



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



GRÁFICOS RADIAIS COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE NO ESPAÇO HIPERBÓLICO

Adriano Pedreira Cattai

SALVADOR — BAHIA
JANEIRO DE 2006

GRÁFICOS RADIAIS COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE NO ESPAÇO HIPERBÓLICO

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Aprovada pela Banca Examinadora abaixo assinada.

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa (*Orientador*)

UFBA

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira

UFC

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera

UFPB

Salvador, 27 de janeiro de 2006

Cattai, Adriano Pedreira

Gráficos Radiais com Curvatura Média Constante no Espaço Hiperbólico/
Adriano Pedreira Cattai; orientador: José Nelson Bastos Barbosa. — Salva-
dor: UFBA, 2006.

79 p.

1. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Departamento
de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática - Teses. 2. Geometria Riemanniana. I. Cattai, Adriano
Pedreira. II. Barbosa, José Nelson Bastos. III. Título.

A meus pais, meu irmão e minha filha Gabriela.

“O nascimento do bebê é como desembulhar um pacote que o intrigou a maior parte do ano e achar seu conteúdo mais excitante, mais perfeito, mais maravilhoso do que você sempre sonhou.

O bebê é a desculpa perfeita para fazer todas aquelas coisas as quais a vida adulta exigiu que você renunciasse.

Não há por do sol mais bonito, não há maravilha maior do que um bebê!” .

Pam Brown (Seja Bem-vindo, Bebê!)

Agradecimentos

Sempre à Deus!

À minha amada família: meu pai *Ailton Teles Cattai*, minha mãe *Maria do Carmo Pedreira Cattai* e meu irmão *Alessandro Pedreira Cattai*, por sempre acreditar em mim e pela força ao longo de todos estes anos (acredito, que todo agradecimento nunca seria suficiente para recompensá-los).

Aos meus amigos e parceiros de surf *Bruno Melo*, *Diogo Rodrigues*, *Joney Santana* e *Thiago Melo* (e seus familiares), por tornarem a minha vida mais gostosa pelo carinho que dedicam.

À minha grande companheira, amiga, namorada e esposa, *Tharita Veira* por tudo que fez por mim nesse período, profissionalmente e moralmente. Sua presença em minha vida com nossa filha *Gabriela* foi mais um presente de Deus.

Aos meus orientadores em tempos de iniciação científica: *Afonso Henriques* por todo seu apoio, incentivo, ensinamentos e amizade; e *Humberto José Bortolossi* que muito nos ensina com sua amizade, dedicação, disposição e atenção. Aos professores de graduação. Aos colegas de graduação: *Antônio Oliveira Simão*, *Eduardo Palmeira*, *Fabíolo Moraes Amaral*, *Rosane Funato* e *Vinícius Modesto Sertório*.

Aos colegas de turma: *Abílio Souza*, *Gabriela Goes*, *Gilclécio Dantas*, *Josaphat Ricardo*, *Maurício Porto*, *Roberto Pastor*, *Rolando Restany*, *Rosane Funato*, *Silvia Costa* e *Tailson Jeferson*, pela companhia e cumplicidade no dia a dia em cada matéria e nos intermináveis domingos de UFBA. Aos demais mestrandos deste programa que não citei.

A todos os professores da Pós-Graduação em Matemática desta universidade, em especial ao coordenador Professor *Enaldo Silva Vergasta*, pela eterna simpatia, sabedoria e exemplo. Aos funcionários do Instituto de Matemática; às secretárias *Tânia Espínola* e *Dona Zezé* sempre atentas aos nossos pedidos.

Um agradecimento especial ao Professor *José Nelson Bastos Barbosa* pela orientação no desenvolvimento deste trabalho e escolha do tema; pela amizade e toda sua dedicação. Gostaria de agradecer também aos professores *Jorge Herbert S. de Lira* e *Pedro Antonio Hinojosa Vera*, os quais compuseram a banca examinadora e verificaram com tanto zelo esta dissertação.

Na tentativa de não omitir nenhum nome: a todos os amigos de Canavieiras, da EMARC-UR, da UESC, da UFBA; aos colegas de surf, e aos de fora, pelo apoio, compreensão e carinho, pelas piadas e pela força.

Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Provamos a existência de gráficos radiais com curvatura média constante no espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} definido sobre domínios em esferas geodésicas do \mathbb{H}^{n+1} em que a curvatura média no bordo é positiva com respeito a orientação interna; descrito no artigo Radial Graphs with Constant Mean Curvature in the Hyperbolic Space, do professor da Universidade Federal do Ceará, Jorge Herbert S. de Lira.

Palavras Chave: Espaço Hiperbólico, Gráficos Radiais, Hipersuperfície com curvatura média constante, EDP.

Abstract

The existence is proved of radial graphs with constant mean curvature in the hyperbolic space \mathbb{H}^{n+1} defined over domains in geodesic spheres of \mathbb{H}^{n+1} whose boundary has positive mean curvature with respect to the inward orientation; described in the article Radial Graphs with Constant Mean Curvature in the Hyperbolic Space, of the teacher of the Federal University of Ceará, Jorge Herbert S. de Lira.

Key Words: Hyperbolic Space, Radial Graphs, Hypersurfaces with mean constant curvature, PDE.

Sumário

Apresentação	1
Introdução	2
1 Preliminares de Geometria Riemanniana	5
1.1 Variedades Diferenciáveis	5
1.2 Espaço Tangente	6
1.2.1 Campo de Vetores	8
1.3 Métricas Riemannianas	9
1.3.1 A Inversa da Métrica	10
1.4 Variedades Imersas	10
1.5 Conexão Afim	11
1.6 Geodésicas e a Aplicação Exponencial	12
1.7 Segunda Forma Fundamental	15
1.7.1 Segunda Forma Fundamental de Hipersuperfícies	16
1.8 Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano	18
1.9 O Espaço Hiperbólico	27
1.9.1 Isometrias e o Modelo da Bola	28
1.9.2 Superfícies Umbílicas do \mathbb{H}^{n+1}	30
2 Equações Diferenciais Parciais e o Princípio do Máximo	32
2.1 Continuidade Hölder	32
2.2 Equações Diferenciais Parciais Elípticas	34
2.2.1 Equações Diferenciais Parciais Lineares	36

2.2.2	Equações Diferenciais Parciais Quasilineares	36
2.3	O Princípio do Máximo	37
2.3.1	O Princípio do Máximo para Operadores Lineares	37
2.3.2	O Princípio do Máximo para Operadores Quasilineares	46
2.4	Diferencial de Fréchet	47
2.5	O Método da Continuidade	50
3	Gráficos Radiais em \mathbb{R}^{n+1} e \mathbb{H}^{n+1}	53
3.1	Gráficos Radiais em \mathbb{R}^{n+1}	53
3.2	Gráficos Radiais em \mathbb{H}^{n+1}	65
4	Prova do Teorema 3.3	69
4.1	Preliminares	69
4.2	A Prova	73
	Referências Bibliográficas	77

Apresentação

Este trabalho é fruto da orientação do professor José Nelson Bastos Barbosa, do Departamento de Matemática desta universidade, para dissertação de mestrado. Estudamos a tese de doutorado *Existência e Unicidade de Hipersuperfície com Bordo e Curvatura Média Constante em Formas Espaciais* ([13]), e o artigo *Radial Graphs with Constant Mean Curvature in the Hyperbolic Space \mathbb{H}^{n+1}* ([12]), ambos do professor Jorge Herbert Soares de Lira do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará.

Para uma boa compreensão deste trabalho, o leitor deve ter um nível de conhecimento semelhante ao aluno que cursa o segundo ano de mestrado em matemática, especialmente com bons conhecimentos de Geometria Riemanniana e de Análise em Espaços Euclidianos. Para este propósito, sugerimos respectivamente, [17] e [8]. Seria desejável ainda, que o leitor tivesse bons conhecimentos de Equações Diferenciais Parciais (EDP's) e o Princípio do Máximo. Sugerimos para este propósito [7]. No entanto, exibimos os resultados mais relevantes para a nossa necessidade no Capítulo 2.

Caso o leitor tenha conhecimento desses conteúdos referidos acima, poderá iniciar sua leitura a partir do Capítulo 3.

Introdução

As calotas esferas, são exemplos clássicos de hipersuperfícies com curvatura média constante e com bordo conhecido.

A busca por exemplos não-esféricos de hipersuperfícies mergulhadas com curvatura média constante em espaços de curvatura seccional constante é um problema muito conhecido. Um jeito corrente de se fazer isto é através da construção de vários tipos de gráficos. Neste caso as hipersuperfícies são descritas não-parametricamente por funções definidas sobre um domínio numa hipersuperfície umbílica do ambiente. A condição que a superfície tenha curvatura média constante implica que a função que descreve o gráfico seja solução de uma EDP quasilinear.

Gráficos com projeção central injetiva sobre uma Esfera Euclidiana em \mathbb{R}^{n+1} foram construídas por Serrin [16]. Em [3], Treibergs e Wei provam a existência de gráficos radiais definidos sobre toda esfera, cuja curvatura média é prescrita por uma função satisfazendo certas condições de crescimento.

Recentemente, demonstrou-se vários teoremas de existência para gráficos com curvatura média constante no espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} com projeção injetiva sobre domínios em hipersuperfícies umbílicas com curvatura menor ou igual a 1. Por exemplo, J. L. Barbosa e R. S. Earp [15] obtiveram gráficos com curvatura média constante sobre domínios em hiperplanos geodésicos. Gráficos sobre horoesfera foram construídos independentemente por B. Nelli e J. Spruck em [6] e por R. López e S. Montiel em [18]. Também, López anunciou em [19] a existência de soluções para equações da curvatura média sobre hipersuperfícies equidistantes em \mathbb{H}^{n+1} .

Para hipersuperfícies umbílicas de curvatura maior do que 1, isto é, as esferas geodésicas em \mathbb{H}^{n+1} , a noção de gráfico mais apropriada é a de gráfico radial, a fim de evitar auto-

intersecções. O *gráfico radial* de uma função χ definida sobre o fecho de um domínio Ω em uma esfera geodésica S em \mathbb{H}^{n+1} é o conjunto Σ dado por

$$\Sigma = \{\alpha_x(\chi(x)); x \in \overline{\Omega}\},$$

onde α_x é a geodésica minimizante ligando o centro geodésico de S ao ponto $x \in \overline{\Omega}$. Suponhamos que $\Gamma = \partial\Omega$ é uma hipersuperfície de classe $C^{2,\alpha}$ de S , para algum $\alpha \in (0, 1)$, denotemos por H_Γ a curvatura média de Γ com respeito ao vetor normal apontando para o interior de Ω , demonstramos o seguinte teorema, provado por Jorge Herbert S. de Lira, em *Radial Graphs with Constant Mean Curvature in the Hyperbolic Space*. Geometriae Dedicata, **93** (2002), 11–23.

Teorema 3.3 (Teorema Principal). *Sejam S uma esfera geodésica de raio ρ em \mathbb{H}^{n+1} e Ω um domínio em S com fecho contido num hemisfério aberto de S . Se $-\inf H_\Gamma < H \leq 0$, então existe um único gráfico radial Σ sobre $\overline{\Omega}$ com curvatura média H e bordo Γ .*

A prova deste teorema utilizamos um teorema devido a Serrin (Teorema 3.1) para garantir a existência de um gráfico radial mínimo em \mathbb{H}^{n+1} com bordo Γ . Combinamos as estimativas *a priori* para o gradiente (cf. [13], § 2.3) com o Teorema da Função Implícita (Teorema 2.16) e obteremos o resultado acima recorrendo à teoria clássica de Schauder, assim como está exposta por D. Gilbarg e N. Trudinger em [7].

O trabalho trata da questão de encontrarmos soluções únicas para o seguinte problema: uma hipersuperfície deve ser o gráfico de uma função $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde Ω é um domínio em uma esfera geodésica S de raio ρ em \mathbb{H}^{n+1} cujo fecho está contido num hemisfério aberto de S , tendo a curvatura média hiperbólica prescrita por uma função, sujeita à condição de u se anular na fronteira $\Gamma = \partial\Omega$, ou seja, equivale a assegurar a existência de uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $u < 0$, para o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} Q_H(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases},$$

em que $Q_H(u)$ é definido em (3.31), página 68.

A organização dos capítulos segue da seguinte maneira. Para o primeiro capítulo, exibimos alguns conceitos e resultados da Geometria Riemanniana expostos em [17]. O segundo tem o propósito de fundamentar o leitor de algumas ferramentas de EDP's que serão necessárias para a compreensão dos resultados que pretendemos demonstrar. Fizemos uma breve discussão sobre classificação de EDP's, baseado em [7]. Em seguida fizemos um estudo sobre o Princípio do Máximo, que envolve o Princípio do Máximo Fraco, Princípio do Máximo Forte, além de resultados que garantem a unicidade de soluções de

problemas de Dirichlet. Esta parte foi baseada em [7] e em [20]. Apresentamos ainda a continuidade Hölder e o Método da Continuidade, baseado em [7]. Já no terceiro capítulo, apresentamos o problema de construção de gráficos com curvatura média constante em termos da existência de soluções de uma classe específica de equações diferenciais parciais. A partir da noção de gráfico radial no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , deduzimos equações para gráficos radiais sobre esferas geodésicas no espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} . No quarto e último capítulo, exibimos a prova do nosso principal teorema, o Teorema 3.3.

Capítulo 1

Preliminares de Geometria Riemanniana

Este capítulo visa dar uma noção de alguns dos principais conceitos e resultados de Geometria Riemanniana, necessários para compreensão dos resultados que pretendemos demonstrar.

1.1 Variedades Diferenciáveis

Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos \mathcal{U}_α de \mathbb{R}^n em M tais que:

$$(1) \bigcup_{\alpha} (\mathbf{x}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)) = M;$$

(2) Para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(\mathcal{U}_\beta) = \mathcal{W} \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(\mathcal{W})$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(\mathcal{W})$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis;

(3) A família $\{(\mathcal{U}_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

O par $(\mathcal{U}_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ (ou a aplicação \mathbf{x}_α) com $p \in \mathbf{x}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p ; $\mathbf{x}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ é chamada uma *vizinhança coordenada* em p . Uma família $\{(\mathcal{U}_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M .

Indicaremos uma variedade diferenciável M de dimensão n por M^n .

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \rightarrow N$ é *diferenciável* em $p \in M$ se dada uma parametrização $\mathbf{y} : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(\mathcal{U})) \subset \mathbf{y}(\mathcal{V})$ e a aplicação

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. φ é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto. Decorre da condição (2) da definição de variedades diferenciáveis que a definição dada independe da escolha das parametrizações.

Em seguida, estenderemos às variedades diferenciáveis a noção de vetor tangente.

1.2 Espaço Tangente

Seja M^n uma Variedade Diferenciável de dimensão n . Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma *curva diferenciável* em M .

Suponha que $\alpha(0) = p \in M$ e seja $\mathcal{D}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é diferenciável em } p\}$. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função

$$\begin{aligned} \alpha'(0) : \mathcal{D}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto (f \circ \alpha)'(0) \end{aligned}$$

ou seja, o *vetor tangente* à variedade M em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. Indicaremos por $T_p M$ o conjunto desses vetores.

Sejam os seguintes caminhos no \mathbb{R}^n , $\lambda^i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\lambda^i(t) = q + t \cdot e_i$, $i = 1, \dots, n$, e seja $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ uma parametrização em $p = \mathbf{x}(q)$, $q \in \mathcal{U}$. As curvas $\alpha^i = \mathbf{x} \circ \lambda^i$ são chamadas de *curvas coordenadas* passando em p .

Com base nas definições acima, temos

$$\begin{aligned} (\alpha^i)'(0) \cdot f &= (f \circ \alpha^i)'(0) = ((f \circ \mathbf{x}) \circ \lambda^i)'(0) \\ &= \sum_j \frac{\partial (f \circ \mathbf{x})}{\partial x_j}(q) \cdot (\lambda_j^i)'(0) \\ &= \frac{\partial (f \circ \mathbf{x})}{\partial x_i}(q) \end{aligned}$$

e poremos a seguinte notação:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = (\alpha^i)'(0)$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \cdot f = \frac{\partial(f \circ \mathbf{x})}{\partial x_i}(q) \quad , \quad q = \mathbf{x}^{-1}(p)$$

Queremos escrever o vetor tangente $\alpha'(0)$ em termos do sistema de coordenadas de M . Sejam $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas locais de M em p , $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $\alpha((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset \mathbf{x}(\mathcal{U})$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável em p . Façamos o seguinte:

$$\begin{aligned} \alpha'(0) \cdot f &= (f \circ \alpha)'(0) = ((f \circ \mathbf{x}) \circ (\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha))'(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \mathbf{x})}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(0)) \cdot \alpha'_i(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \mathbf{x})}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{-1}(p)) \cdot \alpha'_i(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \cdot f \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right) \cdot f \end{aligned}$$

portanto, $\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, ou seja, o vetor $v = \alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização \mathbf{x} , e mostra que um vetor tangente a uma curva α em p depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas. Decorre também que o conjunto $T_p M$, com as operações usuais de funções, forma um Espaço Vetorial de dimensão n e que a escolha de uma parametrização $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ determina uma base associada $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\}$ em $T_p M$. Conforme ilustra figura 1.1.

Da noção de espaço tangente podemos estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável.

Proposição 1.1. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_p M$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .*

A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela Proposição 1.1 é chamada a *diferencial* de φ em p . Com essa definição, podemos falar em variedades orientadas.

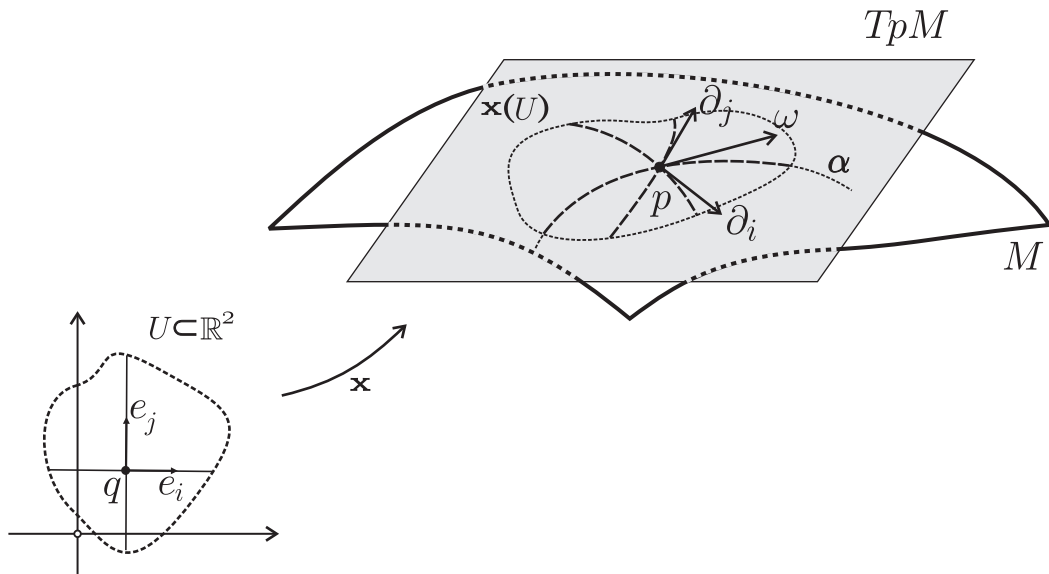


Figura 1.1: Espaço T_pM : $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}(p)$, $\omega = \alpha'(0) = \sum_k \alpha'_k(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(p)$

Seja M^n uma variedade diferenciável. Diz-se que M é *orientável* se M admite uma estrutura diferenciável $(\mathcal{U}_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ tal que, para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(\mathcal{U}_\beta) = \mathcal{W} \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ tem determinante da matriz Jacobiana positivo em cada ponto do seu domínio. Caso contrário, diz-se que M é *não-orientável*. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável é chamada uma orientação de M e M é, então, dita *orientada*. Verifica-se que, se M é orientável e conexa, então existem exatamente duas orientações distintas em M .

1.2.1 Campo de Vetores

Um *campo de vetores* \tilde{X} sobre uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$, onde T_pM é o espaço tangente de M em p . Em termos de aplicação, \tilde{X} é uma aplicação de M em TM ,

$$\begin{aligned} \tilde{X} : M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto ((p), \tilde{X}(p)) \end{aligned}$$

onde TM é o *Fibrado Tangente* de M .

Em termos de um sistema local de coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n , um campo vetorial pode ser expresso por $\tilde{X}(p) = \sum a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, onde a_i são funções definidas na vizinhança coordenada, chamadas *componentes* de \tilde{X} com respeito a x_1, x_2, \dots, x_n . Nessas condições \tilde{X} é *diferenciável* se, e somente se, suas componentes $a_i : \mathbf{x}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

Outra forma de expressar um campo de vetores, é considerando a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} X : \mathcal{D}(M) &\rightarrow \mathcal{F} \\ f &\mapsto X \cdot f : M \rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto X(p) \cdot f \end{aligned}$$

onde $\mathcal{D}(M)$ é o conjunto das funções diferenciáveis em M e \mathcal{F} o conjunto das funções em M , ou seja, todo campo de vetores “leva” o conjunto de funções diferenciáveis com valores em M no conjunto das funções em M , definido por $(Xf)(p) = X(p) \cdot f$.

Seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais diferenciáveis sobre M . Então, $\mathfrak{X}(M)$ é um espaço vetorial real com as operações naturais de adição e multiplicação por escalar. Note que se f é uma função sobre M e $X \in \mathfrak{X}(M)$, então $fX \in \mathfrak{X}(M)$.

1.3 Métricas Riemannianas

Uma *Métrica Riemanniana* numa Variedade Diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (i.é., uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = p \in \mathbf{x}(\mathcal{U})$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = d\mathbf{x}_p(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

é uma função diferenciável em \mathcal{U} .

É claro que esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas.

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da Métrica Riemanniana é dizer que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma coordenada em M , a aplicação

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle_p \end{aligned}$$

é diferenciável nessa vizinhança.

As funções $g_{ij} : \mathbf{x}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas as *Expressões da Métrica Riemanniana* (ou “os g_{ij} da métrica”) no sistema de coordenadas $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Uma variedade diferenciável com uma dada Métrica Riemanniana, chama-se uma *Variedade Riemanniana*.

Estabeleceremos uma noção de equivalências entre estruturas.

Sejam M^m e N^n variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ é chamado uma *isometria* se:

$$\langle u, v \rangle_p^M = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)}^N \quad (1.1)$$

para todo $p \in M$; $u, v \in T_pM$.

Se, além disso para um aberto $\mathcal{U} \subset M$, um difeomorfismo $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \subset N$ satisfazendo (1.1) chama-se uma *isometria local*.

É usual dizer que a variedade Riemanniana M é *localmente isométrica* à variedade N se para todo $p \in M$ existe uma vizinhança \mathcal{V} em M e uma isometria local $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \varphi(\mathcal{V}) \subset N$.

1.3.1 A Inversa da Métrica

Exibiremos a inversa da métrica $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$, a qual indicaremos por g^{ij} .

Sejam os vetores $e_i = \sum_k a_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}$ e $e_j = \sum_l a_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l}$, com o seguinte resultado

$$\delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{k,l} (a_{ik})^\top \cdot g_{kl} \cdot a_{lj}$$

e do fato que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$, obtemos a seguinte relação $I = A^\top \cdot G \cdot A$ e logo $G^{-1} = A \cdot A^\top$, e portanto a expressão da inversa da métrica em coordenadas é

$$g^{ij} = \sum_k a_{ik} (a_{kj})^\top = \sum_k a_{ik} a_{kj}. \quad (1.2)$$

1.4 Variedades Imersas

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma *imersão* se $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_pN$ é injetiva $\forall p \in M$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre a imagem $\varphi(M) \subset N$, com a topologia induzida por N , diz-se que φ é um *mergulho*. E se, $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma *subvariedade* de N .

Observe que se $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$. A diferença $n - m$ é chamada a *codimensão* da imersão φ . E se, a codimensão for igual a 1, $\varphi(M)$ é chamada de *hipersuperfície*.

Suponha $\varphi : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão, N^{n+k} uma variedade Riemanniana e M^n uma variedade diderenciável. Defina

$$\langle u, v \rangle_p^M := \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)}^N$$

como sendo a métrica em M . Essa métrica é chamada de *métrica induzida* por φ , e φ é uma *imersão isométrica*.

1.5 Conexão Afim

Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades, onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$:

- (1) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$;
- (2) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$;
- (3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + XfY$.

Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. A conexão ∇ é dita *compatível com a métrica* $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ se

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle + \langle Y, \nabla_XZ \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita *simétrica* se

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y] \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Dada uma variedade Riemanniana M , a única conexão afim ∇ em M que é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana é chamada de *conexão Riemanniana*.

1.6 Geodésicas e a Aplicação Exponencial

Nesta seção introduziremos a noção de geodésica como uma curva cuja aceleração é nula. Geodésica é um dos conceitos fundamentais da Geometria Riemanniana, pelo fato de minimizarem comprimento de arco para pontos “suficientemente próximo”, e além disso, se uma curva minimiza o comprimento de arco entre dois quaisquer de seus pontos, ela é uma geodésica.

Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma *geodésica em* $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ no ponto t_0 . Se γ é geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma *geodésica*. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada (segmento de) *geodésica ligando* $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

É comum, por abuso de linguagem, dizermos que geodésica é a imagem $\gamma(I)$ de uma geodésica γ . Se γ é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

isto é, o comprimento do vetor $\frac{d\gamma}{dt}$ é constante. Supondo que $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = c \neq 0$, o comprimento de arco s de γ , a partir de uma origem fixa, digamos $t = t_0$, é então dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c(t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é, $c = 1$, diremos que a geodésica γ está *normalizada*.

É possível determinar as equações locais satisfeitas por uma geodésica γ em um sistema de coordenadas $(\mathcal{U}, \mathbf{x})$ em torno de $\gamma(t_0)$, conforme exposto em [17], e prova-se que para cada ponto $p \in M$ e um vetor $v \in T_p M$ em p , existe uma única geodésica passando em p com direção v . Temos assim o seguinte lema.

Lema 1.2 (Lema 2.3, p. 63, [17]). *Existe um único campo G em $TM = \{(q, v); q \in M, v \in T_p M\}$ cujas trajetórias são da forma $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$, onde γ é uma geodésica em M .*

O campo G definido acima é chamado *campo geodésico* em TM e seu fluxo é o *fluxo geodésico*.

Proposição 1.3 (Proposição 2.5, p. 63, [17]). *Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M, p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ e uma aplicação C^∞ $\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M$, $\mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_qM, |v| < \varepsilon_1\}$, tais que a curva $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que nos instante $t = 0$ passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e cada $v \in T_qM$ com $|v| < \varepsilon_1$.*

Esta última proposição afirma que se $|v| < \varepsilon_1$, a geodésica $\gamma(t, q, v)$ existe em um intervalo $(-\delta, \delta)$ e é única. Em verdade, é possível aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo o seu intervalo de definição, ou vice-versa. Isto decorre do seguinte lema.

Lema 1.4 (Lema 2.6, p. 64, [17]). *Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a > 0$, está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e $\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v)$.*

Uma aplicação muito útil para nossos propósitos, é a aplicação exponencial, que definiremos agora. Seja V uma vizinhança de $p \in M$ e $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM, q \in V, w \in T_qM, |w| < \varepsilon\}$ um aberto. Então a aplicação $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), \quad (q, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada *aplicação exponencial* em \mathcal{U} .

Geometricamente, $\exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de q , sobre a geodésica que passa por q com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

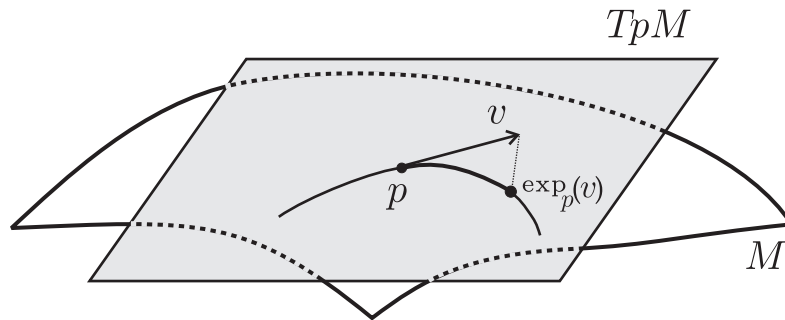


Figura 1.2: Aplicação Exponencial \exp_p

Proposição 1.5 (Proposição 2.9, p. 65, [17]). *Dado $q \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre um aberto de M .*

Se a aplicação exponencial \exp_p é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em T_pM , $\exp_p V = U$ é chamada uma *vizinhança normal* de p . Se $B_\varepsilon(0)$ é tal que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, chamamos $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ a *bola normal* (ou *geodésica*) de centro p e raio ε . A fronteira de uma bola normal é um hipersuperfície em M ortogonal às geodésicas que partem de p , denotamos por $S_\varepsilon(p)$ e denominamos por *esfera normal* (ou *geodésica*). As geodésicas em $B_\varepsilon(p)$ que partem de p são chamadas *geodésicas radiais*.

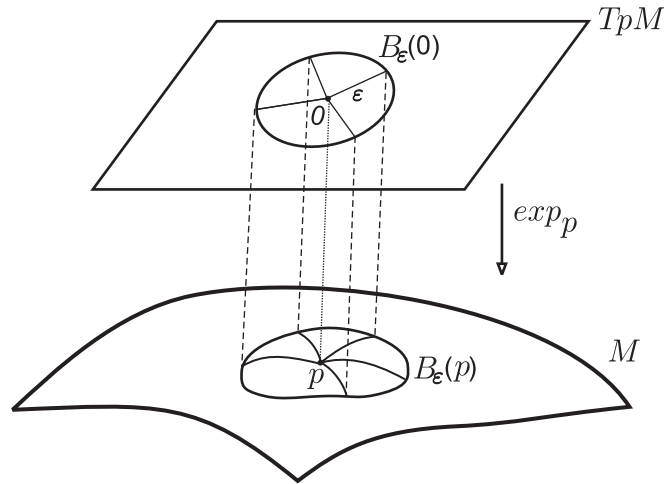


Figura 1.3: Esfera geodésica: $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$

Um segmento geodésico $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é chamado *minimizante* se $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$, em que $\ell(\cdot)$ indica o comprimento de uma curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. A seguinte proposição assegura que as geodésicas minimizam, localmente, o comprimento de arco.

Proposição 1.6 (Proposição 3.6, p. 71, [17]). *Sejam $p \in M$, U uma vizinhança normal de p , $B \subset U$ uma bola normal de centro p . Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $c : [0, 1] \rightarrow M$ é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ então $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$ e se a igualdade vale então $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$.*

Cabe observar que a proposição acima não é global, pois se considerarmos as geodésicas de uma esfera que partem de um ponto p não são minimizantes depois que passam pelo antípoda de p . Por outro lado, se uma curva c diferenciável por partes é minimizante, então c é uma geodésica. Como afirma o seguinte corolário.

Corolário 1.7 (Corolário 3.9, p.73, [17]). *Se uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, tem comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ então γ é uma geodésica. Em particular é regular.*

1.7 Segunda Forma Fundamental

Seja $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Para simplificar a notação, identificaremos, para cada $p \in M$, cada vetor $v \in T_pM$ com $d\varphi_p(v) \in T_{\varphi(p)}\overline{M}$ e $\varphi(\mathcal{W})$ com \mathcal{W} , onde $\mathcal{W} \subset M$ é uma vizinhança de p . Então a métrica de \overline{M} decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta:

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Se X, Y são campos locais de vetores em M , e $\overline{X}, \overline{Y}$ são suas extensões locais a \overline{M} , então a conexão Riemanniana de M é dada por $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de \overline{M} .

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão φ . Para tanto, definiremos $B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$ como um campo local em \overline{M} normal a M , onde X e Y são campos locais em M . Segue que $B(X, Y)$ não depende das extensões de $\overline{X}, \overline{Y}$, e a aplicação $B : \mathfrak{X}(\mathcal{W}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{W})^\perp$ é bilinear e simétrica, onde $\mathfrak{X}(\mathcal{W})^\perp$ são os campos diferenciáveis em M de vetores normais a M .

Estamos aptos a definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(u, v) = \langle B(u, v), \eta \rangle, \quad \forall u, v \in T_pM$$

é uma forma bilinear simétrica. E portanto temos a seguinte definição.

A forma quadrática II_η definida em T_pM por $II_\eta(v) = H_\eta(v, v)$ é chamada a *segunda forma fundamental* de φ em p segundo o vetor normal η .

Denotaremos por $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ a aplicação linear auto-adjunta associada à segunda forma fundamental de φ , isto é,

$$\langle S_\eta(u), v \rangle = H_\eta(u, v) = \langle B(u, v), \eta \rangle, \quad \forall u, v \in T_pM.$$

E essa aplicação linear, em termos da derivada covariante, pode ser expressa como

$$S_\eta(v) = -(\overline{\nabla}_v N)^T,$$

onde N é uma extensão local de η normal a M .

Relacionaremos agora a curvatura de M com a curvatura de \overline{M} e as segundas formas fundamentais. Se $u, v \in T_pM \subset T_p\overline{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por

$K(u, v)$ e $\overline{K}(u, v)$ as curvaturas seccionais de M e \overline{M} , respectivamente, no plano gerado por u e v .

Teorema 1.8 (Gauss). *Sejam $p \in M$ e u, v vetores ortonormais de T_pM . Então*

$$K(u, v) - \overline{K}(u, v) = \langle B(u, u), B(v, v) \rangle - |B(u, v)|^2.$$

Uma imersão $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ é *geodésica* em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental H_η é identicamente nula em p . A imersão φ é *totalmente geodésica* se ela é geodésica para todo $p \in M$.

Uma imersão $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ é *mínima* se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ tem-se que o traço de $S_\eta = 0$.

Escolhendo um referencial ortonormal ξ_1, \dots, ξ_k de vetores em $(T_pM)^\perp$, o *vetor curvatura média* de φ em p é definido por

$$H = \frac{1}{n} \sum_k (\text{tr} S_{\xi_k}) \xi_k$$

que não depende do referencial ξ_k escolhido. E, é claro que φ é mínima se, e somente se, $H(p) = 0$, para todo $p \in M$.

1.7.1 Segunda Forma Fundamental de Hipersuperfícies

Consideremos o caso particular em que a imersão é uma hipersuperfície, isto é, $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de T_pM com valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, i.é., $S_\eta(\xi_i) = \lambda_i \xi_i$, $1 \leq i \leq n$. Se M e \overline{M} são orientáveis e estão orientas, então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base na orientação de M e $\{\xi_1, \dots, \xi_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de \overline{M} . Neste caso, denominamos, os ξ_i *direções principais* e os $\lambda_i = k_i$ *curvaturas principais* de φ e portanto, a curvatura de Gauss–Kronecker de φ é $\det(S_\eta) = \lambda_1 \dots \lambda_n$, e a curvatura média de φ é $\frac{1}{n} \text{tr}(S_\eta) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

Um caso importante ocorre quando $\overline{M} = R^{n+1}$. Neste caso, podemos expressar a curvatura média em coordenadas. Inicialmente, seja N uma extensão local de η , unitária e normal a M . Sejam $\alpha(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$ e $\beta(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))$ duas curvas diferenciáveis em M , com $\alpha(0) = \beta(0) = p \in M$, $\alpha'(0) = u \in T_pM$ e $\beta'(0) = v \in T_pM$.

Escrevendo $u = \sum_i a'_i \frac{\partial X}{\partial x_i}$ e $v = \sum_j b'_j \frac{\partial X}{\partial x_j}$ temos que

$$\begin{aligned}
 \langle B(u, v), N \rangle &= \langle S_\eta \cdot u, v \rangle \\
 &= -\langle dN \cdot u, v \rangle \\
 &= -\left\langle dN \cdot \sum_i a'_i \frac{\partial X}{\partial x_i}, \sum_j b'_j \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle \\
 &= -\left\langle \sum_i a'_i dN \cdot \frac{\partial X}{\partial x_i}, \sum_j b'_j \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle \\
 &= -\sum_{i,j} a'_i b'_j \left\langle dN \cdot \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle \\
 &= \sum_{i,j} a'_i b'_j \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle
 \end{aligned}$$

onde a última igualdade vem do fato que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle N, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle &= \left\langle dN \cdot \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$b_{kl} := \left\langle B \left(\frac{\partial X}{\partial x_k}, \frac{\partial X}{\partial x_l} \right), N \right\rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial x_k \partial x_l} \right\rangle,$$

e então a curvatura média pode ser escrita

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i,j} g^{ij} b_{ij} \quad (1.3)$$

onde g^{ij} é a inversa da métrica $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle$, como foi visto em (1.2).

1.8 *Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano*

Definiremos nesta seção, o gradiente, a divergência, o laplaciano e o hessiano em uma variedade Riemanniana, determinando para cada um destes suas expressões em relação a um referencial ortonormal e a um sistema de coordenadas. Destacaremos alguns resultados básicos que utilizaremos ao longo do nosso trabalho, também veremos a relação que existe entre os laplacianos de duas variedades conformes.

Dada uma função $f \in \mathcal{D}(M)$, o *gradiente* de f é o campo de vetores

$$\begin{aligned} \text{grad} f : M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto (p, \text{grad} f(p)), \end{aligned}$$

definido por

$$\langle \text{grad} f, X \rangle = X(f) = df \cdot X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, o *divergente* de X é a função $\text{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\text{div} X(p) = \text{tr}(Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)),$$

onde tr representa o traço da aplicação linear $Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)$.

O operador linear $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ definido por:

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad} f), \quad \forall f \in \mathcal{D}(M)$$

é chamado o operador *Laplaciano* de M .

Calcularemos, primeiramente, as expressões de $\text{grad} f$, $\text{div} X$ e Δf em relação a um referencial ortogonal (ξ_1, \dots, ξ_n) definido em um aberto de M . Observemos no entanto que as expressões do gradiente, da divergência e do laplaciano independem do referencial escolhido, pois o gradiente em cada ponto $p \in M$ é o vetor que representa o funcional linear df_p e a divergência é o traço de uma aplicação linear.

Como, por definição,

$$\langle \text{grad} f, \xi_i \rangle = \xi_i f, \quad i = 1, \dots, m,$$

a expressão de $\text{grad} f$ é

$$\text{grad} f = \sum_{i=1}^m (\xi_i f) \xi_i. \quad (1.4)$$

De acordo com a definição da divergência de um campo X , temos

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{\xi_i} X, \xi_i \rangle,$$

e escrevendo $X = \sum_{j=1}^m X_j \xi_j$ segue que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\xi_i} X, \xi_i \rangle &= \left\langle \nabla_{\xi_i} \left(\sum_{j=1}^m X_j \xi_j \right), \xi_i \right\rangle = \sum_{j=1}^m \langle \nabla_{\xi_i} (X_j \xi_j), \xi_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \langle (\xi_i X_j) \xi_j + X_j \nabla_{\xi_i} \xi_j, \xi_i \rangle \\ &= \xi_i X_i + \sum_{j=1}^m X_j \langle \nabla_{\xi_i} \xi_j, \xi_i \rangle \\ &= \xi_i X_i - \sum_{j=1}^m X_j \langle \nabla_{\xi_i} \xi_i, \xi_j \rangle \\ &= \xi_i X_i - \langle \nabla_{\xi_i} \xi_i, X \rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^m \left\{ \xi_i X_i - \langle \nabla_{\xi_i} \xi_i, X \rangle \right\}. \quad (1.5)$$

Para o cálculo do laplaciano, combinando (1.4) e (1.5) para obter

$$\delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^m \left\{ \xi_i (\xi_i f) - \langle \nabla_{\xi_i} \xi_i, \operatorname{grad} f \rangle \right\},$$

isto é,

$$\delta f = \sum_{i=1}^m \left\{ \xi_i (\xi_i f) - (\nabla_{\xi_i} \xi_i) f \right\}. \quad (1.6)$$

Em particular, de $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ é um referencial geodésico em p , ou seja, se além da ortogonalidade temos $(\nabla_{\xi_i} \xi_j)(p) = 0$, $i, j = 1, \dots, m$, então as expressões da divergência e do laplaciano no ponto p são

$$\operatorname{div} X(p) = \sum_{i=1}^m (\xi_i X_i)(p) \quad \text{e} \quad \Delta f(p) = \sum_{i=1}^m \xi_i (\xi_i f)(p).$$

Seja $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow M$ um sistema de coordenadas locais, vamos calcular as expressões de $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} X$ e δf nesse sistema de coordenadas. Denotando $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, seja $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ a base associada a esse sistema e considere a matriz $G = (g_{ij})$ definida por $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$,

$i, j = 1, \dots, m$. Denotemos por $\mathbf{g} = \det G$, $G^{-1} = (g^{ij})$ o determinante e a inversa de G , respectivamente.

Para o gradiente, escrevendo

$$\text{grad} f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \partial_i,$$

temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \langle \alpha_i \partial_i, \partial_j \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_{ij},$$

e pondo $A = (\alpha_i)_{m \times 1}$ e $F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{m \times 1}$, obtemos $GA = F$, ou seja, $A = G^{-1}F$. Segue que

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

e conseqüentemente,

$$\text{grad} f = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \partial_i. \quad (1.7)$$

Calculemos a expressão da divergência. Se $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ é um referencial ortogonal definido em $\mathbf{x}(\mathcal{U})$, escrevendo

$$\xi_i = \sum_{k=1}^m e_{ki} \partial_k, \quad i = 1, \dots, m,$$

temos

$$\delta_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \sum_{k,l=1}^m e_{ki} e_{lj} g_{kl}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Pondo $E = (e_{ij})$, segue que $E^T G E = I$. Portanto, podemos também escrever

$$\delta_{ij} = \sum_{k,l=1}^m g_{ik} e_{kl} e_{jl}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (1.8)$$

Para um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$X = \sum_{i=1}^m a_i \partial_i,$$

tem-se que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X &= \sum_k \langle \nabla_{\xi_k} X, \xi_k \rangle = \sum_k \left\langle \nabla \sum_i e_{ik} \partial_i \sum_j a_j \partial_j, \sum_l e_{lk} \partial_l \right\rangle \\
 &= \sum_{i,j,k,l} e_{lk} e_{ik} \langle \nabla_{\partial_i} a_j \partial_j, \partial_l \rangle \\
 &= \sum_{i,j,k,l} e_{lk} e_{ik} \left\{ \left\langle \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \partial_j, \partial_l \right\rangle + a_j \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle \right\} \\
 &= \sum_{i,j,k,l} \left\{ g_{jl} e_{lk} e_{ik} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + \sum_r (g_{rl} e_{lk} e_{ik} a_j \Gamma_{ij}^r) \right\},
 \end{aligned}$$

em que Γ_{ij}^r , $i, j, r = 1, \dots, m$, são os símbolos de Christoffel da conexão ∇ no sistema de coordenadas \mathbf{x} . Utilizando (1.8), obtemos

$$\operatorname{div} X = \sum_i \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^i \right\}, \quad (1.9)$$

e como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{lk} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right\},$$

segue que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,l} a_j g_{li} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,l} \left\{ a_j g^{li} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + a_i g^{lj} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - a_j g^{il} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,l} a_j g^{jl} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i}.
 \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X &= \sum_i \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} a_i \sum_{j,l} g^{jl} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} \right\} = \sum_i \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} a_i \operatorname{tr} \left(G^{-1} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) \right\} \\
 &= \sum_i \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} a_i \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\} = \sum_i \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g}) \right\},
 \end{aligned}$$

em que $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ denota a matriz obtida de G derivando-se cada elemento em relação à i -ésima coordenada, e onde usamos o fato que $\frac{\partial g}{\partial x_i} = g \operatorname{tr} \left(G^{-1} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right)$ (veja [So], p. 56). Logo, a expressão da divergência de X é

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \partial_i (a_i \sqrt{g}). \quad (1.10)$$

Finalmente, a partir de (1.7) e (1.10) obtemos o laplaciano como

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \quad (1.11)$$

Convém mencionar agora algumas propriedades, que usando as definições de gradiente, divergente e laplaciano, por um cálculo direto podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \text{grad}(fg) &= f \text{grad}h + h \text{grad}f \\ \text{div}(fX) &= f \text{div}X + \langle \text{grad}f, X \rangle \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\Delta(fg) = f\Delta h + h\Delta f + 2\langle \text{grad}f, \text{grad}h \rangle, \quad (1.13)$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{D}(M)$. Se M é compacta e orientável, com bordo ∂M , para $X \in \mathfrak{X}(M)$ tem-se que

$$\int_M (\text{div}X) dV = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle dA,$$

em que dV e dA são os elementos de volume de M e do bordo ∂M , respectivamente, e ν é o campo unitário normal exterior em ∂M . Este resultado é conhecido como *Teorema da Divergência* ([Sp], p. 192). Decorrem deste teorema e de (1.12) as chamadas *Fórmulas de Green*

$$\int_M \{f\Delta g + \langle \text{grad}f, \text{grad}g \rangle\} dV = \int_{\partial M} f \langle \text{grad}g, \nu \rangle dA \quad (1.14)$$

e

$$\int_M \{f\Delta g - g\Delta f\} dV = \int_{\partial M} \{f \langle \text{grad}g, \nu \rangle - g \langle \text{grad}f, \nu \rangle\} dA, \quad (1.15)$$

para $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Introduziremos o conceito de variedades conformes. Seja $\varphi : M \rightarrow N$ um difeomorfismo, em que N é uma variedade Riemanniana. Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\bar{\nabla}$ e $\bar{\Delta}$ a métrica em N , a conexão Riemanniana e o laplaciano relativos a esta métrica, respectivamente. Suponha que existe uma função $\mu \in \mathcal{D}(M)$ que satisfaça, para todo $p \in M$ e todo par de vetores $v, w \in T_p M$, $\mu(p) \neq 0$ e

$$\overline{\langle d\varphi_p \cdot v, d\varphi_p \cdot w \rangle} = \mu^2(p) \langle v, w \rangle.$$

Neste caso, dizemos que φ é um *difeomorfismo conforme*, que M e N são *variedades conformes* e que a função μ^2 é o *coeficiente de conformalidade* de φ .

Observemos que dados $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$, pondo $g = f \circ \varphi^{-1}$, temos para $q = \varphi(p)$,

$$\begin{aligned} ((d\varphi \cdot X)g)(q) &= dg_q \cdot (d\varphi_p \cdot X(p)) = (df_p \circ d\varphi^{-1} \circ d\varphi_q)(X(p)) \\ &= df_p \cdot (X(p)) = (Xf)(p) \\ &= (Xf \circ \varphi^{-1})(q), \end{aligned}$$

isto é,

$$(d\varphi \cdot X)g = Xf \circ \varphi^{-1}. \quad (1.16)$$

O lema a seguir nos mostra como se relacionam as conexões de duas variedades conformes, neste caso as de M e N .

Lema 1.9. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\bar{\nabla}_{d\varphi \cdot X}(d\varphi \cdot Y) = d\varphi \cdot \left\{ \nabla_X Y + \frac{1}{2} \mu^{-2} \left(X(\mu^2) Y + Y(\mu^2) X - \langle X, Y \rangle \text{grad}(\mu^2) \right) \right\} \quad (1.17)$$

Demonstração. Seja $S(X, Y)$ o campo que satisfaz

$$\bar{\nabla}_{d\varphi \cdot X}(d\varphi \cdot Y) = d\varphi \cdot \left(\nabla_X Y + S(X, Y) \right), \quad (1.18)$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Utilizando (1.16) obtemos

$$\begin{aligned} (d\varphi \cdot X) \overline{\langle d\varphi \cdot Y, d\varphi \cdot Z \rangle} &= (d\varphi \cdot X) (\mu^2 \langle Y, Z \rangle \circ \varphi^{-1}) \\ &= X(\mu^2 \langle Y, Z \rangle) \circ \varphi^{-1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(d\varphi \cdot X) \overline{\langle d\varphi \cdot Y, d\varphi \cdot Z \rangle} = \left\{ X(\mu^2) \langle Y, Z \rangle + \mu^2 X \langle Y, Z \rangle \right\} \circ \varphi^{-1}. \quad (1.19)$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \overline{\langle \bar{\nabla}_{d\varphi \cdot X}(d\varphi \cdot Y), d\varphi \cdot Z \rangle} &= \overline{\langle d\varphi \cdot (\nabla_X Y + S(X, Y)), d\varphi \cdot Z \rangle} \\ &= \mu^2 \langle \nabla_X Y + S(X, Y), Z \rangle \circ \varphi^{-1} \\ &= \left\{ \mu^2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \mu^2 \langle S(X, Y), Z \rangle \right\} \circ \varphi^{-1}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Permutando-se Y e Z em (1.20) obtemos

$$\overline{\langle d\varphi \cdot Y, \bar{\nabla}_{d\varphi \cdot X}(d\varphi \cdot Z) \rangle} = \left\{ \mu^2 \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \mu^2 \langle Y, S(X, Z) \rangle \right\} \circ \varphi^{-1}. \quad (1.21)$$

Como

$$(d\varphi \cdot X) \overline{\langle d\varphi \cdot Y, d\varphi \cdot Z \rangle} = \overline{\langle \bar{\nabla}_{d\varphi \cdot X}(d\varphi \cdot Y), d\varphi \cdot Z \rangle} + \overline{\langle d\varphi \cdot Y, \bar{\nabla}_{d\varphi \cdot X}(d\varphi \cdot Z) \rangle},$$

decorre de (1.19), (1.20) e (1.21) que (1.18) equivale a

$$X(\mu^2) \langle Y, Z \rangle = \mu^2 \{ \langle S(X, Y), Z \rangle + \langle Y, S(X, Z) \rangle \}. \quad (1.22)$$

Por outro lado, $S(X, Y)$ dado por

$$S(X, Y) = \frac{1}{2} \mu^{-2} \left\{ X(\mu^2) Y + Y(\mu^2) X - \langle X, Y \rangle \text{grad}(\mu^2) \right\}$$

obviamente verifica

$$\langle S(X, Y), Z \rangle = \frac{1}{2} \mu^{-2} \left\{ X(\mu^2) \langle Y, Z \rangle + Y(\mu^2) \langle X, Z \rangle - Z(\mu^2) \langle X, Y \rangle \right\}$$

e, conseqüentemente, satisfaz a equação (1.22), o que conclui a demonstração do lema. \square

A proposição seguinte nos mostra a relação que existe entre os laplacianos das variedades conformes M e N .

Proposição 1.10. *Sejam $f \in \mathcal{D}(M)$ e $g \in \mathcal{D}(N)$ tais que $g = f \circ \varphi^{-1}$. Então*

$$\bar{\Delta}g(q) = \left\{ \frac{1}{\mu^2} \Delta f + \frac{m-2}{2\mu^4} \text{grad}(\mu^2) f \right\} (p), \quad (1.23)$$

em que $q = \varphi(p)$, $p \in M$.

Demonstração. Seja $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ um referencial ortogonal definido num aberto $V \subset M$. Temos que $\{\eta\zeta_1, \dots, \eta\zeta_m\}$ é um referencial ortogonal definido no aberto $W = \varphi(V)$, em que $\eta = \frac{1}{\mu} \circ \varphi^{-1}$ e $\zeta_i = d\varphi \cdot \xi_i$, $i = 1, \dots, m$. Assim, de acordo com 1.6, em W , temos

$$\bar{\Delta}g = \sum_{i=1}^m \left\{ \eta\zeta_i(\eta\zeta_i g) - (\bar{\Delta}_{\eta\zeta_i}(\eta\zeta_i)g) \right\}. \quad (1.24)$$

Utilizando (1.16), vem que

$$\begin{aligned} \zeta_i g &= (d\varphi \cdot \xi_i)g = (\xi_i f) \circ \varphi^{-1}, \\ \zeta_i(\zeta_i g) &= (d\varphi \cdot \xi_i) \left((\xi_i f) \circ \varphi^{-1} \right), \\ \zeta_i \xi &= (d\varphi \cdot \xi_i) \eta = \left\{ \xi_i \left(\frac{1}{\mu} \right) \right\} \circ \varphi^{-1}. \end{aligned}$$

Calculemos cada parcela da soma em (1.24). Temos que

$$\eta\zeta_i(\eta\zeta_i g) = \eta(\zeta_i \eta)(\zeta_i g) + \eta^2 \zeta_i(\zeta_i g) = \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\xi_i \left(\frac{1}{\mu} \right) \right) (\eta_i f) + \frac{1}{\mu^2} \eta_i(\eta_i) \right\} \circ \varphi^{-1}$$

e

$$\left(\overline{\Delta}_{\eta\zeta_i}(\eta\zeta_i)\right)g = \eta(\zeta_i\eta)(\zeta_i g) + \eta^2\left(\left(\overline{\Delta}_{\zeta_i}\zeta_i\right)g\right).$$

Para desenvolvermos esta última igualdade, vamos determinar a expressão de $\overline{\nabla}_{\zeta_i}\zeta_i$. Pelo Lema 1.9 tem-se que

$$\overline{\nabla}_{\zeta_i}\zeta_i = d\varphi \cdot \left\{ \nabla_{\xi_i}\xi_i + \frac{1}{2\mu^2}\left(2\xi_i(\mu^2)\xi_i - \text{grad}(\mu^2)\right) \right\},$$

e decorre de (1.16) que

$$\left(\overline{\nabla}_{\zeta_i}\zeta_i\right)g = \left\{ \left(\nabla_{\xi_i}\xi_i\right)f + \frac{1}{2\mu^2}\left(2\xi_i(\mu^2)\xi_i - \text{grad}(\mu^2)\right)f \right\} \circ \varphi^{-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left(\overline{\nabla}_{\eta\zeta_i}(\eta\zeta_i)\right)g &= \left\{ \frac{1}{\mu}\left(\xi_i\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)\left(\xi_i f\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu^2}\left[\left(\nabla_{x_i}\xi_i\right)f + \frac{1}{2\mu^2}\left(2\xi_i(\mu^2)\xi_i - \text{grad}(\mu^2)\right)f\right] \right\} \circ \varphi^{-1}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, o termo do somatório em (1.24) é

$$\begin{aligned} \eta\zeta_i(\eta\zeta_i g) - \overline{\nabla}_{\eta\zeta_i}(\eta\zeta_i) &= \left\{ \frac{1}{\mu^2}\left(\xi_i(\xi_i f) - (\nabla_{\xi_i}\xi_i)f\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\mu^4}\left(2\xi_i(\mu^2)\xi_i - \text{grad}(\mu^2)\right)f \right\} \circ \varphi^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}g &= \left\{ \frac{1}{\mu^2}\sum_{i=1}^m\left(\xi_i(\xi_i f) - (\nabla_{\xi_i}\xi_i)f\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\mu^4}\left(\sum_{i=1}^m\text{grad}(\mu^2) - 2\sum_{i=1}^m\xi_i(\mu^2)\xi_i\right)f \right\} \circ \varphi^{-1} \\ &= \left\{ \frac{1}{\mu^2}\Delta f + \frac{1}{2\mu^4}\text{grad}(\mu^2)f \right\} \circ \varphi^{-1}, \end{aligned}$$

e em $q = \varphi(p)$ temos (1.23). □

Para finalizarmos a seção, definiremos o Hessiano de uma função $f \in \mathfrak{X}(M)$.

Sejam $f \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$. Defina o *hessiano* de f no ponto p como a aplicação bilinear, $\text{Hess}f : T_p M \times T_p M \rightarrow R$ dada por:

$$\text{Hess}f(X, Y) = \langle \nabla_X(\text{grad}f), Y \rangle.$$

Observando que

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(f),$$

temos que $\text{Hess}f(X, Y) = \text{Hess}f(Y, X)$, em que $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $\text{Hess}f$ é uma forma bilinear simétrica. Se (x_1, \dots, x_n) é um sistema de coordenadas locais em M e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ então:

$$\text{Hess}f(\partial_i, \partial_j) = \partial_i \partial_j f - (\nabla_{\partial_i} \partial_j)(f).$$

Como $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$ podemos escrever a expressão acima da seguinte maneira:

$$\text{Hess}f(\partial_i, \partial_j) = \left(\partial_i \partial_j - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \right)(f).$$

Denotaremos também por $\text{Hess}f$ o operador linear auto-adjunto associado ao hessiano de f .

As igualdades abaixo decorrem das propriedades do gradiente e divergente já vistas anteriormente:

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle; \\ \frac{1}{2}\Delta(f^2) &= f\Delta f + |\nabla f|^2; \\ \Delta f &= \text{tr}(\text{Hess}f). \end{aligned}$$

1.9 O Espaço Hiperbólico

Os espaços de curvatura seccional constante podem ser agrupadas em três tipos: os de curvaturas seccional positiva, os de negativa e os que possuem curvatura seccional nula. Se multiplicarmos uma métrica Riemanniana por uma constante positiva c , então a sua curvatura seccional é multiplicada pelo inverso de c . Portanto, podemos supor que a curvatura seccional constante de uma variedade é 1, 0 ou -1 .

O espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} tem curvatura seccional nula, na esfera \mathbb{S}^n esse valor é 1; portanto para estudarmos as variedades com curvatura seccional constante devemos obter uma com curvatura -1 . E esse é o caso do espaço hiperbólico.

Definimos como *Espaço Hiperbólico* de dimensão $n + 1$, o semi-espaço do \mathbb{R}^{n+1} dado por

$$\mathbb{H}^{n+1} := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_n > 0\}$$

munido da métrica

$$ds^2 = \frac{dx_0^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2} = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=0}^n dx_i^2. \quad (1.25)$$

Este espaço é simplesmente conexo e é completo. Antes de justificarmos estes fatos, vejamos o seguinte exercício.

Consideremos \mathbb{H}^2 o plano hiperbólico, ou seja, $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$. Mostraremos que o segmento $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$, $a > 0$, do eixo dos y , dado $\gamma(t) = (0, t)$ é a imagem de uma geodésica. De fato, para qualquer arco $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ dado por $c(t) = (x(t), y(t))$ com $c(a) = (0, a)$ e $c(b) = (0, b)$, temos que

$$\begin{aligned} \ell(c) &= \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \frac{1}{y} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{1}{y} \sqrt{[y'(t)]^2} dt \geq \int_a^b \frac{|y'(t)|}{y} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{dy}{y} = \ell(\gamma), \end{aligned}$$

ou seja, γ minimiza arcos diferenciáveis por partes, e então pelo Corolário 1.7, a imagem de γ é uma geodésica. A aplicação

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad z = x + iy, \quad ad - bc = 1,$$

que é uma isometria em \mathbb{H}^2 , transforma o eixo y em semi-círculos superiores ou semi-retas $x = x_0, y > 0$. Estas curvas são, portanto, geodésicas em \mathbb{H}^2 . Na verdade, estas são todas

as geodésicas de \mathbb{H}^2 , pois por cada ponto $p \in \mathbb{H}^2$ e cada direção em $T_p\mathbb{H}^2$ passa um tal círculo com centro no eixo x .

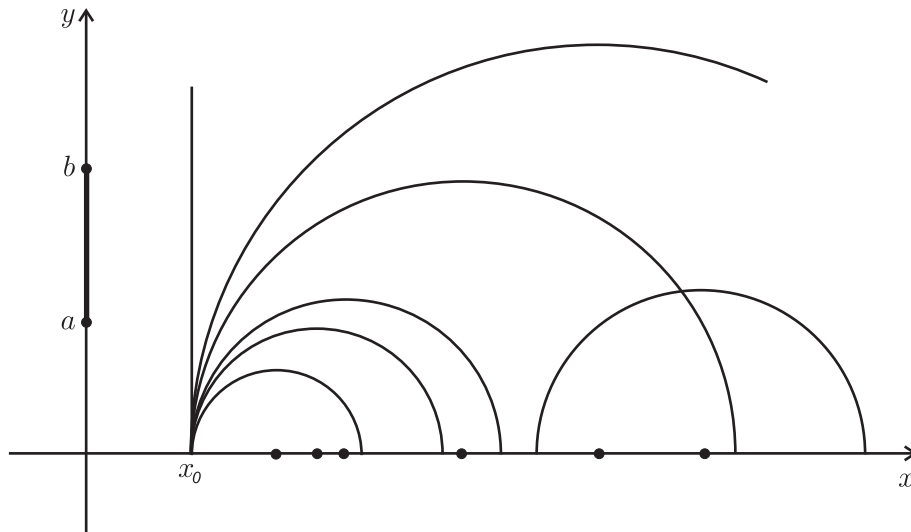


Figura 1.4: Geodésicas em \mathbb{H}^2

O espaço \mathbb{H}^{n+1} é completo pois as retas perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$, e os círculos de \mathbb{H}^{n+1} cujos planos são perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$ e cujos centros estão neste hiperplano são geodésicas de \mathbb{H}^{n+1} . De fato, observe que uma isometria do \mathbb{R}^{n+1} que só envolver as variáveis x_0, \dots, x_n não altera a métrica dada em (1.25) e é, portanto, uma isometria em \mathbb{H}^{n+1} . Então basta considerar retas e círculos no plano x_0x_n e o exercício que fizemos acima. Na verdade, essas são todas as geodésicas de \mathbb{H}^{n+1} .

1.9.1 Isometrias e o Modelo da Bola

Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é *conforme* se para todo $p \in U$ e todo par de vetores v_1 e v_2 em p tivermos

$$\langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle, \quad \lambda^2 \neq 0.$$

A função positiva $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada o *coeficiente de conformalidade* de f

As isometrias do espaço hiperbólico no modelo do semi-espaço são as restrições a $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ das transformações conformes de \mathbb{R}^{n+1} que levam \mathbb{H}^{n+1} sobre si mesmo. Uma demonstração deste resultado, encontra-se em [17].

Identificaremos algumas hipersuperfícies importantes do espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} . As subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{H}^{n+1} são as interseções de \mathbb{H}^{n+1} com hiperplanos

de \mathbb{R}^{n+1} ortogonais a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$, e as interseções de \mathbb{H}^{n+1} com as esferas de \mathbb{R}^{n+1} com centro em $\partial\mathbb{H}^{n+1}$.

O espaço hiperbólico possui outros modelos além do semi-espaço. Um deles veremos agora, que é o modelo da bola. Considere a bola $\mathbb{B}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de raio 2 e centro na origem,

$$\mathbb{B}^{n+1} = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; |p| = 2\}$$

e introduza a métrica

$$h_{ij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 - \frac{1}{4}|p|^2\right)^2}.$$

Considere a aplicação $f : \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ dada por

$$f(p) = 4 \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} - (0, \dots, 0, 1), \quad \text{em que } p_0 = (0, \dots, 0, -2).$$

Mostraremos que f é uma isometria, e portanto, \mathbb{B}^{n+1} é isométrico a \mathbb{H}^{n+1} .

Com efeito, se v é um vetor em p e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica o produto interno na métrica euclidiana,

$$\langle df_p(v), df_p(v) \rangle = \frac{16\langle v, v \rangle}{|p - p_0|^4}.$$

Por outro lado, indicando $f(p) = (f_1(p), \dots, f_n(p))$, obteremos

$$f_n(p) = \frac{4(x_n + 2)}{|p - p_0|^2} - 1 = \frac{4 - |p|^2}{|p - p_0|^2}.$$

Portanto,

$$\frac{\langle df_p(v), df_p(v) \rangle}{(f_n(p))^2} = \frac{16|p - p_0|^4 \langle v, v \rangle}{(4 - |p|^2)^2 |p - p_0|^4} = \frac{\langle v, v \rangle}{\left(1 - \frac{1}{4}|p|^2\right)^2}.$$

Da injetividade de f , conclui-se que f é uma isometria de \mathbb{B}^{n+1} em \mathbb{H}^{n+1} . Observe que f leva $\partial\mathbb{B}^{n+1} - \{p\}$ em $\partial\mathbb{H}^{n+1}$.

Note que uma aplicação $g : \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ é uma isometria de \mathbb{B}^{n+1} na métrica h_{ij} , se e somente se, g é a restrição de uma transformação conforme do \mathbb{R}^{n+1} que leva \mathbb{B}^{n+1} sobre \mathbb{B}^{n+1} .

Observe f leva $\partial\mathbb{B}^{n+1} - \{p_0\}$ em $\partial\mathbb{H}^{n+1}$. O ponto p_0 seria então levado no “infinito”, pois nesse ponto o denominador da fração na fórmula de f se anulava uma potência a mais do que o numerador.

Na figura 1.5, à direita, é o Círculo Limite III de M. C. Escher, foi feita em 1959. Ele usou a geometria hiperbólica no modelo da bola. Os peixes dessa gravura são representações de nossos queridos “chatóides” (ou “poincaretas”, se você preferir), habitantes

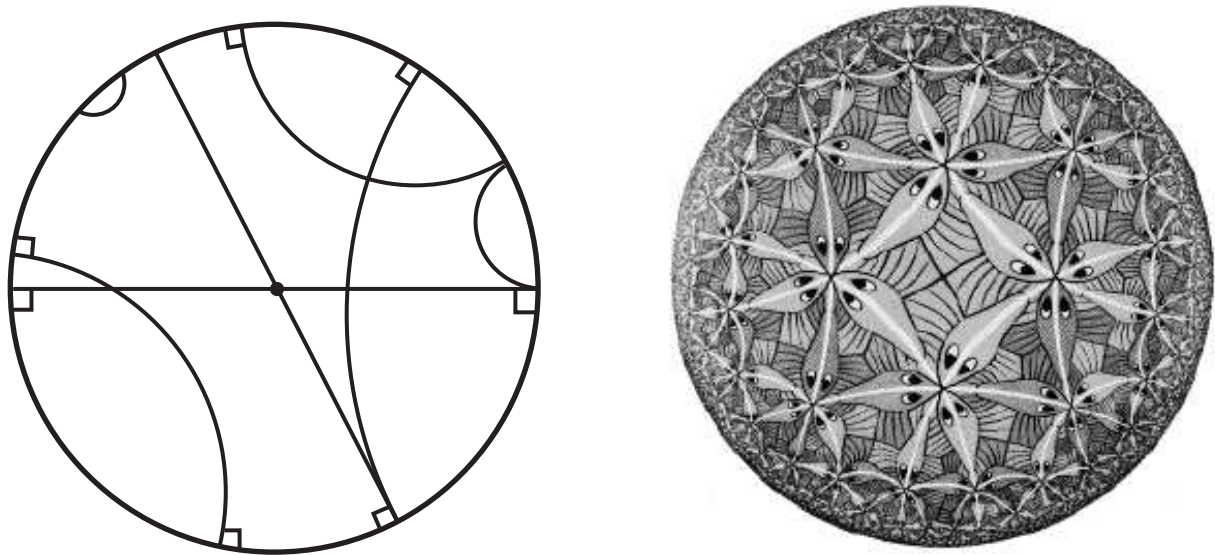


Figura 1.5: Modelo da bola, \mathbb{B}^{n+1}

do plano hiperbólico mapeado no disco. A gravura mostra como nós, euclidianos natos, vemos o mundo hiperbólico desses chatóides. Quando um chatóide se afasta do centro do disco, vemos seu tamanho encolher ficando cada vez menor à medida que se aproxima do círculo limite. O chatóide, é claro, não concorda com essa nossa descrição do que acontece em seu mundo. Para ele, nada muda de tamanho quando se desloca pelo disco. Isso se justifica já que suas réguas e trenas são modificadas na mesma proporção que seus corpos.

1.9.2 Superfícies Umbílicas do \mathbb{H}^{n+1}

As superfícies Umbílicas no espaço hiperbólico são as esferas, horoesferas e as superfícies eqüidistantes (ou hiperesferas), como descreveremos a seguir.

As *esferas* são as esferas euclidianas que estão totalmente contidas em \mathbb{H}^{n+1} . Se o modelo do espaço hiperbólico for o da bola \mathbb{B}^{n+1} , então essas superfícies serão esferas contidas na bola aberta de raio 2, centradas na origem.

Consideremos, a seguir, uma n -esfera euclidiana S tangente a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ em um ponto p , tal que $S - \{p\} \subset \mathbb{H}^{n+1}$. Por uma inversão do \mathbb{R}^{n+1} em p (que é uma isometria do \mathbb{H}^{n+1}) S é levada em um hiperplano P paralelo a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$. Como a métrica induzida em P por \mathbb{H}^{n+1} é um múltiplo da métrica euclidiana, e P tem curvatura constante zero, o mesmo acontece com $S - \{p\}$. Essas subvariedades são chamadas de *horoesfera*. No modelo \mathbb{B}^{n+1} as horoesferas são as n -esferas que tangenciam $\partial\mathbb{B}^{n+1}$. A horoesfera é um superfície

limite de uma família de esferas que passam por um ponto p pré-fixado e cujos centros se deslocam ao longo de uma reta fixa.

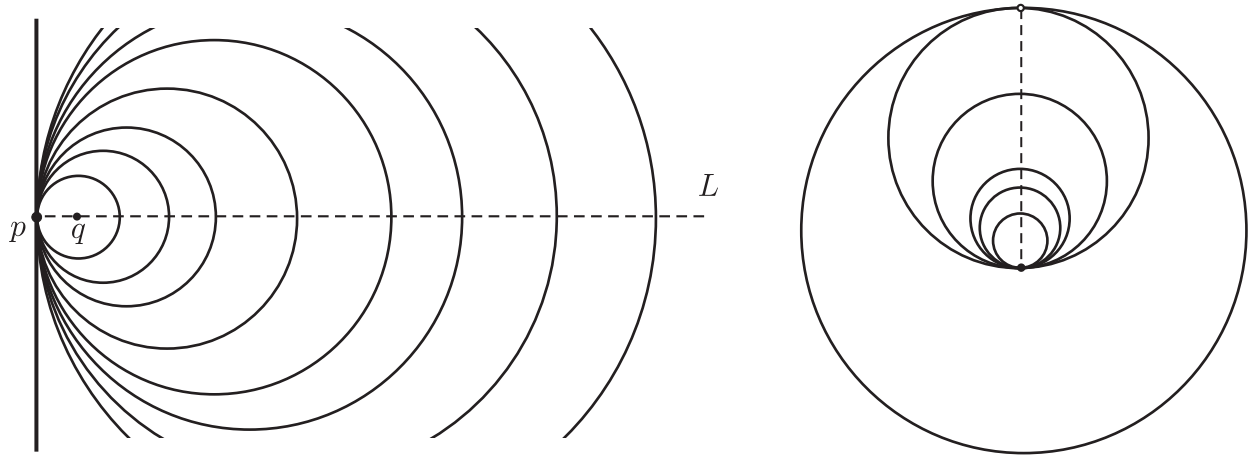


Figura 1.6: Horoesfera

Quando $q \rightarrow \infty$ em L , as esferas se aproximam a uma superfície. Esta superfície é um plano passando em p no caso do \mathbb{R}^{n+1} . No \mathbb{H}^{n+1} , esta superfície é a horoesfera.

Considere finalmente uma esfera euclidiana S que corta $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ segundo um ângulo θ , e sua interseção $S \cap \mathbb{H}^{n+1} = \Sigma$ com \mathbb{H}^{n+1} . Por uma inversão de \mathbb{R}^{n+1} em um ponto de $S \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$, Σ é levada isometricamente na interseção com \mathbb{H}^{n+1} de um hiperplano P que corta $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ segundo o mesmo ângulo θ . Considere o hiperplano Q que é ortogonal a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ e contém $P \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$. Vejamos, que P é uma hipersuperfície equidistante da hipersuperfície totalmente geodésica Q . Para isto, seja γ_r uma geodésica, representada em \mathbb{H}^{n+1} por um semi-círculo de raio r , com centro 0 em $P \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$ e no plano perpendicular a $P \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$. Como existe uma homotetia de centro 0 (isometria hiperbólica) levando o círculo de raio r em um círculo de raio qualquer, o comprimento de γ_r entre os pontos de interseção de γ_r com P e Q não depende de r . Conclui-se que P , ou sua imagem isométrica Γ , é obtida tomando geodésicas perpendiculares a uma hipersuperfície totalmente geodésica Q e marcando sobre elas uma distância fixa. tais hipersuperfícies são chamadas *superfícies equidistantes* (ou *hiperesferas*).

As superfícies umbílicas em \mathbb{H}^{n+1} , possuem curvatura média constante, mais precisamente, as horoesferas têm curvatura média é igual a 1, as hiperesferas tem curvatura média a $\cos \theta \in [0, 1)$ e as esferas têm curvatura maior do que 1.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Parciais e o Princípio do Máximo

Apresentaremos neste capítulo ferramentas necessárias de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) que nos serão úteis para obtenção dos próximos resultados, que podem ser encontrados no livro de Gilbarg & Trudinger [7]. Estamos interessados no Princípio do Máximo e o Método da Continuidade para Equações Quasilineares Elípticas de 2ª ordem.

2.1 Continuidade Hölder

Seja x_0 um ponto em \mathbb{R}^n e f uma função definida em um conjunto D limitado contendo x_0 . Se $0 < \alpha < 1$, dizemos que f é *Hölder contínua* com expoente α em x_0 se a quantidade

$$[f]_{\alpha, x_0} = \sup_{\substack{D \\ x \neq x_0}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \quad (2.1)$$

é finita. Chamamos $[f]_{\alpha, x_0}$ o α -*Coeficiente de Hölder* de f no ponto x_0 com respeito a D . Claramente, se f é Hölder contínua em x_0 , então f é contínua em x_0 . Quando (2.1) é finita para $\alpha = 1$, f é dita ser lipschitziana em x_0 .

A noção de continuidade de Hölder é estendida prontamente a todo o conjunto D (não necessariamente limitado). Dizemos que f é *uniformemente Hölder contínua* com

expoente α em D se a quantidade

$$[f]_{\alpha,D} = \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.2)$$

é finita; e *localmente Hölder contínua* com expoente α em D se f é uniformemente Hölder contínua com expoente α em todo subconjunto compacto de D . Obviamente que esses dois conceitos coincidem quando D é compacto. Além disso note que continuidade local de Hölder é uma propriedade mais forte do que Hölder continuidade pontual em subconjuntos compactos.

Continuidade de Hölder mede a continuidade que especialmente é bem adaptada ao estudo de EDPs. Num certo sentido, pode ser visto também como uma diferenciabilidade fracionária. Isto sugere uma extensão natural dos espaços bem conhecidos de funções diferenciáveis.

Seja Ω um conjunto aberto de \mathbb{R}^n e k um inteiro não negativo. Os *espaços de Hölder* $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($C^{k,\alpha}(\Omega)$) são definidos como os subespaços de $C^k(\overline{\Omega})$ ($C^k(\Omega)$) consistindo de funções cujas derivadas parciais de ordem k são uniformemente Hölder contínuas (localmente Hölder contínuas) com expoente α em Ω . Por simplicidade escrevemos

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^\alpha(\overline{\Omega}), \quad C^{0,\alpha}(\Omega) = C^\alpha(\Omega),$$

com a compreensão que $0 < \alpha < 1$ sempre que esta notação é usada, a menos que, caso contrário seja declarado.

Também, fixando

$$C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega}), \quad C^{k,0}(\Omega) = C^k(\Omega),$$

podemos incluir os espaços $C^k(\overline{\Omega})$ ($C^k(\Omega)$) entre os espaços $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($C^{k,\alpha}(\Omega)$) para $0 < \alpha < 1$. Designamos por $C_0^{k,\alpha}(\Omega)$ o espaço de funções em $C^{k,\alpha}(\Omega)$ que tem suporte compacto em Ω .

Estabelecemos as seguintes definições:

$$\begin{aligned} [u]_{k,0;\Omega} &= |D^k u|_{0;\Omega} = \sup_{|\beta|=k} \sup_{\Omega} |D^\beta u|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ [u]_{k,\alpha;\Omega} &= [D^k u]_{\alpha;\Omega} = \sup_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{\alpha;\Omega}, \end{aligned}$$

onde que, para todo $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, onde β_i é um inteiro positivo e $|\beta| = \sum_i \beta_i$, temos

$$D^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}.$$

Com estas “semi-normas”, nós podemos definir as normas relacionadas

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} &= |u|_{k;\Omega} = |u|_{k,0;\Omega} = \sum_{j=0}^k [u]_{j,0;\Omega} = \sum_{j=0}^k |D^j u|_{0;\Omega}, \\ \|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} &= |u|_{k,\alpha;\Omega} = |u|_{k;\Omega} + [u]_{k,\alpha;\Omega} = |u|_{k;\Omega} + [D^k u]_{\alpha;\Omega}, \end{aligned}$$

nos espaços $C^k(\bar{\Omega})$ e $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, respectivamente. Às vezes é útil introduzir normas não-dimensionais em $C^k(\bar{\Omega})$, $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Se Ω é limitado, temos

$$\begin{aligned} \|u\|'_{C^k(\bar{\Omega})} &= |u|'_{k;\Omega} = \sum_{j=0}^k d^j [u]_{j,0;\Omega} = \sum_{j=0}^k d^j |D^j u|_{0;\Omega}, \\ \|u\|'_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} &= |u|'_{k,\alpha;\Omega} = |u|'_{k;\Omega} + d^{k+\alpha} [u]_{k,\alpha;\Omega} = |u|'_{k;\Omega} + d^{k+\alpha} [D^k u]_{\alpha;\Omega}. \end{aligned}$$

onde $d = \text{diam } \Omega = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} |x - y|$.

Os espaços $C^k(\bar{\Omega})$, $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, munidos com essas respectivas normas, são espaços de Banach.

2.2 Equações Diferenciais Parciais Elípticas

Apresentaremos, nesta seção, a solução do clássico problema de Dirichlet para certos tipos de equações elípticas totalmente não-lineares; isto é, equações elípticas que não são quasilinear.

Uma equação diferencial parcial de segunda ordem pra funções reais em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma expressão da forma

$$F[u] = F(x, u, \nabla u, \text{Hess } u) = 0, \quad (2.3)$$

onde $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida no conjunto $\Gamma = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}^m$, em que $\mathcal{A}^m = \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ é o espaço vetorial das formas bilineares simétricas. Denotaremos pontos em Γ por $\gamma = (x, z, p, r)$, em que $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$, $p = (p_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ e $r = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{A}^m$. Se F é linear nas variáveis z , p e r então a equação (2.3) é dita linear. Se é linear nas variáveis $r = (r)_{ij}$, então a equação (2.3) é dita quase-linear.

O operador F é *elíptico* num subconjunto \mathcal{U} de Γ se a matriz $(F_{ij}(\gamma))$, dada por

$$F_{ij}(\gamma) = \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\gamma), \quad i, j = 1, \dots, n$$

é positiva para todo $\gamma = (x, z, p, r) \in \mathcal{U}$. Denotando $\lambda(\gamma)$ e $\Lambda(\gamma)$, respectivamente, o mínimo e o máximo autovalor de da matriz $(F_{ij}(\gamma))$, dizemos que F *uniformemente elíptico* (*estritamente elíptico*) em \mathcal{U} , se $\frac{\Lambda}{\lambda}$ ($\frac{1}{\lambda}$) é limitado em \mathcal{U} .

Estabeleceremos o seguinte *princípio de comparação*:

Teorema 2.1 (Theorem 17.1, [7]). *Sejam $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazendo o seguinte problema*

$$\begin{cases} F[u] \geq F[v] & \text{em } \Omega \\ u \leq v & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde:

- (i) a função F é continuamente diferenciável com respeito as z, p, r em Γ ;
- (ii) o operador F é elíptico em todas as funções da forma $\beta u + (1 - \beta)v$, $0 \leq \beta \leq 1$;
- (iii) a função F é não-crescente em z para cada $(x, p, r) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$.

Então, segue que $u \leq v$ em Ω .

Demonstração. Escrevamos

$$\begin{aligned} w &= u - v \\ u_\theta &= \theta u + (1 - \theta)v, \quad \theta \in [0, 1] \\ a_{ij}(x) &= \int_0^1 F_{ij}(x, u_\theta, \nabla u_\theta, \partial_{ij} u_\theta) d\theta \\ b_i(x) &= \int_0^1 F_{p_i}(x, u_\theta, \nabla u_\theta, \partial_{ij} u_\theta) d\theta \\ c(x) &= \int_0^1 F_z(x, u_\theta, \nabla u_\theta, \partial_{ij} u_\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Então, verifica-se que w é subsolução de uma equação linear elíptica em Ω :

$$\begin{aligned} Lw &= a_{ij} \partial_{ij} w + b_i \partial_i + cw \\ &= F[u] - F[v] \geq 0 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Além disso, as condições (i), (ii) e (iii) implicam que L satisfaz as condições do princípio do máximo fraco (Teorema 2.6), e então $w \leq 0$ em Ω , ou seja, $u \leq v$ em Ω . \square

Hipóteses mais fracas são claramente possíveis no teorema acima. Também, em virtude do princípio de máximo forte (teorema 2.12), temos que $u < v$ em Ω ou u e v se coincidem. Um resultado de unicidade para o problema de Dirchlet segue imediatamente do teorema, dado a seguir no seguinte corolário.

Corolário 2.2 (Corollary 17.2, [7]). *Sejam $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazendo o seguinte problema*

$$\begin{cases} F[u] = F[v] & \text{em } \Omega \\ u = v & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e suponha que as condições de (i) a (iii) do Teorema 2.1 aconteçam. Então $u = v$ em Ω .

2.2.1 Equações Diferenciais Parciais Lineares

Uma equação diferencial parcial linear de 2^a ordem é uma EDP da forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij}u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u + d(x) = 0 \quad (2.4)$$

onde a_{ij}, b_i, c e d são funções reais de classe C^∞ definidas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, $x \in \Omega$, $\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\partial_{ij}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ e a matriz dos a_{ij} é simétrica, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$.

A equação Lu é *elíptica* em $x \in \Omega$ se a matriz dos coeficientes (a_{ij}) é positiva, isto é, se $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ denotam, respectivamente, o mínimo e o máximo auto valor da matriz (a_{ij}) , então

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2,$$

para todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Assim, por exemplo, a Equação de Laplace

$$\sum_{i=1}^n \partial_{ii}u = 0$$

é uma EDP linear de 2^a ordem elíptica, com $a_{ij} = \delta_{ij}$ e $b_i = c = d = 0$, e logo

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \xi_i \xi_i = |\xi|^2 > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

2.2.2 Equações Diferenciais Parciais Quasilineares

Uma equação diferencial parcial quasilinear de 2^a ordem, é uma EDP da forma

$$Qu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \nabla u) \partial_{ij}u + b(x, u, \nabla u) = 0, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (2.5)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ pertence a um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e a função $u \in C^2(\Omega)$. Assumimos que as funções reais $a_{ij}(x, z, p)$, $i, j = 1, \dots, n$ e $b(x, z, p)$, estão definidas para todos os valores de $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Seja \mathcal{U} um subconjunto de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Diz-se Qu é *elíptica* em \mathcal{U} se a matriz dos coeficientes $a_{ij}(x, z, p)$ é positiva para todo $(x, z, p) \in \mathcal{U}$. Se $\lambda(x, z, p)$ e $\Lambda(x, z, p)$ denotam, respectivamente, o mínimo e o máximo autovalor da matriz $(a_{ij}(x, z, p))$, isto significa que

$$0 < \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad (2.6)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e para todo $(x, z, p) \in \mathcal{U}$.

Assim, por exemplo, a Equação da Curvatura Média

$$\mathfrak{M}u = (1 + |\nabla u|^2)\Delta u - \partial_i u \partial_j u \partial_{ij} u = nH(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}$$

é uma EDP quase-linear elíptica, em que o gráfico de $u \in C^2(\Omega)$ em \mathbb{R}^{n+1} possui curvatura média $H(x)$ no ponto $(x, u(x))$, $x \in \Omega$, E $\lambda(x, z, p) = 1$, $\Lambda(x, z, p) = 1 + |p|^2$.

2.3 O Princípio do Máximo

Enunciaremos versões do Teorema de Comparação, Teorema 2.1, para o caso de equações lineares e quase-lineares.

2.3.1 O Princípio do Máximo para Operadores Lineares

Nesta seção, apresentaremos os Princípios do Máximo Fraco e Forte para Operadores Lineares, que determinam, respectivamente, de acordo com o sinal do operador Lu , que o máximo ou o mínimo de u no fecho de um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é atingido na fronteira do mesmo, e se o máximo ou o mínimo de u for atingido em um ponto do interior de Ω , então a função u será constante.

Lema 2.3. *Seja L um operador elíptico de segunda ordem em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $c = 0$ e $Lu > 0$ (< 0) em Ω , com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Então u não pode ter máximo (mínimo) local em Ω .*

Demonstração. Suponha que exista um $x_0 \in \Omega$ tal que u atinja um máximo local em x_0 . Então, $\partial_i u(x_0) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$ e a matriz Hessiana $(\partial_{ij} u(x_0))$ é uma matriz não positiva. Como L é elíptico, temos que a matriz $(a_{ij}(x_0))$ é positiva. Consequentemente $Lu(x_0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \cdot \partial_{ij} u(x_0) \leq 0$, contradizendo o fato que $Lu > 0$. \square

O lema anterior impõem a condição que o termo de ordem nula c seja identicamente nulo. No entanto, podemos ainda ter uma versão desse teorema se a condição $c = 0$ for substituída por $c \leq 0$, em que vamos impor uma outra condição para o sinal do máximo ou mínimo a ser atingido.

Lema 2.4. *Seja L um operador elíptico de segunda ordem em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $c \leq 0$ e $Lu > 0$ (< 0) em Ω , com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Então u não pode ter máximo (mínimo) local positivo (negativo) em Ω .*

Demonstração. Vamos definir o operador linear \mathcal{L} dado por $\mathcal{L}u = Lu - cu$, onde c é o coeficiente do termo de ordem zero do operador L dado em (??). Claramente percebemos que o operador \mathcal{L} não possui termos de ordem nula. Supondo agora, que exista $x_0 \in \Omega$ tal que u assuma o máximo local positivo em x_0 , então, restringindo a uma vizinhança de x_0 , onde $u > 0$. Nesta vizinhança, temos que $Lu > 0$, $-c \geq 0$ e $u(x_0) > 0$. Logo $\mathcal{L}u = Lu - cu > 0$. Aplicando o teorema anterior para \mathcal{L} , vemos que u não pode ter máximo positivo local em Ω . \square

A seguinte proposição, possui a condição em que Ω pode ser limitado ou não e que o resultado do teorema acima ainda continua válido.

Proposição 2.5. *Seja L um operador elíptico de segunda ordem em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (limitado ou não). Suponha que $c = 0$ e $Lu > 0$ (< 0) em Ω , com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Então u não pode ter máximo (mínimo) local em Ω .*

Demonstração. Vamos supor que u atinja um máximo (mínimo) local em $x_0 \in \Omega$. Tomemos uma bola aberta $B(x_0)$ centrada em x_0 de tal modo que $B(x_0) \subset \Omega$. Desta forma $Lu|_{B(x_0)} > 0$ (< 0). Pelo teorema anterior, percebemos o absurdo. \square

Uma conseqüência para esses resultados, é que para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado contido no domínio de u , temos que:

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{2.7}$$

Exibiremos agora um contra-exemplo para essa observação, ou seja, se Ω não for limitado, então (2.7) não é satisfeita. Suponhamos que u esteja definido no plano, e seja $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$, então $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$. Tomemos L como sendo o Laplaciano, ou seja, $Lu = \sum_{i=1}^n \partial_{ii}u$, e $u(x, y) = y^2$. Assim $Lu = 2 > 0$, mas $\max_{\bar{\Omega}} u = +\infty$ e $\max_{\partial\Omega} u = 0$.

Teorema 2.6 (Princípio do Máximo Fraco, $c = 0$). *Seja L um operador elíptico de segunda ordem em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $c = 0$ e $Lu \geq 0$ (≤ 0) em Ω , com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Então o máximo (mínimo) de u em $\bar{\Omega}$ é assumido em $\partial\Omega$, isto é,*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u). \tag{2.8}$$

Se não assumirmos u contínua em Ω , (2.8) pode ser substituída por

$$\sup_{\Omega} u = \limsup_{x \rightarrow \partial\Omega} u(x) \quad (\inf_{\Omega} u = \liminf_{x \rightarrow \partial\Omega} u(x))$$

Demonstração. Se $Lu > 0$ em Ω , pelo lema 2.3 temos que u não assume máximo no interior de $\bar{\Omega}$. Considere em Ω a função $v(x) = v(x_1, \dots, x_n) = e^{\alpha x_1}$, em que $\alpha > 0$ será escolhido posteriormente. Como $\partial_i v = 0$, se $i \neq 1$ e $\partial_i v = \alpha e^{\alpha x_1}$; $\partial_{ij} v = 0$, se $(i, j) \neq (1, 1)$ e $\partial_{11} v = \alpha^2 e^{\alpha x_1}$ a expressão para Lv é

$$Lv = (\alpha^2 a_{11} + \alpha b_1 + c)e^{\alpha x_1} \geq (\alpha^2 a_{11} - \alpha b_0)e^{\alpha x_1}$$

onde b_0 é um número que limita $\frac{|b_i|}{\lambda}$ dado em (??), e $a_{11} > 0$ da elipticidade de L . O sinal de Lv será o sinal da equação do segundo grau em α . Assim, podemos escolher α suficientemente grande para termos $Lv > 0$, permitindo escrever, para qualquer $\epsilon > 0$,

$$L(u + \epsilon v) > 0 \quad \text{em } \Omega.$$

A função $u + \epsilon v$ está nas condições do lema 2.3, isto é

$$\sup_{\Omega} (u + \epsilon v) = \sup_{\partial\Omega} (u + \epsilon v).$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, temos que $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$, como queríamos. □

É conveniente introduzir a seguinte terminologia sugerida pelo princípio máximo: uma função satisfazendo $Lu = 0$ ($\geq 0, \leq 0$) em Ω é uma *solução* (*subsolução, supersolução*) de Lu em Ω . Quando L é o operador Laplaciano, estes termos correspondem respectivamente às funções harmônicas, as subharmônicas e as superharmônicas.

Vamos supor mais geralmente que $c \leq 0$ em Ω . Considerando o subconjunto $\Omega^+ \subset \Omega$ em que $u > 0$, vemos que se $L_u \geq 0$ em Ω , então $L_0 u = a_{ij} \partial_{ij} u + b_i \partial_i u \geq -cu \geq 0$ em Ω^+ e conseqüentemente o máximo de u em $\overline{\Omega}^+$ deve ser assumido em $\partial \overline{\Omega}^+$ e conseqüentemente também em $\partial \Omega$. Assim, escrevendo $u^+ = \max(u, 0)$ e $u^- = \min(u, 0)$, nós obtemos:

Corolário 2.7 (Princípio do Máximo Fraco, $c \leq 0$). *Seja L um operador elíptico de segunda ordem em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $c \leq 0$ e $Lu \geq 0$ (≤ 0) em Ω , com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Então*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial \Omega} u^+ \quad (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial \Omega} u^-).$$

Se $Lu = 0$ em Ω , então $\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial \Omega} |u|$.

Talvez uma das principais aplicações deste resultado seja a unicidade do problema de Dirichlet (onde o valor de u é conhecido na fronteira de um conjunto). O resultado mostra que se a solução existir é única. Note que a existência não é tratada no resultado.

Corolário 2.8. *Seja L um operador elíptico em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Assuma $c \leq 0$ e considere o problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ u = \psi, & \text{em } \partial \Omega \end{cases}$$

Esse problema possui no máximo uma solução em $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Demonstração. Suponha que o problema tenha solução, vamos mostrar que é única. Para isso, considere u_1 e u_2 soluções do problema, definamos $v = u_1 - u_2$. Logo em Ω temos:

$$Lv = L(u_1 - u_2) = Lu_1 - Lu_2 = f - f = 0.$$

E na fronteira $\partial \Omega$ teremos:

$$v = u_1 - u_2 = \psi - \psi = 0.$$

Resumindo, temos o seguinte problema:

$$\begin{cases} Lv = 0, & \text{em } \Omega \\ v = 0, & \text{em } \partial \Omega \end{cases}$$

Pelo corolário anterior, temos que $\sup_{\Omega} v \leq \sup_{\partial \Omega} v^+ = 0$. E aplicando o resultado para a função $-v$ temos: $\sup_{\Omega} (-v) \leq \sup_{\partial \Omega} (-v)^+ = 0$, ou seja, $\sup_{\Omega} v \leq 0$ e $\sup_{\Omega} v \geq 0$. Assim, $\sup_{\Omega} v = 0$ e portanto, $u_1 = u_2$ em Ω . \square

Podemos ainda conseguir um resultado para compararmos funções se tivermos algumas desigualdades em lugar do problema de Dirichlet.

Corolário 2.9. *Seja L um operador elíptico em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Assuma $c \leq 0$. Sejam u e v satisfazendo*

$$\begin{cases} Lu \geq Lv, & \text{em } \Omega \\ u \leq v, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Então $u \leq v$ em Ω .

Demonstração. Definamos $w = u - v$. Logo em Ω temos $Lw = L(u - v) = Lu - Lv \geq 0$. E em $\partial\Omega$, $w = u - v \leq 0$. Resumindo, temos o seguinte problema

$$\begin{cases} Lw \geq 0, & \text{em } \Omega \\ w \leq 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Pelo Corolário 2.7, temos $\sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+ = 0$. Portanto, $u - v \leq 0$ em Ω e, portanto $u \leq v$ em Ω . \square

O Corolário 2.8 garante a unicidade para o problema de Dirichlet em $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. O teorema a seguir, garante a unicidade $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.10 (Theorem 6.14, [7]). *Seja L um operador linear estritamente elíptico num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $c \leq 0$, e sejam f e os coeficientes de L funções em $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Suponha que Ω é um domínio $C^{2,\alpha}$ e que $\psi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ u = \psi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma (única) solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Embora o Princípio do Máximo Fraco baste para a maioria das aplicações, é frequentemente necessário termos o Princípio do Máximo Forte que, de acordo com Lu , nos indica que se o máximo ou o mínimo de u for atingido em um ponto do interior de Ω , então a função u será constante. Nós obteremos tal resultado para operadores localmente uniformemente elíptico por meio do Lema 2.11 a seguir, frequentemente útil que é o lema do ponto de fronteira. O domínio Ω é dito satisfazer a “condição de bola interior” em $x_0 \in \partial\Omega$ se existe uma bola $B \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial B$, (isto é, o complemento de Ω satisfaz a condição de bola exterior em x_0).

Lema 2.11 (do Ponto Fronteira de Hopf). *Suponha que L é um operador uniformemente elíptico com $c = 0$ em um domínio Ω . Seja $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ com $Lu \geq 0$. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que:*

- (i) u é contínua em x_0 ;
- (ii) $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$;
- (iii) $\partial\Omega$ satisfaz a condição de bola interior em x_0 ;
- (iv) Os coeficientes de L são limitados em Ω .

Então a derivada normal exterior de u no ponto x_0 satisfaz a inequação estrita

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0.$$

Se $c \leq 0$ e $\frac{c}{\lambda}$ é limitado, a mesma conclusão é obtido desde que $u(x_0) \geq 0$, e se $u(x_0) = 0$ a mesma conclusão é obtida independente do sinal de c . η é o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ em x_0 , conforme a figura 2.1.

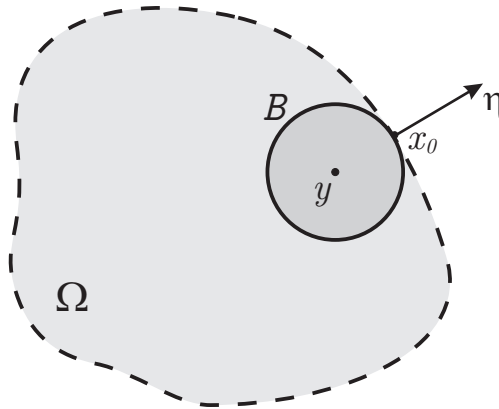


Figura 2.1: O lema do ponto de fronteira

Demonstração. Como $\partial\Omega$ satisfaz a condição de bola interior em x_0 , podemos tomar uma bola $B = B_R(y) \subset \Omega$ tal que a fronteira $\partial B_R(y)$ seja tangente a $\partial\Omega$ no ponto x_0 (ver figura 2.1). Para valores $0 < \rho < R$ e $\alpha > 0$, defina a função $v : B_R(y) \setminus B_\rho(y) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}$$

onde $r = |x - y| > \rho$. Logo

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha R^2} \\ &= e^{-\alpha[(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2]} - e^{-\alpha R^2} \\ &= e^{-\alpha(x_1-y_1)^2} \cdot \dots \cdot e^{-\alpha(x_n-y_n)^2} - e^{-\alpha R^2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\partial_i v = -\alpha \cdot 2 \cdot (x_i - y_i) \cdot e^{-\alpha r^2}$$

e para $i \neq j$ temos;

$$\partial_{ij} v = -\alpha \cdot (x_i - y_i) \cdot \left(-\alpha \cdot 2(x_j - y_j) e^{-\alpha r^2} \right) = 4\alpha^2 (x_i - y_i)(x_j - y_j) e^{-\alpha r^2}$$

Agora, se $i = j$,

$$\begin{aligned} \partial_{ii} &= -\alpha \cdot 2e^{-\alpha r^2} - \alpha \cdot 2(x_i - y_i) \cdot \left(-\alpha 2(x_i - y_i) e^{-\alpha r^2} \right) \\ &= \left(-2\alpha + 4\alpha^2 (x_i - y_i)(x_i - y_i) \right) e^{-\alpha r^2} \end{aligned}$$

Desta forma,

$$Lv = \sum_{i,j} a_{ij} 4\alpha^2 (x_i - y_i)(x_j - y_j) e^{-\alpha r^2} - 2\alpha \sum_i a_{ii} e^{-\alpha r^2} - 2\alpha \sum_i b_i (x_i - y_i) e^{-\alpha r^2} + cv,$$

ou ainda

$$\begin{aligned} Lv &= e^{-\alpha r^2} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} 4\alpha^2 (x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha \sum_i (a_{ii} + b_i (x_i - y_i)) + c \cdot \frac{v}{e^{-\alpha r^2}} \right\} \\ &\geq e^{-\alpha r^2} \left\{ 4\alpha^2 \lambda(x) r^2 - 2\alpha \sum_i (a_{ij} + |\mathbf{b}|r) + c \right\}, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \\ &\geq e^{-\alpha r^2} \left\{ \rho^2 \lambda_0 \alpha^2 - K_1 \alpha + K_2 \right\}. \end{aligned}$$

Assim, podemos encontrar α suficientemente grande tal que $Lv \geq 0$ no anel $A = \{x; \rho < |x - y| < R\}$. Como $u - u(x_0) < 0$ em $\partial B_\rho(y)$, existe $\epsilon > 0$ tal que em $\partial B_\rho(y)$, tem-se

$$w = u - u(x_0) + \epsilon v \leq 0.$$

Essa desigualdade se mantém em $\partial B_R(y)$, onde $v = 0$. Logo, temos que $L(u - u(x_0) + \epsilon v) \geq -cu(x_0) \geq 0$ em A , e $u - u(x_0) + \epsilon v \leq 0$ em ∂A , isto é, conseguimos o seguinte problema:

$$\begin{cases} Lw = Lu + \epsilon Lv \geq 0, & \text{em } A \\ w \leq 0, & \text{em } \partial A = \partial B_R(y) \cup \partial B_\rho(y) \end{cases}$$

Implicando que $u(x) - u(x_0) \leq -\epsilon v(x)$ em A . Se $t < 0$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{u(x + t\eta) - u(x_0)}{t} &\geq -\epsilon \frac{v(x_0 + t\eta)}{t}; \quad v(x_0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) &\geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) \end{aligned}$$

Mas,

$$-\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = -\frac{dv}{dr}(R) = \alpha e^{-\alpha R^2} 2R > 0,$$

como queríamos. \square

Estamos agora em posição de exibir o “Princípio de Máximo Forte de Hopf” dado em dois resultados úteis a serem empregados no resto do trabalho, são eles o *Princípio do Máximo Interior de Hopf* e o *Princípio do Máximo na Fronteira de Hopf*.

Teorema 2.12 (Princípio do Máximo Interior de Hopf). *Seja L um operador uniformemente elíptico, $c = 0$ e $Lu \geq 0$ (≤ 0) num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então se u atinge máximo (mínimo) no interior de Ω , u é constante. Se $c \leq 0$, então u não pode assumir um máximo não-negativo (mínimo não-positivo) no interior de Ω a menos que seja constante.*

Demonstração. Se assumirmos o contrário, isto é, u não é constante e assume máximo $M \geq 0$ em $x_0 \in \Omega$. Sendo o conjunto $\Omega^- = \{x \in \Omega; u(x) < M\}$, então Ω^- é aberto não-vazio em Ω (pois, caso contrário, u seria constante) e $\partial\Omega^- \cap \Omega \neq \emptyset$. Seja x_1 um ponto em Ω^- que é mais próximo de $\partial\Omega^-$ do que $\partial\Omega$, ou seja, $d(x_1, \partial\Omega^-) < d(x_1, \partial\Omega)$. Considere a maior bola $B \subset \Omega^-$ tendo x_1 como centro. Assim ∂B tem um ponto y em comum com $\partial\Omega^- \cap \Omega$. Logo $u(y) = M > u(x)$, se $x \in B$. Pelo Lema 2.11, temos $\frac{\partial u}{\partial \eta}(y) > 0$, o que implica que $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u) \neq 0$, mas y é um ponto de máximo de u , já que $u(y) = M$. Essa contradição mostra que u é constante em Ω .

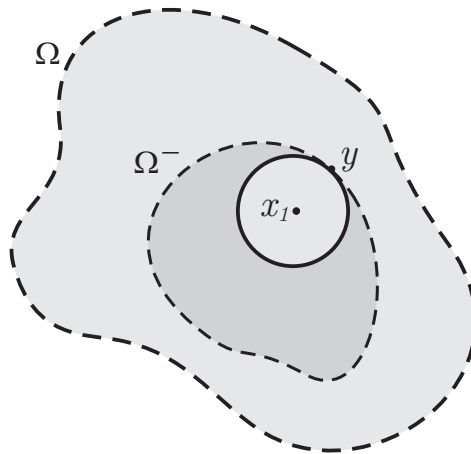


Figura 2.2: Princípio do Máximo Interior de Hopf

Se escolhermos o seguinte conjunto $\Omega_{R,\epsilon} := \{x \in B_R(x_0) \cap \Omega; d(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$, a conclusão acima mostra que u é constante em $\Omega_{R,\epsilon}$, para todo $R \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, mas claramente isso implica que u é constante em Ω . \square

Observe que provamos o teorema usando o resultado do lema 2.11, nos dois casos $c = 0$ e $c \leq 0$, e que a condição $d(x_1, \partial\Omega^-) < d(x_1, \partial\Omega)$ é para evitar coisas, por exemplo, do tipo ilustrados na figura a seguir.

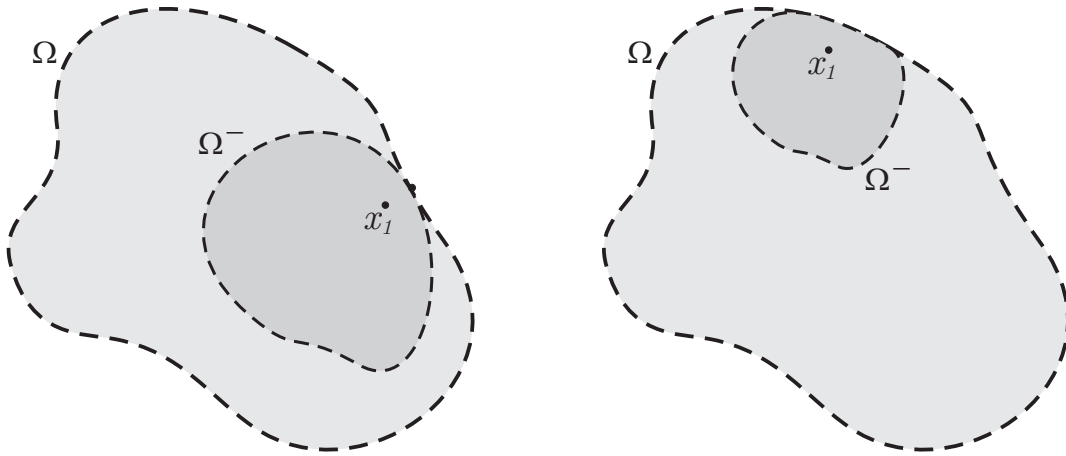


Figura 2.3: Princípio do Máximo Interior de Hopf: $d(x_1, \partial\Omega^-) = d(x_1, \partial\Omega)$

Teorema 2.13 (Princípio do Máximo na Fronteira de Hopf). *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ uma solução de $Lu = 0$ num domínio Ω , onde L é um operador uniformemente elíptico, $c \leq 0$ e $\frac{c}{\lambda}$ é limitado em Ω e Ω satisfaça a condição de bola interior em cada ponto de $\partial\Omega$. Se a derivada normal é definida em toda parte de $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Omega$, então u é constante em Ω . Se, também, $c < 0$ em algum ponto em Ω , então $u \equiv 0$.*

Demonstração. Se u não é constante, podemos assumir que qualquer uma das funções u ou $-u$ atinge um máximo não-negativo M no ponto x_0 em $\partial\Omega$ e é menor do que M em Ω (pelo princípio de máximo forte). Aplicando o lema 2.11 em x_0 deduzimos que $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \neq 0$, contrariando a hipótese. \square

Os resultados referentes a operadores dados em (??), como por exemplo conseqüências referentes ao princípio do máximo, são trivialmente falsos se não supusermos $c \leq 0$. A seguir exibiremos um contra-exemplo para a unicidade do problema de Dirichlet.

Consideremos o seguinte operador $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u$, onde u é uma função do intervalo $\Omega = (0, 2\pi)$ tomando valores na reta real, tal que $u(0) = u(2\pi) = 0$, assim o problema de Dirichlet é:

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{em } \Omega = (0, 2\pi) \\ u \leq 0, & \text{em } \partial\Omega = \{0, 2\pi\} \end{cases}$$

note que este problema tem infinitas soluções do tipo $u = k \cdot \text{sen}x$, para todo $k \in \mathbb{R}$.

2.3.2 O Princípio do Máximo para Operadores Quasilineares

Consideramos o operador quasilinear Qu , da forma

$$Qu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)) \partial_{ij} u + b(x, u, (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)), \quad a_{ij} = a_{ji},$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ pertence a um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e a função $u \in C^2(\Omega)$. Assumimos que as funções reais $a_{ij}(x, z, p)$, $i, j = 1, \dots, n$ e $b(x, z, p)$, estão definidas para todos os valores de $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Apresentaremos o Princípio do Máximo e de Comparação para operadores quasilineares Qu , que estendem resultados correspondentes aos que vimos para operadores lineares.

Vimos, que se L é um operador linear satisfazendo as hipóteses do princípio do máximo fraco, dado no Corolário 2.7, e se $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfaz as inequações $Lu \leq Lv$ em Ω , $u \geq v$ em $\partial\Omega$, então $u \geq v$ em Ω . Este princípio de comparação possui a seguinte extensão para operadores quase-lineares, que é uma versão do Teorema 2.1, página 35.

Teorema 2.14 (Princípio de Comparação). *Seja $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazendo $Qu \geq Qv$ em Ω , $u \geq v$ em $\partial\Omega$, onde*

- (i) *o operador Q é localmente uniformemente elíptico com respeito a u ou a v ;*
- (ii) *os coeficientes a_{ij} são independentes de z ;*
- (iii) *o coeficiente b é não-crescente em z para cada $(x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$;*
- (iv) *os coeficientes a_{ij} e b são continuamente diferenciáveis com respeito a variável p em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*

Então, segue que $u \leq v$ em Ω . Além disso, se $Qu > Qv$ em Ω , $u \leq v$ em $\partial\Omega$ e as condições (i), (ii) e (iii) asseguram, (mas não necessariamente (iv)), a desigualdade estrita $u < v$ em Ω .

Demonstração. Assuma que Q é elíptico com respeito a u . Então temos

$$\begin{aligned} Qu - Qv &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \nabla u) \partial_{ij}(u - v) + \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x, \nabla u) - a_{ij}(x, \nabla v) \right) \partial_{ij} v \\ &\quad + b(x, u, \nabla u) - b(x, u, \nabla v) + b(x, u, \nabla v) - b(x, v, \nabla v) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

de forma que escrevemos

$$\begin{aligned} w &= u - v \\ a_{ij}(x) &= a_{ij}(x, \nabla u) \\ \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i w &= \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x, \nabla u) - a_{ij}(x, \nabla v) \right) \partial_{ij} v + b(x, u, \nabla u) - b(x, u, \nabla v) \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{cases} Lw = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} w + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i w \geq 0 & \text{em } \Omega^+ = \{x \in \Omega; w(x) > 0\} \\ w \leq 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Note que a existência das funções b_i localmente limitadas é garantida pela condição (iv) e pelo teorema do valor médio para a função a_{ij} , onde este último nos diz que

$$a_{ij}(x, \nabla u) - a_{ij}(x, \nabla v) = \sum_k \partial_k a_{ij}(\xi) \cdot (\partial_i u - \partial_i v) = \sum_k \partial_k a_{ij}(\xi) \cdot (\partial_i w)$$

em que $\xi = \xi(\nabla u, \nabla v)$ significa que ξ depende de ∇u e ∇v . Consequentemente, usando as condições (i) e (iv) temos pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 2.6) que $w \leq 0$ em Ω . Se $Qu > Qv$ em Ω , a função w não assume máximo não-negativo em Ω . Consequentemente $w < 0$ em Ω . Se Q é elíptico em v , o resultado segue do princípio mínimo para supersoluções. \square

Este último teorema garante a unicidade do problema de Dirichlet para operadores quasilineares Qu , como resumido no seguinte teorema.

Teorema 2.15 (Theorem 10.2, [7]). *Seja $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, satisfazendo o seguinte problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Qu = Qv, & \text{em } \Omega \\ u = v, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e suponha que as condições (i) e (iv) do teorema anterior sejam satisfeitas. Então $u = v$ em Ω .

2.4 Diferencial de Fréchet

A seguir, estabeleceremos uma versão não linear do método da continuidade exibida no Teorema 2.17, página 51. Em princípio, o método de continuidade envolve o mergulho de determinado problema em uma família de problemas indexados por um intervalo fechado, $[0, 1]$.

O subconjunto S de $[0, 1]$ para qual os problemas correspondentes são solúveis é mostrado por ser não vazio, fechado e aberto, e conseqüentemente coincide com o intervalo todo.

Como no caso quasilinear, a teoria linear é novamente vital mas na situação presente aplicaremos a derivada de Fréchet do operador F para demonstrar que o conjunto solução S é aberto.

Começemos com a formulação analítica de um funcional abstrato. Sejam \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 espaços de Banach e F uma aplicação definida num aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}_1$, em \mathcal{B}_2 . A aplicação F é dita *Fréchet Diferenciável* num elemento $u \in \mathcal{B}_1$ se existe uma aplicação linear limitada $L : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ tal que

$$\frac{\| F[u + h] - F[u] - Lh \|_{\mathcal{B}_2}}{\| h \|_{\mathcal{B}_1}} \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

quando $h \rightarrow 0$ em \mathcal{B}_1 . A aplicação linear L é chamada a *derivada (ou diferencial) de Fréchet* de F em u e denotaremos por F'_u .

Quando \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são espaços Euclidianos, \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , a derivada de Fréchet coincide com a noção usual de diferencial. É evidente de (2.9) que a diferenciabilidade Fréchet de F em u implica que F é contínua em u e que a derivada de Fréchet F'_u é determinada unicamente por (2.9). Dizemos que F é *continuamente diferenciável* em u se F é Fréchet diferenciável numa vizinhança de u e a aplicação resultante

$$v \mapsto F'_v \in E(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$$

é contínua em u , onde $E(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ é o espaço de Banach de aplicações lineares de \mathcal{B}_1 em \mathcal{B}_2 com norma dada por

$$\| L \| = \sup_{\substack{v \in \mathcal{B}_1 \\ v \neq 0}} \frac{\| Lv \|_{\mathcal{B}_2}}{\| v \|_{\mathcal{B}_1}}$$

A regra da cadeia é válida para a diferenciação de Fréchet, ou seja, se $F : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ e $G : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_3$ são Fréchet diferenciáveis em $u \in \mathcal{B}_1$ e $F[u] \in \mathcal{B}_2$, respectivamente, então a aplicação composta $G \circ F : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_3$ é Fréchet diferenciável em $u \in \mathcal{B}_1$ e

$$(G \circ F)'_u = G'_{F[u]} \circ F'_u$$

O teorema do valor médio também é satisfeito, no sentido que se $u, v \in \mathcal{B}_1$, $F : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ é diferenciável no segmento de reta fechado γ que une u e v em \mathcal{B}_1 , então,

$$\| F[u] - F[v] \|_{\mathcal{B}_2} \leq K \| u - v \|_{\mathcal{B}_1}$$

onde $K = \sup_{w \in \gamma} \| F'_w \|$.

Suponha que \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 e \mathcal{X} são espaços de Banach e que $G : \mathcal{B}_1 \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}_2$ é Fréchet diferenciável no ponto (u, ω) , $u \in \mathcal{B}_1$ e $\omega \in \mathcal{X}$. As derivadas parciais de Fréchet, $G^1_{(u,\omega)}(h)$ e $G^2_{(u,\omega)}(k)$ em (u, ω) , são aplicações lineares limitadas de \mathcal{B}_1 e \mathcal{X} , respectivamente, em \mathcal{B}_2 definidas por

$$G_{(u,\omega)}(h, k) = G^1_{(u,\omega)}(h) + G^2_{(u,\omega)}(k)$$

para $h \in \mathcal{B}_1$ e $k \in \mathcal{X}$.

Agora estamos em posição de enunciar o teorema da função implícita.

Teorema 2.16 (Theorem 17.6, [7]). *Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ e \mathcal{X} espaços de Banach e G uma aplicação de um subconjunto aberto $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{X}$ em \mathcal{B}_2 . Seja (u_0, ω_0) um ponto em $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{X}$ satisfazendo:*

- (i) $G[u_0, \omega_0] = 0$;
- (ii) G é continuamente diferenciável e em (u_0, ω_0) ;
- (iii) a derivada parcial de Fréchet $L = G^1_{(u_0, \omega_0)}$ é inversível.

Então existe uma vizinhança \mathcal{N} de ω_0 tal que a equação $G[u, \omega] = 0$, é solúvel para cada $\omega \in \mathcal{N}$, com solução $u = u_0$ em \mathcal{B}_1 .

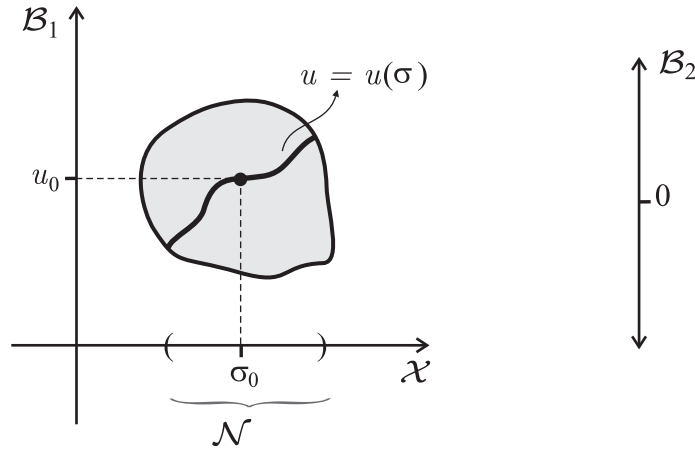


Figura 2.4: Teorema da Função Implícita

Demonstração. Consideremos $T_\sigma : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ definida por

$$T_\sigma(u) = u - \left(G^1_{(u_0, \sigma_0)}\right)^{-1} \circ G[(u, \sigma)]$$

Temos que T_σ é Fréchet diferenciável, pois $G[(u, \sigma)]$ é diferenciável e $\left(G^1_{(u_0, \sigma_0)}\right)^{-1}$ é linear. Aplicando o Teorema do valor Médio em uma bola de centro u_0 e raio δ_1 , $B_1 = \overline{B_{\delta_1}(u_0)}$,

tem-se que $\exists w \in B$ tal que

$$\| T_\sigma(u) - T_\sigma(v) \|_{\mathcal{B}_1} \leq \sup_{w \in B} \| (dT_\sigma)_w \|_{\mathcal{B}_1} \| u - v \|_{\mathcal{B}_1}$$

Mostremos agora, que $\exists \delta > 0$ tal que T_σ é uma contração em $\overline{B_\delta(u_0)}$. Com efeito, pela regra de cadeia,

$$(dT_\sigma)_u v = v - \left(G_{(u_0, \sigma_0)}^1 \right)^{-1} \circ G_{(u, \sigma)}^1 \cdot v,$$

isto é

$$\begin{aligned} (dT_\sigma)_u &= I_{\mathcal{B}_1} - \left(G_{(u_0, \sigma_0)}^1 \right)^{-1} \circ G_{(u, \sigma)}^1 \\ &= \left(G_{(u_0, \sigma_0)}^1 \right)^{-1} \circ G_{(u_0, \sigma_0)}^1 - \left(G_{(u_0, \sigma_0)}^1 \right)^{-1} \circ G_{(u, \sigma)}^1 \\ &= \left(G_{(u_0, \sigma_0)}^1 \right)^{-1} \circ \left\{ G_{(u_0, \sigma_0)}^1 - G_{(u, \sigma)}^1 \right\} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\| (dT_\sigma)_u \| = \| \left(G_{(u_0, \sigma_0)}^1 \right)^{-1} \| \cdot \| G_{(u, \sigma)}^1 - G_{(u_0, \sigma_0)}^1 \|$$

Como G é continuamente diferenciável em (u_0, σ_0) , tem-se $u \mapsto G_{(u, \sigma)}^1$, também é. Portanto, $\exists \sigma$ ($0 < \sigma < \sigma_1$) e uma vizinhança \mathcal{N} de δ_0 em \mathfrak{X} tal que, se $\| u - u_0 \|_{\mathcal{B}_1} < \delta$ e $\sigma \in \mathcal{N}$ então

$$\| G_{(u, \sigma)}^1 - G_{(u_0, \sigma_0)}^1 \| < \frac{1}{\| \left(G_{(u_0, \sigma_0)}^1 \right)^{-1} \|}.$$

Logo, se $u \in \overline{B_\delta(u_0)}$ então,

$$\| (dT_\sigma)_u \| < 1.$$

Assim, $\exists u_\sigma \in B$ tal que $T_\sigma u_\sigma = u_\sigma$, isto é,

$$\left(G_{(u_0, \sigma_0)}^1 \right)^{-1} \circ G[(u, \sigma)] = 0.$$

Do fato em que $\left(G_{(u_0, \sigma_0)}^1 \right)^{-1}$ é inversível, logo injetora, concluímos que $G[(u, \sigma)] = 0$. \square

2.5 O Método da Continuidade

Sejam \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 espaços lineares normados. Uma aplicação linear $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ é limitada quando a quantidade

$$\| T \| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{V}_1 \\ x \neq 0}} \frac{\| Tx \|_{\mathcal{V}_2}}{\| x \|_{\mathcal{V}_1}}$$

é finita. Claramente que uma aplicação linear é limitada se, e somente se, é contínua.

A inversabilidade de uma aplicação linear limitada, as vezes, pode ser deduzida a partir da inversabilidade de uma aplicação similar através do teorema a seguir, o qual é conhecido em aplicações como o *Método da Continuidade*.

Teorema 2.17 (Theorem 5.2, [7]). *Seja \mathcal{B} um espaço de Banach, \mathcal{V} um espaço linear normado e sejam $L_0, L_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$ operadores lineares limitados. Para cada $t \in [0, 1]$, seja*

$$L_t = (1 - t)L_0 + tL_1$$

e suponha que exista uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_{\mathcal{B}} \leq C \|L_t x\|_{\mathcal{V}}$$

para $t \in [0, 1]$. Então $L_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$ é sobrejetiva se, e somente se, $L_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$ é sobrejetiva.

A técnica que usaremos na demonstração do Teorema 3.3, é o método da continuidade. Este método permite obter, a partir de uma solução de uma equação elíptica dada, soluções para equações elípticas construídas por uma perturbação da primeira. A ferramenta básica neste sentido é o da função implícita (Teorema 2.16). Uma condição requerida para o emprego deste método, é que tenhamos, para algum $\alpha \in [0, 1]$, estimativas $C^{2,\alpha}$ uniformes para as soluções da família de operadores elípticos ligados por homotopia. Com este propósito, algumas estimativas *a priori* para equações lineares serão essenciais.

Teorema 2.18 (Theorem 6.6, [7]). *Seja \mathcal{U} um domínio $C^{2,\alpha}$ em \mathbb{R}^n e seja $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathcal{U}})$ uma solução da equação elíptica linear $\mathcal{L}u = f$ em \mathcal{U} , em que f e os coeficientes de \mathcal{L} são funções em $C^\alpha(\overline{\mathcal{U}})$. Seja $\phi \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathcal{U}})$, e suponhamos $u = \phi$ em $\partial\mathcal{U}$. Então*

$$|u|_{2,\alpha} \leq C(|u|_{0,\alpha} + |\phi|_{2,\alpha} + |f|_{0,\alpha}),$$

em que C é uma constante positiva dependendo da norma C^α dos coeficientes de \mathcal{L} , dos autovalores da parte principal de \mathcal{L} e do domínio \mathcal{U} , sendo independente de u .

A aplicação deste teorema requer que tenhamos, para algum $\alpha \in (0, 1)$, estimativas $C^{1,\alpha}$ das soluções de (2.3). Todavia, o teorema a seguir permite obtermos estas estimativas a partir de estimativas para o gradiente.

Teorema 2.19 (Theorem 13.7, [7]). *Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solução do seguinte problema*

$$\begin{cases} F[u] = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então se $\partial\Omega$ é de classe C^2 , temos, para alguma constante $\alpha_0 = \alpha_0\left(n, K, \frac{\mu_K}{\lambda_K}, \Omega\right)$, a estimativa

$$[\nabla u]_{\alpha_0, \Omega} \leq C\left(n, K, \frac{\mu_K}{\lambda_K}, \Omega\right),$$

em que $K = \sup_{\Omega} |\nabla u|$ e λ_K e μ_K são constantes satisfazendo $0 < \lambda_K < \lambda(x, p)$, $|a_{ij}(x, p)| + |\partial_{x_l} a_{ij}(x, p)| + |\partial_{p_l} a_{ij}(x, p)| + |b(x, z, p)| \leq \mu_K$, $1 \leq l \leq n$, para $|z| + |p| \leq K$, em que λ é o menor dos autovalores da matriz $a_{ij}(x, p)$.

Por fim, no processo de convergência das soluções no método da continuidade, é necessário o seguinte teorema de regularidade.

Teorema 2.20 (Theorem 6.19, [7]). *Suponhamos $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$. Seja u uma solução $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ do problema*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

em que f e os coeficientes de \mathcal{L} pertencem a $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Capítulo 3

Gráficos Radiais em \mathbb{R}^{n+1} e \mathbb{H}^{n+1}

No que segue, formularemos o problema de construção de gráficos com curvatura média constante (CMC) em termos da existência de soluções de uma classe específica de equações diferenciais parciais. A partir da noção de gráfico radial no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , deduziremos equações para gráficos radiais sobre esferas geodésicas de \mathbb{H}^{n+1} .

3.1 Gráficos Radiais em \mathbb{R}^{n+1}

Consideremos em \mathbb{R}^{n+1} a esfera de raio $a > 0$, $S = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}; |X| = a\}$. Seja Ω um domínio cujo fecho está contido em um hemisfério aberto de S . Denotemos $\Gamma = \partial\Omega$ o bordo de Ω relativamente a S . Por meio de uma isometria de \mathbb{R}^{n+1} , fixamos $\bar{\Omega} \subset \{X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; X_1 > 0\}$. O *gráfico radial* Σ de uma função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é definido como

$$\Sigma = \{X = e^{u(x)}x \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \bar{\Omega}\}. \quad (3.1)$$

Consideremos uma parametrização de Ω :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \Omega \subset S \\ q &\longmapsto x = \Psi(q) \end{aligned}$$

Então, dada a aplicação

$$\begin{aligned} X : \Omega \subset S &\longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto p = X(x) \end{aligned}$$

a qual define o gráfico, obtemos a parametrização $X \circ \Psi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ em p para Σ , conforme o esquema abaixo e a Figura 3.1.

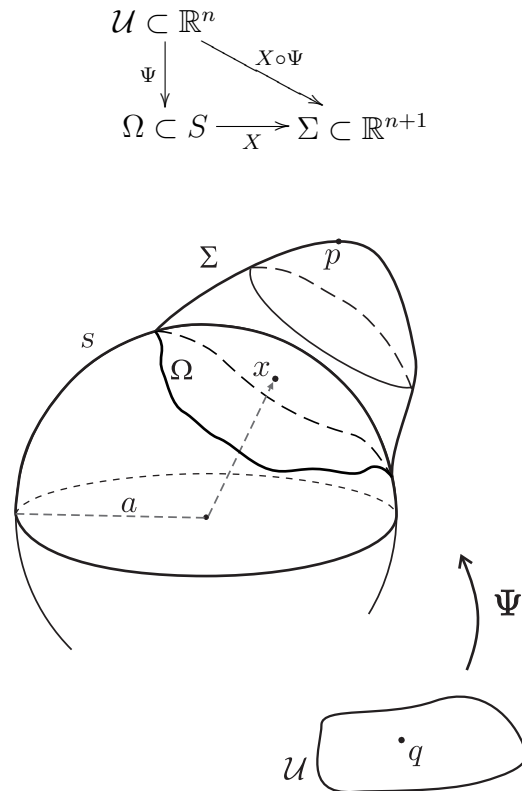


Figura 3.1: Gráfico Radial $\Sigma: x = \Psi(q), p = X(x) = X \circ \Psi(q)$

Denotaremos, $C^k(\Omega)$ o espaço das funções definidas em Ω com derivadas contínuas até ordem k , e $C^k(\bar{\Omega})$ o espaço de todas as funções de $C^k(\Omega)$ tais que as derivadas parciais estendem-se continuamente para o fecho $\bar{\Omega}$. Assim, supondo $u \in C^2(\bar{\Omega})$, a condição de que Σ seja uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} cuja curvatura média seja prescrita por uma função $h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que $h(x)$ corresponda a curvatura média de Σ no ponto $X = e^{u(x)}x$, equivale a u ser solução de seguinte EDP:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{n}{W(u)} - nae^{uh} \right). \quad (3.2)$$

Aqui, ∇ e div são, respectivamente, o gradiente e o divergente relativos a métrica usual de S , e $W(u) = (1 + a^2|\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Veremos como se obtém a equação (3.2).

Adotando a notação estabelecida acima, fixemos coordenadas (x_1, \dots, x_n) em $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Se denotarmos $v(x) := e^{u(x)}$, os vetores geradores do espaço tangente de Σ em

$X(x) = v(x)x$ são

$$\frac{\partial X}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial x_k}x + v \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (3.3)$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_k}$, $1 \leq k \leq n$, são os campos coordenados em $\bar{\Omega}$ com respeito às coordenadas x_k .

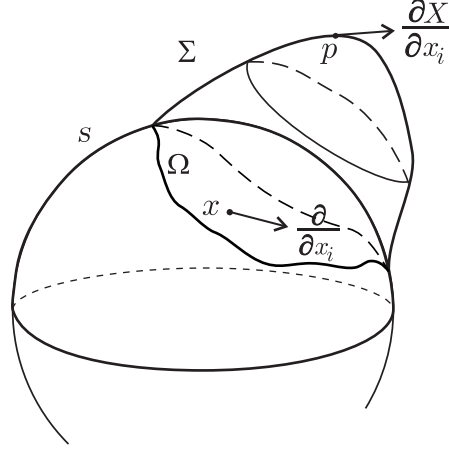


Figura 3.2: Campos coordenados do Gráfico Radial Σ : $\frac{\partial X}{\partial x_i}$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x_i}(p) &= d(X \circ \Phi)_q \cdot e_i \\ &= dX_{\Phi(q)} \cdot d\Phi_q \cdot e_i \\ &= dX_{\Phi(q)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= dX_x \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Mas, para todo $w \in T_x\Omega$, com $|w| = 1$, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ uma curva diferenciável em Ω com $\alpha(0) = x = \Phi(q)$ e $\alpha'(0) = w$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} dX_x \cdot w &= \frac{d}{dt} (X \circ \alpha) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (v(\alpha(t)) \cdot \alpha(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \left(dv_{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t) \cdot \alpha(t) + v(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \right) \Big|_{t=0} \\ &= (dv_x \cdot w) \cdot x + v(x) \cdot w \end{aligned}$$

e tomando o caso particular em que $w = \frac{\partial}{\partial x_i}$, ficamos com

$$dX_x \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(dv_x \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot x + v(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3.4)$$

Como

$$dv_x \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = dv_x \cdot d\Phi_q \cdot e_i = d(v \circ \Phi)_q \cdot e_i = \frac{\partial(v \circ \Phi)}{\partial x_i}(q) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(\Phi(q)) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(x),$$

a expressão (3.4) se reduz a

$$\frac{\partial X}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \cdot x + v(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Portanto, omitindo o ponto x temos justamente (3.3), como desejado.

Denotando a métrica induzida em $\bar{\Omega}$ pela métrica usual de S , expressa em coordenadas x_k , por σ_{ij} , ou seja, $\sigma_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$, expressaremos agora a métrica g_{ij} , induzida em Σ pela métrica euclideana.

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}x + v \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}x + v \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}x, \frac{\partial v}{\partial x_j}x \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}x, v \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle v \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}x \right\rangle + \left\langle v \frac{\partial}{\partial x_i}, v \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= a^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + v^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= a^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + v^2 \sigma_{ij} \end{aligned}$$

Portanto

$$g_{ij}(X) = a^2 \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + v^2 \sigma_{ij}(x). \quad (3.5)$$

O campo normal unitário a Σ no ponto $X(x) = e^{u(x)}x$ é dado, a menos de mudança de sinal, por

$$N(X) = \frac{a^2 \nabla v(x) - vx}{a \sqrt{v^2 + a^2 |\nabla v|^2}}. \quad (3.6)$$

De fato, é normal:

$$\begin{aligned} \left\langle a^2 \nabla v(x) - vx, \frac{\partial X}{\partial x_i} \right\rangle &= \left\langle a^2 \nabla v(x) - vx, \frac{\partial v}{\partial x_i}x + v \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= a^2 + a^2 v \left\langle \nabla v(x), \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle - a^2 v \frac{\partial v}{\partial x_i} - av \left\langle x, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\langle \nabla v(x), x \rangle = \left\langle x, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = 0$, uma vez que $\nabla v(x), \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_x \Omega$. E por fim, é unitário

$$\begin{aligned} |a^2 \nabla v - vx|^2 &= \langle a^2 \nabla v - vx, a^2 \nabla v - vx \rangle \\ &= \langle a^2 \nabla v, a^2 \nabla v \rangle - \langle a^2 \nabla v, vx \rangle - \langle vx, a^2 \nabla v \rangle + \langle vx, vx \rangle \\ &= a^4 |\nabla v|^2 + a^2 v^2 \\ &= a^2 (|\nabla v|^2 + v^2), \end{aligned}$$

ou seja $|a^2 \nabla v - vx| = a \sqrt{v^2 + a^2 |\nabla v|^2}$.

A fim de calcular a curvatura média h de Σ com respeito a esta orientação, usaremos a expressão do traço da segunda forma fundamental de Σ , isto é,

$$h = \frac{1}{n} \sum_{i,j} g^{ij} b_{ij}, \quad (3.7)$$

onde g^{ij} é a inversa da métrica g_{ij} e

$$b_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}, N \right\rangle, \quad (3.8)$$

como vimos na seção 1.3.

Entretanto, diferenciando a expressão (3.3), obtemos

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} x + \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (3.9)$$

onde o último termo simboliza a diferenciação usual de vetores em \mathbb{R}^{n+1} . Assim, substituindo (3.6) e (3.9) em (3.8), resulta que

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} x + \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{a^2 \nabla v(x) - vx}{a \sqrt{v^2 + a^2 |\nabla v|^2}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{a \sqrt{v^2 + a^2 |\nabla v|^2}} \left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} x + \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, a^2 \nabla v(x) - vx \right\rangle \\ &= \frac{1}{aW(v)} \left(\left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} x, a^2 \nabla v(x) - vx \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, a^2 \nabla v(x) - vx \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}, a^2 \nabla v(x) - vx \right\rangle + \left\langle v \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, a^2 \nabla v(x) - vx \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{aW(v)} \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} v a^2 + a^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a^2 v \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - a v^2 \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{x}{a} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 b_{ij} = & \frac{1}{aW(v)} \left(a^2 v \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \nabla v \right\rangle \right) \right. \\
 & \left. + 2a^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + av^2 \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, -\frac{x}{a} \right\rangle \right) \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

onde $W(v) = \sqrt{v^2 + a^2 |\nabla v|^2}$.

Contudo, o hessiano da função v em $\bar{\Omega}$, cuja matriz em termos das coordenadas x_k designaremos por v_{ij} , satisfaz, por definição, a igualdade

$$v_{ij} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \nabla v \right\rangle.$$

Além disso, $\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, -\frac{x}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} \sigma_{ij}$, visto que a expressão à esquerda é a segunda forma fundamental de S aplicada aos vetores coordenados $\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial}{\partial x_j}$. De fato, sendo N uma extensão local de η , unitária e normal a S , ou seja, $N = -\frac{x}{a}$, e do fato que $S_\eta \cdot x = \frac{x}{a}$, temos

$$\langle B(\partial_i, \partial_j), N \rangle = \langle S_\eta \cdot \partial_i, \partial_j \rangle = \frac{1}{a} \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \frac{1}{a} \sigma_{ij}$$

e ainda,

$$\left\langle B(\partial_i, \partial_j), -\frac{x}{a} \right\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_i} \partial_j, -\frac{x}{a} \right\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j, -\frac{x}{a} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, -\frac{x}{a} \right\rangle$$

portanto

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, -\frac{x}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} \sigma_{ij}.$$

Denotando $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ por $\partial_i v$, concluímos que

$$b_{ij} = \frac{1}{aW(v)} \left(-a^2 v v_{ij} + 2a^2 \partial_i v \partial_j v + v^2 \sigma_{ij} \right). \quad (3.11)$$

Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ a imagem de $\bar{\Omega}$ por meio da projeção estereográfica π de S sobre $\mathbb{R}^n = \{X = (X_1, \dots, X_{n+1}); X_1 = 0\}$, com pólo $(-a, 0, \dots, 0)$. Como, por escolha de coordenadas de \mathbb{R}^{n+1} , estamos supondo que o domínio $\bar{\Omega}$ em $\{X = (X_1, \dots, X_{n+1}); X_1 > 0\}$, então $\pi|_{\bar{\Omega}}$ define uma parametrização de $\bar{\Omega}$ por coordenadas conformes, ou seja, tais que $\sigma_{ij}(x) = \mu^2 \delta_{ij}$, onde

$$\mu(x) = \frac{2}{1 + \frac{|\pi(x)|^2}{a^2}},$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$.

Nestas coordenadas, podemos exibir a inversa da métrica g_{ij} , a saber:

$$g^{ij} = \frac{1}{\mu^2 v^2} \left(\delta_{ij} - \frac{a^2}{\mu^2 (v^2 + a^2 |\nabla v|^2)} \partial_i v \partial_j v \right). \quad (3.12)$$

De fato, como $g_{ik} = a^2 \partial_i v \partial_k v + v^2 \sigma_{ik}$, onde $\sigma_{ik} = \mu^2 \delta_{ik}$, temos

$$\begin{aligned} g_{ik} g^{kj} &= \left(a^2 \partial_i v \partial_k v + v^2 \mu^2 \delta_{ik} \right) \left(\frac{1}{\mu^2 v^2} \left(\delta_{ij} - \frac{a^2}{\mu^2 (v^2 + a^2 |\nabla v|^2)} \partial_i v \partial_j v \right) \right) \\ &= \frac{a^2 \delta_{kj}}{\mu^2 v^2} \partial_i v \partial_k v - \frac{a^4}{\mu^4 v^2 (v^2 + a^2 |\nabla v|^2)} (\partial_k v)^2 \partial_i v \partial_j v + \delta_{ik} \delta_{kj} - \delta_{ik} \frac{a^2}{\mu^2 (v^2 + a^2 |\nabla v|^2)} \partial_k v \partial_j v, \end{aligned}$$

tomando a soma em k , e atento a $\nabla v = \sum_i \left\{ \sum_j \frac{1}{\mu^2} \delta_{ij} \partial_j v \right\} \partial_i = \left(\sum_i \frac{1}{\mu^2} \partial_i v \right) \partial_i$, e

$$|\nabla v|^2 = \sum_{i,j} \frac{1}{\mu^4} \partial_i v \partial_j v \mu^2 \delta_{ij} = \frac{1}{\mu^2} \sum_i (\partial_i v)^2$$

temos

$$\begin{aligned} g_{ik} g^{kj} &= \frac{a^2}{\mu^2 v^2} \partial_i v \partial_j v - \frac{a^4}{\mu^4 v^2 (v^2 + a^2 |\nabla v|^2)} |\nabla v|^2 \mu^2 \partial_i v \partial_j v + \delta_{ij} - \frac{a^2}{\mu^2 (v^2 + a^2 |\nabla v|^2)} \partial_i v \partial_j v \\ &= \delta_{ij} + \frac{a^2 v^2 \mu^2 \partial_i v \partial_j v + a^4 \mu^2 |\nabla v|^2 \partial_i v \partial_j v - a^4 \mu^2 |\nabla v|^2 \partial_i v \partial_j v - a^2 v^2 \mu^2 \partial_i v \partial_j v}{\mu^4 v^2 (v^2 + a^2 |\nabla v|^2)} \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto, reunindo (3.11) e (3.12) em (3.7), temos as igualdades a seguir

$$\begin{aligned} nh &= \frac{1}{aW(v)} \sum_{i,j} g^{ij} \left((v^2 \sigma_{ij} + a^2 \partial_i v \partial_j v) + a^2 \partial_i v \partial_j v - a^2 v v_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{aW(v)} \sum_{i,j} g^{ij} \left(g^{ij} g_{ij} + a^2 g^{ij} \partial_i v \partial_j v - a^2 v g^{ij} v_{ij} \right) \\ &= \frac{n}{aW(v)} + \frac{a}{aW(v)} \sum_{i,j} g^{ij} \left(g^{ij} \partial_i v \partial_j v - v g^{ij} v_{ij} \right). \end{aligned}$$

Daí, podemos escrever (3.7) na forma de uma equação diferencial com parte principal dada por uma matriz positiva, a saber, g^{ij} :

$$a^2 v \sum_{i,j} g^{ij} v_{ij} - a^2 \sum_{i,j} g^{ij} \partial_i v \partial_j v = n - nh \left(a(v^2 + a^2 |\nabla v|^2)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.13)$$

Entretanto, utilizando a expressão (3.12), o primeira termo de (3.13) se escreve

$$a^2 v \sum_{i,j} g^{ij} v_{ij} = \frac{a^2}{v\mu^2} \sum_{i,j} \left(\delta_{ij} - \frac{a^2}{\mu^2(v^2 + a^2|\nabla v|^2)} \partial_i v \partial_j v \right) v_{ij}.$$

Por outro lado, usando o fato de que $|\nabla v|^2 = \sum_i \mu^{-2} \partial_i^2 v$, o segundo termo de (3.13) vem a ser

$$\begin{aligned} a^2 \sum_{i,j} g^{ij} \partial_i v \partial_j v &= \frac{a^2}{v^2} \mu^{-2} \sum_i \partial_i^2 v - \frac{a^4}{v^2(v^2 + a^2|\nabla v|^2)} \sum_{i,j} \mu^{-4} \partial_i^2 v \partial_j^2 v \\ &= \frac{a^2}{v^2} |\nabla v|^2 - \frac{a^4}{v^2(v^2 + a^2|\nabla v|^2)} |\nabla v|^4 \\ &= \frac{a^2 |\nabla v|^2}{v^2 + a^2 |\nabla v|^2}. \end{aligned}$$

Substituindo estas duas últimas expressões em (3.13) e, em seguida, multiplicando ambos os lados da equação resultante por $va^{-2}(v^2 + a^2|\nabla v|^2)^{-\frac{1}{2}}$, obtém-se a equação do gráfico radial de curvatura média h , em termos de v :

$$\left(\frac{1}{\mu^2 W(v)} \delta_{ij} - \frac{a^2}{\mu^4 W(v)^3} \partial_i v \partial_j v \right) v_{ij} - \frac{1}{W(v)^3} v |\nabla v|^2 = \frac{nv}{a^2} \left(\frac{1}{W(v)} - ah \right). \quad (3.14)$$

Um operador muito presente em equações como a da curvatura média é dado por $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{W(v)} \right)$, com $W(v)$ representando, em geral, a norma do campo normal ao gráfico da solução. Procedemos à verificação de que este fato é válido no caso da equação (3.14), com o divergente na métrica de S . Da definição de divergente, segue que

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{W(v)} \right) = \frac{1}{W(v)} \Delta v + \left\langle \nabla \left(\frac{1}{W(v)} \right), \nabla v \right\rangle, \quad (3.15)$$

onde

$$\nabla \left(\frac{1}{W(v)} \right) = \sum_i \mu^{-2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{W(v)} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Calculemos, então, $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{W(v)} \right) = \partial_i \left(\frac{1}{\sqrt{v^2 + a^2|\nabla v|^2}} \right)$. Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}
 \partial_i \left(\frac{1}{W(v)} \right) &= \frac{-1}{2W(v)^3} \partial_i (v^2 + a^2 |\nabla v|^2) \\
 &= \frac{-1}{2W(v)^3} \left(2v \partial_i v + a^2 \sum_j \partial_i (\mu^{-2} \partial_j^2 v) \right) \\
 &= \frac{-1}{W(v)^3} \left(v \partial_i v + \frac{a^2}{2} \sum_j \left(\partial_i \mu^{-2} \partial_j^2 v + 2\mu^{-2} \partial_j v \partial_i (\partial_j v) \right) \right) \\
 &= \frac{-1}{W(v)^3} \left(v \partial_i v + \frac{a^2}{2} \partial_i (\mu^{-2}) \sum_j (\partial_j v)^2 + a^2 \mu^{-2} \sum_j \partial_j v \partial_i (\partial_j v) \right) \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Agora, como $v_{ij} = \partial_i \partial_j v - \sum_k \partial_k v \Gamma_{ij}^k$, tiramos $\partial_i \partial_j v = v_{ij} + \sum_k \partial_k v \Gamma_{ij}^k$ e escrevemos

$$\begin{aligned}
 \sum_j \partial_j v \partial_i (\partial_j v) &= \sum_j \left(\partial_j v v_{ij} + \partial_j v \sum_k \partial_k v \Gamma_{ij}^k \right) \\
 &= \sum_j \partial_j v v_{ij} + \sum_{j,k} \partial_j v \partial_k v \Gamma_{ij}^k \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Porém, $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \left(\partial_i (g_{jl}) + \partial_j (g_{li}) - \partial_k (g_{ij}) \right) \cdot g^{lk}$ e visto que $g_{ij} = \mu^2 \delta_{ij}$ e $g^{ij} = \mu^{-2} \delta_{ij}$ tem-se

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\partial_i (\mu^2 \delta_{jk}) + \partial_j (\mu^2 \delta_{ki}) - \partial_k (\mu^2 \delta_{ij}) \right) \cdot \mu^{-2}$$

Portanto escrevemos a segunda parcela de (3.17) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j,k} \partial_j v \partial_k v \Gamma_{ij}^k &= \sum_{j,k} \partial_j v \partial_k v \left(\frac{1}{2} \left(\partial_i (\mu^2 \delta_{jk}) + \partial_j (\mu^2 \delta_{ki}) - \partial_k (\mu^2 \delta_{ij}) \right) \cdot \mu^{-2} \right) \\
 &= \frac{\mu^{-2}}{2} \left(\sum_{j,k} \partial_j v \partial_k v \partial_i (\mu^2 \delta_{jk}) + \sum_{j,k} \partial_j v \partial_k v \partial_j (\mu^2 \delta_{ki}) - \sum_{j,k} \partial_j v \partial_k v \partial_k (\mu^2 \delta_{ij}) \right) \\
 &= \frac{\mu^{-2}}{2} \left(\sum_j (\partial_j v)^2 \partial_i (\mu^2) + \sum_j \partial_j v \partial_i v \partial_j (\mu^2) - \sum_k \partial_i v \partial_k v \partial_k (\mu^2) \right) \\
 &= \frac{\mu^{-2}}{2} \sum_j (\partial_j v)^2 \partial_i (\mu^2)
 \end{aligned}$$

ainda que, $0 = \partial_i(1) = \partial_i(\mu^2 \mu^{-2}) = \mu^2 \partial_i(\mu^{-2}) + \mu^{-2} \partial_i(\mu^2)$, temos $\mu^{-2} \partial_i(\mu^2) = \mu^2 \partial_i(\mu^{-2})$ e então

$$\sum_{j,k} \partial_j v \partial_k v \Gamma_{ij}^k = -\frac{\mu^2}{2} \partial_i(\mu^{-2}) \sum_j (\partial_j v)^2 \quad (3.18)$$

Multiplicando (3.17) por $a^2\mu^{-2}$ e usando (3.18) temos:

$$\begin{aligned} a^2\mu^{-2} \sum_j \partial_j v \partial_i (\partial_j v) &= a^2\mu^{-2} \sum_j \partial_j v v_{ij} + a^2\mu^{-2} \sum_{j,k} \partial_j v \partial_k v \Gamma_{ij}^k \\ &= a^2\mu^{-2} \sum_j \partial_i v v_{ij} - \frac{1}{2} a^2 \partial_i (\mu^{-2}) \sum_j (\partial_j v)^2 \end{aligned}$$

que é justamente a terceira parcela de (3.16), e finalmente, substituindo este resultado em (3.16), temos

$$\partial_i \left(\frac{1}{W(v)} \right) = -\frac{1}{W(v)^3} \left(v \partial_i v + a^2 \mu^{-2} \sum_j \partial_i v v_{ij} \right).$$

Por outro lado, temos $\nabla v = \sum_i \mu^{-2} \partial_i v \partial_i$ e $\Delta v = \sum_i \mu^{-2} v_{ij}$. Portanto, a equação (3.15) fica

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{W(v)} \right) &= \frac{1}{W(v)} \sum_i \mu^{-2} v_{ij} + \\ &\quad \left\langle \sum_i \mu^{-2} \left(-\frac{1}{W(v)^3} \left(v \partial_i v + a^2 \mu^{-2} \sum_{i,j} v_{ij} \partial_j v \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_k \mu^{-2} \partial_k v \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle \\ &= \frac{1}{W(v)} \sum_i \mu^{-2} v_{ij} + \sum_i \mu^{-4} \mu^2 \left(-\frac{1}{W(v)^3} \left(v \partial_i v \partial_i v + a^2 \mu^{-2} \sum_{i,j} v_{ij} \partial_i v \partial_j v \right) \right) \\ &= \frac{1}{W(v)} \sum_i \mu^{-2} v_{ij} + \sum_i \frac{\mu^{-2}}{W(v)^3} \left(v \partial_i^2 v + a^2 \mu^{-2} \sum_{i,j} v_{ij} \partial_i v \partial_j v \right) \\ &= \frac{1}{W(v)} \sum_i \mu^{-2} v_{ij} \delta_{ij} - \frac{v}{W(v)^3} |\nabla v|^2 - \frac{a^2}{\mu^4 W(v)^3} \sum_{i,j} v_{ij} \partial_i v \partial_j v \\ &= \frac{1}{W(v)} \left(\mu^{-2} \delta_{ij} - \frac{a^2 \mu^{-4}}{W(v)^2} \partial_i v \partial_j v \right) v_{ij} - \frac{1}{W(v)^3} v |\nabla v|^2, \end{aligned}$$

dessa forma, a equação (3.14) pode ser escrita na forma divergente como

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{W(v)} \right) = \frac{nv}{a^2} \left(\frac{1}{W(v)} - ah \right). \quad (3.19)$$

Observe que, como $v = e^u$, temos

$$\nabla v = \mu^{-2} \sum \partial_i v \partial_i = \mu^{-2} \sum \partial_i e^u \partial_i = e^u \mu^{-2} \sum \partial_i u \partial_i = e^u \nabla u,$$

e

$$W(e^u) = \sqrt{(e^u)^2 + a^2 |e^u \nabla u|^2} = e^u \sqrt{1 + a^2 |\nabla u|^2}.$$

Pondo $W(u) = \sqrt{1 + a^2|\nabla u|^2}$, temos que $W(v) = e^u W(u)$ e

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{W(v)} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{e^u \nabla u}{e^u W(u)} \right) = \frac{ne^u}{a^2} \left(\frac{1}{e^u W(u)} - ah \right) = \frac{n}{a^2} \left(\frac{1}{W(u)} - ae^u h \right),$$

logo, em termos da função u , as equações (3.14) e (3.19) são escritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{W(u)} \mu^{-2} \delta_{ij} - \frac{a^2 \mu^{-4}}{W(u)^3} \partial_i u \partial_j u \right) u_{ij} = \frac{n}{a^2} \left(\frac{1}{W(u)} - ae^u h \right) \quad (3.20)$$

e

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) = \frac{n}{a^2} \left(\frac{1}{W(u)} - ae^u h \right). \quad (3.21)$$

A equação (3.21) é exatamente a equação (3.2) que queríamos obter.

Podemos escrever a equação (3.20) como uma equação em $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, uma vez, que pela definição do hessiano,

$$u_{ij} = \partial_{ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k u,$$

onde $\Gamma_{ij}^k \partial_k = \Gamma_{ij}^k \partial_k(x)$ são os símbolos de Christoffel em S , em termos das coordenadas x_k e $\partial_{ij} u$ designa as derivadas parciais de segunda ordem da expressão coordenada de u . Assim, escrevendo abreviadamente

$$a_{ij}(x, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) = \frac{1}{W(u)} \mu^{-2} \delta_{ij} - \frac{a^2 \mu^{-4}}{W(u)^3} \partial_i u \partial_j u,$$

a equação (3.20) pode ser expressa em coordenadas na forma geral de uma equação quasilinear em domínios euclidianos:

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x, \partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x)) \partial_{ij} u + b(x, u(x), \partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x)) = 0, \quad (3.22)$$

onde

$$b(x, u(x), \partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x)) = -\frac{n}{a^2 W(u)} + \frac{n}{a} e^u h - \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k a_{ij} \partial_k u.$$

Destas considerações, é possível aplicarmos a teoria padrão referente às equações elípticas quasilineares à equação (3.20) reescrita sob a forma dada em (3.22). Para tanto, devemos supor que Γ é uma subvariedade de classe C^2 em S , uma vez que as técnicas analíticas a serem empregadas requerem hipóteses sobre a regularidade do domínio Ω . Entretanto, há um forte vínculo entre a curvatura média de Γ e a possibilidade de existência de soluções para (3.2). Nesta direção, enunciamos o seguinte teorema, devido a Serrin (v. [20]§23), de grande importância para a prova do Teorema Principal.

Seja h_Γ a curvatura média de Γ como subvariedade de S , calculada com respeito ao vetor unitário normal a Γ apontando para o interior de Ω . Temos:

Teorema 3.1 (Teorema de Serrin). Seja Ω um domínio de classe C^2 em uma esfera S de \mathbb{R}^{n+1} , cujo fecho está em um hemisfério aberto de S . Seja, ainda, $h(x)$ uma função não-positiva em $C^1(\overline{\Omega})$. Então, existe um único gráfico radial sobre $\overline{\Omega}$ com curvatura média prescrita $h(x)$ e bordo Γ , desde que

$$h_\Gamma(x) \geq \frac{n}{n-1}|h(x)|,$$

para todo $x \in \Gamma$.

3.2 Gráficos Radiais em \mathbb{H}^{n+1}

Nesta seção, definiremos gráficos radiais no espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} e discutiremos a existência de tais gráficos com curvatura constante.

O lema a seguir estabelece uma relação entre a curvatura média euclidiana h de Σ e sua curvatura média hiperbólica H .

Lema 3.2. *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana, e $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável positiva. Se Σ é uma hipersuperfície de M cuja curvatura média na métrica g , relativa a um campo normal unitário N , é denotada por h , então a curvatura média de M na métrica $\mu^2 g$ é dada por*

$$H = \frac{h}{\mu} - \frac{1}{\mu^2} N(\mu), \quad (3.23)$$

onde $N(\mu)$ é a derivada de μ na direção N .

Demonstração. Denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (resp. $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$) o produto escalar na métrica g (resp. $\mu^2 g$); seja ∇ (resp. $\bar{\nabla}$) a conexão Levi-Cevita na métrica g (resp. $\mu^2 g$) e sejam $X, Y \in T_p M$, $p \in M$. Queremos que

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{\mu} \left\{ X(\mu)Y + Y(\mu)X - \langle X, Y \rangle \nabla \mu \right\} \quad (3.24)$$

em que $X(\mu) = \langle X, \nabla \mu \rangle$

Como $\bar{\nabla}$ está definida é uma conexão simétrica, nós temos que verificar $\bar{\nabla}$ é compatível com a métrica $\mu^2 g$, isto é:

$$X(\langle\langle Y, Z \rangle\rangle) = \langle\langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle\rangle + \langle\langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle\rangle \quad (3.25)$$

$\forall X, Y, Z \in T_p M, p \in M$.

O primeiro termo de (3.25) é igual a

$$\begin{aligned} X(\mu^2 \langle Y, Z \rangle) &= X(\mu^2) \langle Y, Z \rangle + \mu^2 (\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle) \\ &= 2\mu X(\mu) \langle Y, Z \rangle + \mu^2 (\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle) \end{aligned}$$

e o segundo termo é igual a

$$\begin{aligned} &\mu^2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \mu X(\mu) \langle Y, Z \rangle + \mu Y(\mu) \langle X, Z \rangle - \mu \langle X, Y \rangle \langle Z, \nabla \mu \rangle \\ &+ \mu^2 \langle \nabla_X Z, Y \rangle + \mu X(\mu) \langle X, Y \rangle - \mu \langle X, Z \rangle - \mu Z(\mu) \langle X, Z \rangle \langle \nabla \mu, Y \rangle \end{aligned}$$

assim (3.25) é verificada.

Agora, seja ξ um vetor unitário (na métrica g) tangente a uma direção principal de Σ tal que

$$\nabla_{\xi} N = -k\xi$$

isto é, k é a curvatura principal. Seja $\bar{\xi} = \mu^{-1}\xi$ e $\bar{N} = \mu^{-1}N$, assim por (3.24)

$$\nabla_{\bar{\xi}} \bar{N} = \frac{1}{\mu} \left(-k + \frac{N(\mu)}{\mu} \right) \bar{\xi}$$

Conseqüentemente $\bar{\xi}$ é a direção principal para $\mu^2 g$ e a curvatura principal é

$$-\bar{k} = -\frac{k}{\mu} + \frac{N(\mu)}{\mu^2}$$

(3.23) segue somando as curvaturas principais de Σ . □

Seja S uma esfera geodésica de raio ρ no espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} . Consideremos um domínio Ω em S cujo fecho esteja contido em um hemisfério aberto de S . Denotaremos por Γ a fronteira de Ω , ou seja, $\Gamma = \partial\Omega$.

Definimos o *gráfico radial* Σ de uma função não-negativa $\chi \in C^2(\bar{\Omega})$ como o subconjunto

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{H}^{n+1}; X = \alpha_x(\chi(x)), x \in \bar{\Omega}\}, \quad (3.26)$$

onde, para cada $x \in \bar{\Omega}$, α_x é a geodésica minimizante ligando o centro geodésico de S a x . É imediato da definição que $\chi(x)$ é a distância do centro de S ao ponto $X(x)$.

Suponhamos que Γ é uma hipersuperfície de classe $C^{2,\alpha}$ de S , para algum $\alpha \in (0, 1)$, denotemos por H_{Γ} a curvatura média de Γ com respeito ao vetor normal apontando para o interior de Ω , temos o seguinte teorema:

Teorema 3.3 (Teorema Principal). *Sejam S uma esfera geodésica de raio ρ em \mathbb{H}^{n+1} e Ω um domínio em S com fecho contido num hemisfério aberto de S . Se $-\inf H_{\Gamma} < H \leq 0$, então existe um único gráfico radial Σ sobre $\bar{\Omega}$ com curvatura média H e bordo Γ .*

A prova deste teorema, deixamos para o quarto e último capítulo.

Usaremos, no que segue o modelo de Poincaré para \mathbb{H}^{n+1} , isto é, o disco unitário em \mathbb{R}^{n+1}

$$D = \left\{ X = (X_1, \dots, X_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 < 1 \right\}$$

munido da métrica $\frac{4}{(1 - \sum_i X_i^2)^2} \delta_{ij}$, dita hiperbólica. Nomeamos hiperbólica as quantidades definidas com relação a esta métrica.

Por meio de uma isometria de \mathbb{H}^{n+1} , podemos tomar a origem de \mathbb{R}^{n+1} como o centro geodésico de S . Desta forma, identificamos S com uma esfera euclidiana, centrada na origem, cujo raio a depende do raio geodésico ρ de S , mais precisamente, $a = \operatorname{tgh}(\frac{\rho}{2})$. As semi-retas retas partindo da origem são, neste modelo de \mathbb{H}^{n+1} , traços de geodésicas. Assim, se definirmos a função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$e^{u(x)} = \frac{1}{a} \operatorname{tgh} \left(\frac{\chi(x)}{2} \right), \quad (3.27)$$

para cada $x \in \bar{\Omega}$, então o gráfico radial Σ de χ corresponde ao gráfico radial da função u em \mathbb{R}^{n+1} , como definido em (3.1), ou seja,

$$\Sigma = \{X = e^{u(x)}x; x \in \bar{\Omega}\}. \quad (3.28)$$

De fato, dado um ponto $x \in \bar{\Omega}$, a geodésica α_x definida acima corresponde, neste modelo, à semi-reta ligando a origem de \mathbb{R}^{n+1} a x . Se $X = e^{u(x)}x$, então a distância hiperbólica da origem a X é, por definição de u , igual a $\chi(x)$.

Demonstramos, conforme (3.21), que dada uma função $h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, o gráfico radial Σ é uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} com curvatura média $h(x)$ no ponto $X = e^{u(x)}x$ quando u satisfaz a seguinte EDP:

$$Q_h(u) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) - \frac{1}{a^2} \left(\frac{n}{W(u)} - nae^u h \right) = 0, \quad (3.29)$$

onde div e ∇ denotam, respectivamente, o divergente e o gradiente em S na métrica usual, induzida de \mathbb{R}^{n+1} , e $W(u) = \sqrt{1 + a^2 |\nabla u|^2}$. A curvatura média h é calculada, como fixamos acima, de acordo com a orientação definida pelo campo normal unitário dado em (3.6).

Denotaremos por H a curvatura média de Σ como hipersuperfície de \mathbb{H}^{n+1} , com a orientação escolhida acima.

Tomando-se $M = D$ e $\mu^2 = \frac{4}{(1 - |X|^2)^2}$ no Lema 3.2, podemos obter a curvatura média de Σ como hipersuperfície de \mathbb{H}^{n+1} , isto é, na métrica hiperbólica de D . Temos, então

$$H(x) = \frac{1}{\mu} h(x) - \frac{1}{\mu^2} \operatorname{grad} \mu(X) \cdot N(X),$$

onde $\text{grad}\mu$ denota o gradiente de $\mu(X) = \frac{2}{1 - \sum_i X_i^2}$ em \mathbb{R}^{n+1} , dado por $\text{grad}\mu = \mu^2 X$; e “ \cdot ” significa o produto interno usual de \mathbb{R}^{n+1} . Assim,

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{h}{\mu} - \frac{\mu^2 X \cdot N}{\mu^2} = \frac{h}{\mu} - X \cdot N \\ &= \frac{h}{\mu} - \frac{1}{aW(u)} X \cdot (a^2 \nabla u(x) - x) \\ &= \left(\frac{1 - \sum_i X_i^2}{2} \right) h - \frac{1}{aW(u)} e^u (a^2 x \cdot \nabla u - x \cdot x) \\ &= \left(\frac{1 - a^2 e^{2u}}{2} \right) h + \frac{ae^u}{W(u)}. \end{aligned}$$

Logo obtemos

$$h = \frac{2}{1 - a^2 e^{2u}} \left(H - \frac{ae^u}{W(u)} \right) \quad (3.30)$$

Assim, substituindo (3.30) em (3.29), deduzimos a equação diferencial a ser satisfeita por u de modo que Σ tenha curvatura média H na métrica hiperbólica, dada na proposição abaixo.

Proposição 3.4. *Uma função $u \in C^2(\bar{\Omega})$ descreve um gráfico radial em \mathbb{H}^{n+1} sobre $\bar{\Omega}$ com curvatura média H quando $u < 0$ e*

$$Q_H(u) = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) - \frac{n}{a^2 W(u)} + \frac{2ne^u}{a(1 - a^2 e^{2u})} \left(H - \frac{ae^u}{W(u)} \right) = 0. \quad (3.31)$$

Portanto, garantir a existência de um gráfico radial Σ em \mathbb{H}^{n+1} com curvatura média H e bordo $\Gamma = \partial\Omega$ é equivalente a assegurar a existência de solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $u < 0$, para o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Q_H(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (3.32)$$

Capítulo 4

Prova do Teorema 3.3

Reservamos este capítulo para a prova do nosso principal teorema, o Teorema 3.3.

Afirmamos no final da seção 3.1, que é possível aplicar às equações (3.2) e (3.31) a teoria relativa a EDPs em domínios do \mathbb{R}^n , pois a equação (3.2), quando expressa em coordenadas na forma (3.22), é uma equação elíptica quasilinear em um domínio $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Apresentamos, no final do capítulo 2 resultados sobre esta classe de equações, cujos enunciados e demonstrações encontram-se em [7]. Para iniciarmos a nossa prova, precisamos ainda, apresentar outros resultados, como a estimativa *a priori* do gradiente de u (cf. [13], § 2.3) e a existência do gráfico radial mínimo em \mathbb{H}^{n+1} , para que possamos aplicar o método da continuidade.

4.1 Preliminares

A seguinte proposição formula uma estimativa *a priori* do gradiente de u , cuja demonstração encontra-se em [13], § 2.3: Estimativas C^1 a priori para Gráficos radiais em \mathbb{H}^{n+1} .

Proposição 4.1. *Se $-\inf H_\Gamma < H \leq 0$, então a função u descrevendo o gráfico radial de curvatura média H e bordo Γ satisfaz*

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq C$$

em que $C = C(\Omega, H)$, é uma constante positiva dependendo apenas de Ω e de H .

Por comodidade, identifiquemos $\bar{\Omega}$ com \mathcal{U} , e u com sua expressão em coordenadas. Fixemos α um número entre 0 e 1. Suponhamos Γ de classe $C^{2,\alpha}$. Como vimos em (2.3), seja $F : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$ o operador diferenciável elíptico quasilinear dado por

$$F[u] = F[x, u, \partial_k u, \partial_{kl} u] = a_{ij}(x, \partial_k u) \partial_{ij} u + b(x, u, \partial_k u), \quad (4.1)$$

em que $\partial_k u$ e $\partial_{kl} u$ representam, respectivamente, as derivadas parciais de primeira e segunda ordens da expressão coordenada de u ; e os coeficientes a_{ij} e b estão definidos em (3.22). Como usualmente, podemos tomar (4.1) como definição de uma função diferenciável $F = F[x, z, p, r]$ em $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$, fazendo $z = u$, $p = \partial_k u$, $r = \partial_{kl} u$ em (4.1). De (4.1) segue que $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial z} \leq 0$ se, e somente se, $h \leq 0$ (basta derivar a_{ij} e b dados em (3.22) em relação a u e obter $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{n}{a} e^u h$). Daí o Princípio de Comparação (Teorema 2.1) é igualmente válido para a equação (3.31), desde a fórmula (3.30) seja substituída no lugar de h , nesta equação. Ainda a partir desta observação podemos enunciar a seguinte consequência geométrica do Teorema 2.1.

Proposição 4.2 (Princípio de Comparação). *Sejam Σ_1 e Σ_2 dois gráficos radiais sobre $\bar{\Omega} \subset S$, descritos pelas funções u_1 e u_2 , respectivamente. Se $h_2 \leq h_1 \leq 0$, em que h_1 e h_2 representam, nesta ordem, as curvaturas médias euclidianas de Σ_1 e Σ_2 , e $u_2 \leq u_1$ em Γ , então $u_2 \leq u_1$ em Ω .*

Uma observação importante, derivada da demonstração do Teorema 2.1 é apresentada abaixo.

Proposição 4.3. *Seja Σ um gráfico radial em \mathbb{R}^{n+1} sobre $\bar{\Omega}$ com curvatura média $h \leq 0$, descrito por uma função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Então, se $u \leq 0$ ao longo de $\Gamma = \partial\Omega$, temos $u < 0$ em Ω , ou seja, $\Sigma_{\mathbb{R}}$ está contido em $\mathcal{R} = \{tx; x \in \bar{\Omega}, 0 \leq t \leq 1\}$, o cilindro sólido sobre $\bar{\Omega}$.*

Demonstração. Seja S' a esfera totalmente geodésica de codimensão 1 em S que determina o hemisfério em que $\bar{\Omega}$ está contido. Então consideremos a família de esferas $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$ em \mathbb{R}^{n+1} tais que $S(0) = S$ e $S(t) \cap S = S'$, quando $t > 0$, de modo que seus centros fiquem alinhados sobre a semi-reta partindo da origem de \mathbb{R}^{n+1} ortogonal ao hiperplano que determina S' em S e passando por um ponto do hemisfério de S contendo $\bar{\Omega}$. Por construção, segue que, para todo $t > 0$ tal que $S(t_0) \cap \Sigma_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ e $S(t) \cap \Sigma = \emptyset$, para todo $t > t_0$. Além disso, $S(t_0) \cap \Gamma = \emptyset$. Portanto, os pontos de contato entre $S(t_0)$ e $\Sigma_{\mathbb{R}}$ são interiores a $\Sigma_{\mathbb{R}}$. Em uma vizinhança Ω' suficientemente pequena da projeção radial

x_0 de um destes pontos em Ω , escolhido arbitrariamente, podemos descrever $S(t_0)$ como o gráfico radial de uma função u_1 , de modo que $u(x_0) = u_1(x_0)$ e $u < u_1$ em $\Omega' - \{x_0\}$ (o ponto x_0 é o ponto de tangência isolado, pois caso contrário, $\Sigma_{\mathbb{R}}$ e $S(t_0)$ coincidiriam em um aberto e teriam, portanto a mesma curvatura). Entretanto, a curvatura média h_1 de $S(t_0)$ é maior do que zero, ao passo que $h \leq 0$. Daí, temos

$$\begin{aligned} Q_h(u) &= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) - \frac{n}{a^2 W(u)} + nae^u h \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) - \frac{n}{a^2 W(u)} + nae^u (h - h_1) + nae^u h_1 \\ &\leq \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) - \frac{n}{a^2 W(u)} + nae^u h_1 =: Q_{h_1}(u). \end{aligned}$$

Logo, $Q_{h_1}(u) \geq Q_h(u) = 0 = Q_{h_1}(u_1)$. Assim, $Q_{h_1}(u) \geq Q_{h_1}(u_1)$. Entretanto, como vimos na demonstração do Teorema 2.1, definindo $w = u - u_1$, sabemos existir um operador linear \mathcal{L} tal que

$$\mathcal{L}w = Q_{h_1}(u) - Q_{h_1}(u_1) \geq 0.$$

Portanto, temos $\mathcal{L}w \geq 0$ em Ω' , $w(x_0) = 0$ e $w < 0$ em $\Omega' - x_0$. Contudo, o Lema de Hopf (Lema 2.11) assegura que o gradiente de w em x_0 é não-nulo, o que contradiz o fato de x_0 ser ponto de máximo interior para w . Desta contradição, concluímos que $\Sigma_{\mathbb{R}}$ não tem pontos fora de \mathcal{R} . \square

O Lema de Hopf, ou o Princípio do Máximo Forte (Teorema 2.12), acarreta alguns fatos geométricos, a saber:

Observação 4.4 (Princípio de Tangência). Sejam Σ e Σ_1 duas hipersuperfícies em \mathbb{R}^{n+1} tangentes em um ponto interior a ambos, descritas em uma vizinhança Ω deste ponto como gráficos radiais de duas funções u e u_1 , de modo que $u \leq u_1$ em Ω . Se Σ e Σ_1 têm a mesma curvatura média, então $u \equiv u_1$ em Ω . O mesmo pode ser afirmado para gráficos radiais em \mathbb{H}^{n+1} .

Observação 4.5. Os gráficos radiais $\Sigma_{\mathbb{H}}$ em \mathbb{H}^{n+1} de curvatura $H \leq 1$ e bordo Γ estão contidos na bola geodésica de raio ρ , isto é, $\Sigma_{\mathbb{H}} \subset \mathcal{R} = \{\alpha_x(t); x \in \bar{\Omega}, 0 < t \leq \rho\}$.

Outro resultado que precisamos, é a garantia da existência de gráfico radial mínimo em H^{n+1} . Utilizaremos o Teorema 3.1 (Serrin) para provar a seguinte proposição.

Proposição 4.6. *Se $\inf H_{\Gamma} \geq \left(\frac{n}{n-1}\right) a$, então existe um único gráfico radial mínimo sobre $\bar{\Omega}$ em \mathbb{H}^{n+1} com bordo Γ .*

Demonstração. Por (3.27) e (3.28) o gráfico radial euclidiano Σ de uma função u sobre $\bar{\Omega}$, com curvatura média euclidiana h , é, de fato, um gráfico radial em \mathbb{H}^{n+1} de curvatura média hiperbólica H quando $u < 0$ e

$$h = \frac{2}{1 - a^2 a^{2u}} \left(H - \frac{ae^u}{W(u)} \right). \quad (4.2)$$

O Teorema 3.1 implica a existência de gráfico radial Σ sobre $\bar{\Omega}$ em \mathbb{R}^{n+1} com curvatura média h desde que

- (i) $h \leq 0$ em Ω , e
- (ii) $|h| \leq \left(\frac{n-1}{n}\right) h_\Gamma$ em Γ .

Tomando $h \leq 0$, segue da Proposição 4.3 que Σ está contido na bola euclidiana de raio a . Em particular, $\Sigma \subset D$ e, portanto, Σ é uma hipersuperfície de \mathbb{H}^{n+1} . Suponhamos, então, $h \leq 0$. Da expressão (4.2), temos que a condição (ii) equivale a

$$\frac{2}{1 - a^2 a^{2u}} \left(H - \frac{ae^u}{W(u)} \right) \geq - \left(\frac{n-1}{n} \right) h_\Gamma \text{ em } \Gamma.$$

Entretanto, $e^u = 1$ ao longo de Γ . Por outro lado, a métrica hiperbólica em D induz em S a métrica $\frac{4}{(1-a^2)^2} \delta_{ij}$, homotética à métrica usual. Donde segue que

$$H_\Gamma(x) = \left(\frac{1-a^2}{2} \right) h_\Gamma(x), \quad \forall x \in \Gamma,$$

e então

$$\frac{2}{1-a^2} \left(H - \frac{a}{W(u)} \right) \geq - \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{2}{1-a^2} \right) H_\Gamma \text{ em } \Gamma.$$

Visto que $a < 1$, concluímos que a condição (ii) pode ser escrita como

$$H - \frac{a}{W(u)} \geq - \left(\frac{n-1}{n} \right) H_\Gamma \text{ em } \Gamma.$$

Ainda assim, $\frac{a}{W(u)} \leq a$. Logo, a desigualdade acima é implicada por

$$\left(\frac{n-1}{n} \right) \inf H_\Gamma \geq a - H. \quad (4.3)$$

Por outro lado, por um argumento análogo ao da demonstração da proposição 4.3, considerando que as esferas $S(t)$ são esferas geodésicas de \mathbb{H}^{n+1} com curvatura média maior do que 1, verificamos que, se $H \leq 1$, então Σ não contém pontos fora da bola geodésica de raio ρ em \mathbb{H}^{n+1} (v. Observação 4.5). Assim, temos por exemplo para $H \leq 0$, que $e^u < 1$ e, portanto, $1 - a^2 e^{2u} > 0$. Logo, a expressão (4.2) permite concluir que $H \leq 0$ implica $h \leq 0$.

Fixando $H = 0$, temos $h \leq 0$. Supondo $\inf H_\Gamma \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)a$, é imediato que $H = 0$ também satisfaz (4.3), condição equivalente a (ii) quando $h \leq 0$. Assim, pelo Teorema 3.1, garantimos a existência de um gráfico radial mínimo com bordo Γ . \square

4.2 A Prova

Exibiremos uma versão da prova do Teorema 3.3, exposta em [13]. Para esta prova, empregaremos o Método da Continuidade.

Em princípio, este método envolve o mergulho de determinado problema em uma família de problemas indexados por um intervalo fechado, $[0, 1]$. O método permite obter, a partir de uma solução de uma equação elíptica dada, soluções para equações elípticas construídas por uma perturbação da primeira. O subconjunto S de $[0, 1]$ para qual os problemas correspondentes são solúveis é mostrado por ser não vazio, fechado e aberto, e conseqüentemente coincide com o intervalo todo.

Como vimos no final da Seção 3.2 que, o problema de encontrar um gráfico radial em \mathbb{H}^{n+1} de curvatura média H se reduz a resolver a equação (3.31) dada na Proposição 3.4 ou, equivalentemente, a equação

$$Q_H(u) = \left(\frac{1}{W(u)} \mu^{-2} \delta_{ij} - \frac{a^2 \mu^{-4}}{W(u)^3} \partial_i u \partial_j u \right) \partial_{ij} u - \frac{n}{a} \left[\frac{1}{aW(u)} - \frac{2e^u}{(1-a^2 e^{2u})} \left(H - \frac{ae^u}{W(u)} \right) \right] - \sum_k \Gamma_{ij}^k a_{ij} \partial_k u, \quad (4.4)$$

para uma função $u < 0$, onde H é a curvatura média hiperbólica que estamos prefixando e $\partial_i u$ e $\partial_{ij} u$ denotam, respectivamente, as derivadas de primeira ordem e segunda ordens de u .

Seja $\alpha_0 = \alpha_0 \left(n, \frac{\mu_k}{\lambda_k}, K \right)$ a constante fornecida pelo Teorema 2.19, em que K corresponde a estimativa global de $|\nabla u|$ obtida na Proposição 4.1. Redefinimos α , a classe de regularidade das derivadas de um atlas de Γ , como $\min\{\alpha, \alpha_0\}$. Consideremos, para cada $\tau \in [0, 1]$ e $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $u|_{\partial\Omega} = 0$, o operador diferencial de segunda ordem $F_\tau[u]$

dado por

$$\begin{aligned}
 F_\tau[u] &= F_\tau[x, u, \partial_k u, \partial_{kl} u] \\
 &= \left(\frac{1}{W(u)} \mu^{-2} \delta_{ij} - \frac{a^2 \mu^{-4}}{W(u)^3} \partial_i u \partial_j u \right) \partial_{ij} u \\
 &\quad - \frac{n}{a} \left[\frac{1}{aW(u)} - \frac{2e^u}{1 - a^2 e^{2u}} \left(\tau H - \frac{ae^u}{W(u)} \right) \right] - \sum_k \Gamma_{ij}^k a_{ij} \partial_k u. \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Observemos que F_1 corresponde à equação (4.4).

Denotaremos por \mathcal{B} o subespaço (fechado) de $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ das funções que se anulam na fronteira $\partial\Omega$. Então uma função em \mathcal{B} satisfaz $F_\tau[u] = 0$ se, e somente se, é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} Q_{\tau H}(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

É claro da definição de gráfico radial que o próprio domínio Ω é, trivialmente, solução para este problema, fazendo-se $u \equiv 0$. No entanto, o valor da curvatura média $H = \cotgh(\rho)$, correspondente a esta solução, não permite empregarmos o método da continuidade, uma vez que não podemos assegurar a invertibilidade do linearizado operador Q_H neste ponto. Por inspeção imediata, verificamos que um gráfico com $H = 0$ pode servir de etapa inicial para o método. Como vimos, a Proposição 4.6 assegura a existência do gráfico radial hiperbólico mínimo, então seja u_0 a função em \mathcal{B} descrevendo o gráfico radial hiperbólico com bordo Γ e $H = 0$.

Uma vez que os coeficientes de cada um dos operadores definidos em (4.5) são diferenciáveis (conforme (3.22), página 63), é claro que a imagem de \mathcal{B} por F_τ está contida em C^α . A diferencial de Frechét de F_τ com respeito $u \in \mathcal{B}$, calculada em alguma função $v \in \mathcal{B}$, é

$$\mathcal{L}_{\tau,u}[v] = \frac{\partial F_\tau}{\partial r_{ij}} \partial_{ij} v + \frac{\partial F_\tau}{\partial p_i} \partial_i v + \frac{\partial F_\tau}{\partial z} v, \quad (4.6)$$

onde z, p_i e r_{ij} têm o significado usual. Para utilizarmos o Teorema da Aplicação Implícita, Teorema 2.16, na análise da função $G[u, \tau] := F_\tau[u]$, devemos encontrar condições para as quais a derivada parcial $\partial_u G[u, \tau] = \mathcal{L}_{\tau,u}$ seja invertível. Do Teorema 2.10 e da expressão (4.6), concluímos que isto ocorre se vale $\frac{\partial F_\tau}{\partial z} \leq 0$. Entretanto, verificamos, por meio da definição (4.5), que $\frac{\partial F_\tau}{\partial z} \leq 0$ se, e somente se,

$$\left(\frac{1 + a^2 e^{2u}}{1 - a^2 e^{2u}} \right) \frac{2e^{2u}}{1 - a^2 e^{2u}} \left(H - \frac{ae^u}{W(u)} \right) - \frac{2e^u}{1 - a^2 e^{2u}} \left(\frac{a^u}{W(u)} \right) \leq 0.$$

Pela Proposição 4.3, se supusermos $h = \frac{2e^{2u}}{1-a^2e^{2u}} \left(H - \frac{ae^u}{W(u)} \right) \leq 0$, então nos pontos $X(x)$ do gráfico radial de curvatura H teremos

$$|X|^2 = a^2 e^{2u(x)} \leq a^2 < 1,$$

o que torna a desigualdade acima válida.

Em particular, assumindo $H \leq 0$, garantimos a invertibilidade de $\mathcal{L}_{\tau,u}$. Neste caso, segue do Teorema 2.16 que o conjunto

$$S = \{ \tau \in [0, 1]; G[u, \tau] = 0, \text{ para algum } u \in \mathcal{B} \}$$

é aberto. Resta provar que S é fechado.

Temos que $G[u, \tau] = 0$ implica que u é solução do problema linear

$$\begin{cases} \mathcal{L}_v := a_{ij}(x, u(x), \partial_k u(x)) \partial_{ij} v + b(x, u(x), \partial_k u(x), \tau) = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

em que a_{ij} e b são os termos de segunda e primeira ordens, respectivamente, da equação (4.5). Já que estes termos são diferenciáveis em $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, concluímos dos teoremas 2.18 e 2.19 que a estimativa C^1 de u obtida na Proposição 4.1 fornece uma estiva $C^{2,\alpha}$ uniforme para qualquer elemento do conjunto

$$E = \{ u \in \mathcal{B}; G[u, \tau] = 0 \text{ para algum } \tau \in [0, 1] \}.$$

Entretanto, \mathcal{B} é um subespaço fechado de $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ o qual, por sua vez, é um subespaço compacto de $C^2(\bar{\Omega})$. Assim, qualquer seqüência u_k em E contém uma subsequência, que também denotamos por u_k , que converge na norma C^2 para uma função $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Deste modo, existe $\tau_k \in [0, 1]$ para a qual $G[u_k, \tau_k] = 0$ e, passando a uma subsequência, se necessário, temos $\tau_k \rightarrow \tau$, para algum $\tau \in [0, 1]$, e

$$0 = G[u_k, \tau_k] \rightarrow G[u, \tau].$$

Segue, então, do Teorema 2.20 que u pertence de fato a $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Além disso, $0 = u_k|_{\partial\Omega} \rightarrow u|_{\partial\Omega}$. Logo, $u \in E$.

Portanto, se τ_k é uma seqüência em S de modo que $\tau_k \rightarrow \tau$, para algum $\tau \in [0, 1]$ e u_k são as respectivas soluções de $G[u_k, \tau_k] = 0$, então, restringindo-nos a uma subsequência, se necessário, temos que $u_k \rightarrow u$ na norma $C^{2,\alpha}$, para alguma função $u \in E$. Assim, $G[u, \tau] = 0$ e, por definição, $\tau \in S$. Isto prova que S é fechado.

Logo, $S = [0, 1]$. Em particular, o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Q_H(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

é solúvel para H no intervalo $(-\inf H_\Gamma, 0]$.

A unicidade da solução é uma consequência do Princípio de Comparação (Proposição 4.2), uma vez que $H \leq 0$ implica $h \leq 0$. □

Referências Bibliográficas

- [1] A. D. Alexandrov, *A characteristic property of spheres*. Ann Mat. Pura Appl., **58** (1962) 412–416.
- [2] A. D. Alexandrov, *uniqueness theorems for surfaces in the large V*. AMS Translations, **21** (1962) 305–315.
- [3] A. Treibergs & W. Wei, *Embedded hypersurfaces with prescribed mean curvature*. J. of Diff. Geom. **18** (1983), 513–521.
- [4] B. Nelli, *Hypersurfaces de Courbure Constante dans l'Espace Hyperbolique*. Thèse de Doctorat, Université Paris VII, Paris (1995).
- [5] B. Nelli, & H. Roseberg, *Some remarks on embedded hypersurfaces in hyperbolic space of constant mean and spherical boundary*. Anals f Global Analysis and Geometry, **13** (1995), 23–30.
- [6] B. Nelli, & J. Spruck, *On the existence and uniqueness of constant mean curvature hypersurfaces in hyperbolic space*. Geometric Analysis and the Calculus of variations, ed. J. Jost, International Press, Cambridge (1996), 253–266.
- [7] D. Gilbarg & N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin (1997) 2nd edition.
- [8] E. L. Lima, *Curso de Análise*. Volume 2, Sexta Edição, Projeto Euclides, IMPA 2000.
- [9] F. Brito, R. Sá Earp, W. Meeks e H. Rosenberg, *Structure theorems fo constant mean curvature sufaces bounded by a planar curva*. Indiana Math. Journal **40** (1991), 333–343.

- [10] H. Hopf, *Differential Geometry in the large*. Lectures notes in Mathematics **1000**, Springer-Verlag, New York (1993).
- [11] H. Wente, *A counterexample to a conjecture of H. Hopf*. Pacific J. of Math. **121(1)** (1986), 193–243.
- [12] J. H. S. de Lira, *Radial Graphs with Constant Mean Curvature in the Hyperbolic Space*. Geometriae Dedicata, **93** (2002), 11–23.
- [13] J. H. S. de Lira, *Existência e Unicidade de Hipersuperfícies com Bordo e Curvatura Média Constante em Formas Espaciais*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, UFC, 2000.
- [14] J. L. Barbosa, *Constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve*. Matm. contemp. **1** (1991), 3–15.
- [15] J. L. Barbosa, & R. Sá Earp, *Prescribe mean curvature hypersurfaces in $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ with convex planar boundary I*. Geometriae Dedicata **71** (1998), 61–74.
- [16] J. Serrin, *the problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables*. Philos. Trans. Royal Soc London Ser. A, **264** (1969), 413–496.
- [17] M. P. Carmo, *Geometria Riemanniana*. Segunda Edição, Projeto Euclides, IMPA 1998.
- [18] R. Lopez, & S. Montiel, *Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, **8** (1999), 177–190.
- [19] R. Lopez, *Graphs of constant mean curvature in hyperbolic space*. Preprint, 1999.
- [20] R. V. O. Teixeira, *Análise não linear em Espaços Hiperbólicos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, UFC, (2003).

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA — UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA — PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Campus de Ondina, Av. Ademar de Barros s/n, CEP:40170–110

<http://www.pgmat.ufba.br/>