsilon) := \{y \in X : d(\psi_s(x),\psi_s(y)) < \epsilon \forall s \in [0,t)\}.$$

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos as quantidades:

$$Q(Z,\alpha,\Gamma) := \sum_{B(t_i,x_i,\epsilon)\in\Gamma} \exp(-\alpha t_i)$$

$$M(Z,\alpha,\epsilon,T) := \inf_\Gamma Q(Z,\alpha,\Gamma)$$

onde o ínfimo é tomado sobre toda coleção enumerável da forma $\Gamma := \{B_{t_i,x_i,\epsilon}\}_i$ com $x_i \in X$ tal que Γ cobre Z e $t_i \geq T\ \forall i$.

Defina

$$m(Z,\alpha,\epsilon) := \lim_{T\to\infty} M(Z,\alpha,\epsilon,T)$$

como na definição da pressão topológica temos que tal limite existe pela monotonicidade da sequencia $M(Z,\alpha,\epsilon,T)$ em T. Também de forma similar a definição de pressão para o caso discreto temos a existência de

$$h_{top}(Z,\epsilon) := \inf\{\alpha : m(Z,\alpha,\epsilon) = 0\} = \sup\{\alpha : m(Z,\alpha,\epsilon) = \infty\}$$

.

Definição 3.1.3. A *entropia topológica* de Z com respeito a Ψ é dada por

$$h_{top}(Z,\Psi) := \lim_{\epsilon\to 0} h_{top}(Z,\epsilon).$$

Lema 3.1.4. Seja (X,d) um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ um homeomorfismo. Seja $\rho : X \to (0,\infty)$ contínua. Seja (X_ρ,Ψ) o correspondente fluxo de suspensão associado a f e ρ. Seja $\Phi : X_\rho \to \mathbb{R}$ contínua e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) := \int_0^{\rho(x)} \Phi(x,t)dt$. *Temos*

(a) $\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(g_t(x,s))dt = \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n\varphi(x)}{S_n\rho(x)}$

(b) $\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(g_t(x,s))dt = \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n\varphi(x)}{S_n\rho(x)}$

(c) $\hat{X}_{\rho,\Phi} = \{(x,s) : \nexists \lim_{n\to\infty} \frac{S_n\varphi(x)}{S_n\rho(x)}, 0 \le s \le \rho(x)\}$

Prova: Fixe $\gamma > 0$. Dado $T > 0$ seja n satisfazendo $S_n\rho(x) \le T < S_{n+1}\rho(x)$. Segue então que $1 - \frac{\|\rho\|}{T} \le \frac{S_n\rho(x)}{T} \le 1$. Assuma T suficientemente grande tal que

$$2T^{-1}\|\rho\|\|\Phi\| < \gamma.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\int_0^T \Phi(g_t(x,s))dt &\le \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^{\rho(f^i(x))} \Phi(f^i(x),t)dt + 2\|\rho\|\|\Phi\| \\ &= S_n\varphi(x) + 2\|\rho\|\|\Phi\|\end{aligned}$$

logo

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Phi(g_t(x,s))dt \le \frac{S_n\rho(x)}{T}\frac{S_n\varphi(x)}{S_n\rho(x)} + \frac{2}{T}\|\rho\|\|\Phi\| \le \frac{S_n\varphi(x)}{S_n\rho(x)} + \gamma$$

Temos então que o resultado segue deste cálculo e de um inteiramente análogo no sentido contrário.

$\square$

O lema acima nos diz que $\hat{X}^\rho_\Phi = \hat{X}(\varphi,\rho) := \left\{x \in X : \text{não existe } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n\varphi(x)}{S_n\rho(x)}\right\}$

Lema 3.1.5. No contexto apresentado são equivalentes:

(a) $\hat{X}^\rho_\Phi \ne \emptyset$

(b) $\hat{X}(\varphi,\rho) := \left\{x \in X : \nexists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n\varphi(x)}{S_n\rho(x)}\right\} \ne \emptyset$

(c) $\inf\left\{\int \Phi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_\Psi(X_\rho)\right\} < \sup\left\{\int \Phi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_\Psi(X_\rho)\right\}$

(d) $\inf\left\{\frac{\int\varphi d\mu}{\int\rho d\mu} : \mu \in \mathfrak{M}_f(X)\right\} < \sup\left\{\frac{\int\varphi d\mu}{\int\rho d\mu} : \mu \in \mathfrak{M}_f(X)\right\}$

Prova: A demonstração segue de forma análoga ao lema 3.0.13.

□

Como consequência do Teorema 3.0.33 estudaremos o caso em que $\rho \equiv 1$ e mostraremos que a entropia do conjunto irregular para o fluxo de suspensão por ρ é total se tal conjunto é diferente do vazio. Observe que, tal fluxo não é topologicamente mixing pois dado, por exemplo, os conjuntos $Z_1 := A \times (1/8, 2/8)$ e $Z_2 := A \times (3/8, 4/8)$ onde $A \subset X$ é qualquer, é fácil vermos que não existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $g_s(Z_1) \cap Z_2$ $\forall s \geq t$. Logo não temos a propriedade de especificação para o fluxo de suspensão. Ainda assim, vale um resultado análogo ao apresentado no teorema 3.0.33, havendo a necessidade apenas de supormos que a dinâmica f no espaço métrico X que dá origem ao fluxo de suspensão satisfaça a especificação, mesmo que o fluxo não a satisfaça.

Note que no caso em que $\rho \equiv 1$ temos que dada $\Phi \in C(X_1)$ então $\hat{X}^1_\Phi = \hat{X}_{f,\varphi}$ onde $\varphi(x) := \int_0^1 \Phi(x,t)dt$. O lema 3.1.5 nos diz então que $\hat{X}_{f,\varphi} \neq \emptyset$ e estamos nas hipóteses do teorema 3.0.33, logo, $P_{\hat{X}(\varphi,1)}(\psi) = P_{top}(f, \varphi)$.

3.1.2 Relação entre a entropia do fluxo de suspensão e a pressão na base.

Considere (X, d) um espaço métrico compacto, $f : X \to X$ um homeomorfismo e $\rho : X \to \mathbb{R}, \rho \equiv 1$. Tome o correspondente espaço de suspensão X_1 com seu respectivo fluxo Ψ. Vamos definir uma métrica em X_1. Considere $X \times \{t\} \subset X \times [0, 1]$, defina $d^t((x, t), (y, t)) = (1-t)d(x, y)+td(f(x), f(y))$. Note que $d^0((x, 0), (y, 0)) = d(x, y)$ e $d^1((x, 1), (y, 1)) = d(f(x), f(y))$. Sejam $x_1, x_2 \in X_1$. Consideremos poligonais finitas, $(w_0, w_1, ..., w_k)$ em que $w_i \in X_1$ representam os vértices da poligonal, $x_1 = w_0$, $w_n = x_2$ e sempre temos $\overline{w_i w_{i+1}} \subset X \times \{t\}$ para algum $t \in [0, 1]$ ou $\overline{w_i w_{i+1}} \subset \mathcal{O}(x, s) = \{g_t(x, s) : t \geq 0\}$ para algum $(x, s) \in X_1$.

Definiremos o comprimento da poligonal como

$$\ell(w_0, w_1, ..., w_n) := \sum_{i=0}^{n-1} \ell(\overline{w_i w_{i+1}})$$

onde se $\overline{w_i w_{i+1}} \subset X \times \{t\}$ então $\ell(\overline{w_i w_{i+1}}) = d^t(w_i, w_{i+1})$ e se $\overline{w_i w_{i+1}} \subset \mathcal{O}(x, s)$ então $\ell(\overline{w_i w_{i+1}}) = |t-r|$ onde $w_i = g_t(x, s)$ e $w_{i+1} = g_r(x, s)$. Caso $w_i \neq w_{i+1}$ mas $w_i, w_{i+1} \in X \times t \cap \mathcal{O}(x, s)$ então $\ell(\overline{w_i w_{i+1}}) = d^t(w_i, w_{i+1})$. Definimos então $d(x_1, x_2) = \inf\{\ell(w_0, w_1, ...w_n) : (w_0, w_1, ...w_n)$ poligonal finita e $w_0 = x_1, w_n = x_2\}$. Em [5] verifica-se que d define de fato uma métrica em X_1 a qual nos referiremos como métrica de Bowen-Walters.

Definição 3.1.6. Definimos a *bola horizontal de raio ϵ e centro em* (x,s) como sendo o conjunto

$$B^H((x,s),\epsilon) := \{(y,s) : (1-s)\, d(x,y) + sd(f(x),f(y)) < \epsilon\}$$

Definimos a partir deste conceito os conjuntos:

$$B((x,s),\epsilon) := \bigcup_{t;|s-t|<\epsilon} B^H((x,t),\epsilon)$$

e

$$B_T((x,s),\epsilon) := \bigcap_{t=0}^{T} g_{-t}(B(g_t(x,s),\epsilon)).$$

Note que $B((x,s),\epsilon)$ não necessariamente é uma bola na métrica de Bowen-Walters. Podemos considerar coberturas por conjuntos da forma $B_T((x,s),\epsilon)$ na definição da entropia topológica em substituição às bolas dinâmicas. Isto porque existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que a bola métrica de raio $C_1\epsilon$ em (x,s) é um subconjunto de $B((x,s),\epsilon)$, que um conjunto de diâmetro ϵ está contido em algum conjunto $B((x,s),C_2\epsilon)$ para ϵ suficientemente pequeno, que $B((x,s),\epsilon)$ é aberto e $diam(\{B((x,s),\epsilon) : (x,s) \in X_1\}) \to 0$, quando $\epsilon \to 0$. Diâmetro e topologia são tomados com respeito a métrica de Bowen-Walters.

Lema 3.1.7. *Seja* $(y,s) \in X \times (-1,\infty)$ *e suponha que* $\Pi(y,s) \in B((x,\delta),\epsilon)$*, em que* $|\delta| \leq \epsilon < 1/4$*. Então para ϵ suficientemente pequeno existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$(y,s) \sim (f^n(y), s-n),\ |s - S_n\varphi(y)| < 4\epsilon \text{ e } d(x, f^n(y)) < 4\epsilon.$$

Prova: Suponha $(y,s) \in B^H((x,\gamma),\epsilon)$ para algum γ com $0 \leq |\gamma| < 2\epsilon$. Então $s = \gamma$ e temos $(1-s)\, d(x,y) + sd(f(x),f(y)) < \epsilon$, logo $(1-s)d(x,y) < \epsilon$ ou seja $d(x,y) < \epsilon(1-s)^{-1} < 4\epsilon$. Para $-\epsilon < \gamma < 0$ aplicamos um argumento similar. Agora assuma que $\Pi(x,s) \in B((x,\delta),\epsilon)$. Então $\Pi(x,s)$ tem um único representante (y',s') com $|s'| < 2\epsilon$ e $y' = f^n(y)$. Aplicamos então o argumento anterior a (y',s').

□

Lema 3.1.8. *Suponha* $|s| < \epsilon$ *e* $n \leq T < n+1$ *então* $B_T((x,s),\epsilon) \subset B_n(x,4\epsilon) \times (-4\epsilon, 4\epsilon)$.

Prova: Seja $(y,t) \in B_T((x,s),\epsilon)$, com $|t| < 4\epsilon$. Então $d(x,y) < 4\epsilon$. Seja t_i que satisfaz $s + t_i = i$ para $i = 1,...,n$. Então $g_{t_i}(y,t) \in B((f^{i-1}(x),0),\epsilon)$. Pelo lema anterior temos $d(f^n(y), f^{i-1}(x)) < 4\epsilon$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Além disso, devemos ter $n = i-1$. Suponha que não, então para algum $\tau \in [0,i)$, $g_\tau(y,t) \notin B(g_\tau(x,s),\epsilon)$ o que é uma contradição. Isto implica que $y \in B_n(x,4\epsilon)$.

□

Temos então o seguinte teorema:

Teorema 3.1.9. *Seja* (X, d) *um espaço métrico compacto e* $f : X \to X$ *um homeomorfismo. Seja* $\rho : X \to (0, \infty)$ *constante e igual a* 1*. Seja* (X_1, Ψ) *o correspondente fluxo de suspensão sobre* X*. Para um boreliano arbitrário* $Z \subset X$ *defina* $Z_1 := \{(z, s) : z \in Z,\ 0 \leq s \leq 1\}$*. Seja* β *a única solução para a equação* $P_Z(-t) = 0$*. Então* $h_{top}(Z_\rho, \Psi) \geq \beta$*.*

Prova: A função $t \mapsto P_Z(-t)$ é contínua e decrescente. Como $P_Z(0) \geq 0$ segue que existe única solução para $P_Z(-t) = 0$. Assuma que $P_Z(-\beta\varphi) > 0$ e mostremos que $h_{top}(Z_\rho, \Psi) \geq \beta$. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário e suficientemente pequeno tal que o lema 3.1.8 se aplica e $P_Z(-\beta\varphi, \epsilon) > 0$. Escolha $\Gamma = \{B_{t_i}((x_i, s_i), \epsilon)\}$ cobertura de Z_ρ com $t_i \geq T$. Tome a subcobertura $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$ que cobre $Z \times \{0\}$ e suponha sem perda de generalidade que $|s_i| < \epsilon$. Seja m_i o único número tal que $m_i \leq t_i < m_i + 1$. Defina $m(\hat{\Gamma}) := \inf_i m_i$. Então $m(\hat{\Gamma}) \geq T - 1$, logo como T tende a infinito, temos o mesmo para $m(\hat{\Gamma})$. Seja $m(\tilde{\Gamma}) := \{B_{m_i}(x_i, 4\epsilon) : B_{t_i}((x_i, s_i), \epsilon) \in \hat{\Gamma}\}$. Pelo lema 3.1.8, $B_{m_i}(x_i, 4\epsilon) \times (-4\epsilon, 4\epsilon)$ cobre $Z \times \{0\}$ e se supusermos que ϵ foi escolhido suficientemente pequeno, então $\tilde{\Gamma}$ é uma cobertura de Z.

Temos

$$\begin{aligned}
Q(Z \times \{0\}, \beta, \hat{\Gamma}) &\geq \sum_{B_i \in \hat{\Gamma}} \exp[-\beta(m_i + 1)] \\
&\geq \sum_{B_i \in \tilde{\Gamma}} \exp[-\beta(m_i + 1)] \\
&\geq \exp[-\beta(m_i + 1)] Q(Z, 0, \tilde{\Gamma}, -\beta) \\
&\geq \exp[-\beta(m_i + 1)] M(Z, 0, m(\hat{\Gamma}), -\beta) \geq 1
\end{aligned}$$

se T e portanto $m(\hat{\Gamma})$ forem escolhidos suficientemente grandes. Logo

$$Q(Z_1, \beta, \Gamma) \geq Q(Z \times \{0\}, \beta, \hat{\Gamma})$$

e como Γ foi tomado arbitrária, temos $M(Z_1, \beta, T-1, \epsilon) \geq 1$ e portanto $h_{top}(Z_1, \Psi, \epsilon) \geq \beta$.

□

Finalmente temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.10. *Seja* (X, d) *um espaço métrico compacto e* $f : X \to X$ *um homeomorfismo que satisfaz a propriedade de especificação. Considere* (X_1, Ψ) *o fluxo de suspensão a altura* 1*. Suponha que* $\Phi \in C(X_1)$ *satisfaz* $\inf\left\{\int \Phi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_\Psi(X_1)\right\} < \sup\left\{\int \Phi d\mu : \mu \in \mathfrak{M}_\Psi(X_1)\right\}$*. Então* $h_{top}(\hat{X}_1, \Psi) = h_{top}(\Psi)$*.*

Prova: Pelo lema 3.1.5, $\hat{X}_1 = Z_1$ onde $Z = \hat{X}(\varphi, 1)$. Lembre que $h_{top}(\Psi)$ é o único número que satisfaz $P_{top}(-t) = 0$. Pelo teorema 3.0.33, $P_Z(-t) = P_{top}(f, -t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo, $h_{top}(\Psi)$ é o único número tal que $P_Z(-t) = 0$. Aplicando o teorema anterior temos os resultado.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Blokh, A. M. Decomposition of dynamical systems on an interval. *Russian Mathematical Surveys 38*, 5 (1983), 133–134.

[2] Bowen, R. Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms. *American Journal of Mathematics 92*, 3 (1970), 725–747.

[3] Bowen, R. Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. *Transactions of the American Mathematical Society 154* (1971), 377–397.

[4] Bowen, R. Some systems with unique equilibrium states. *Theory of computing systems 8*, 3 (1974), 193–202.

[5] Bowen, R., and Walters, P. Expansive one parameter flows. *Journal of Differential Equations 12* (1972), 180–193.

[6] Buzzi, J. Specification on the interval. *Transactions of the American Mathematical Society 349*, 7 (1997), 2737–2754.

[7] Hasselblatt, B., and Katok, A. B. *A First course in dynamics: With a panorama of recent developments.* Cambridge University Press, Cambridge [etc.], 2003.

[8] Haydn, N. T. A., and Ruelle, D. Equivalence of Gibbs and equilibrium states for homeomorphisms satisfying expansiveness and specification. *Communications in mathematical physics 148*, 1 (1992), 155–167.

[9] Katok, A. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Publications Mathématiques de L'IHÉS 51*, 1 (1980), 137–173.

[10] Mañé, R. *Ergodic theory and differentiable dynamics.* Springer-Verlag, Berlin and and New York, 1987.

[11] Mendoza, L. Ergodic attractors for diffeomorphisms of surfaces. *Journal of the London Mathematical Society 2*, 2 (1988), 362–374.

[12] Oxtoby, J. C. On two theorems of Parthasarathy and Kakutani concerning the shift transformation. *Ergodic Theory 203* (1963), 215.

[13] Parthasarathy, K. R. *Probability measures on metric spaces*. Academic Press, New York, 1967.

[14] Pesin, Y. B. *Dimension theory in dynamical systems: Contemporary views and applications*. University of Chicago Press, Chicago, 1997.

[15] Sigmund, K. Generic properties of invariant measures for Axiom A diffeomorphisms. *Inventiones Mathematicae 11*, 2 (1970), 99–109.

[16] Sigmund, K. On dynamical systems with the specification property. *Transactions of the American Mathematical Society 190* (1974), 285–299.

[17] Smale, S. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society 73* (1967), 747–817.

[18] Takens, F. Heteroclinic attractors: time averages and moduli of topological conjugacy. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society 25*, 1 (1994), 107–120.

[19] Thompson, D. The irregular set for maps with the specification property has full topological pressure. *Dynamical Systems 25*, 1 (2010), 25–51.

[20] Walters, P. *An introduction to ergodic theory*, 1 ed. Springer-Verlag, New York, 2000.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 - 110
<http://www.pgmat.ufba.br>