



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



TEMPO DE RETORNO E TRANSFORMAÇÕES DE INTERCÂMBIO DE  
INTERVALOS

ADRIANA COUTINHO DOS SANTOS

Salvador-BA  
Dezembro de 2014

# TEMPO DE RETORNO E TRANSFORMAÇÕES DE INTERCÂMBIO DE INTERVALOS

ADRIANA COUTINHO DOS SANTOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha**

Co-orientador: **Prof. Dr. Jérôme François Alain Jean Rousseau**

**Salvador-BA**  
Dezembro de 2014

Santos, Adriana Coutinho dos.

Tempo de retorno e transformações de intercâmbio de intervalos /  
Adriana Coutinho dos Santos. - 2015.

61 f. : il

Orientador: Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha.

Co-orientador: Prof. Dr. Jérôme François Alain Jean Rousseau.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto  
de Matemática, Salvador, 2014.

1. Análise de intervalos (Matemática). 2. Poincaré, Teorema  
de. 3. Teoria das medidas. 4. Teoria ergódica. 5. Transformações  
(Matemática). I. Cunha, Kleyber Mota da. II. Rousseau, Jérôme  
François Alain Jean. III. Universidade Federal da Bahia. Instituto de  
Matemática. IV. Título.

CDD - 519.4

CDU - 519.1



À minha família  
pelo carinho e apoio.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, Aquele que é digno de toda honra, glória e louvor. Foi Ele quem me deu forças para que eu chegasse até aqui, sem Ele eu nada seria. Obrigada Deus pelo Teu amor e fidelidade. Obrigada por sempre me mostrar que Contigo tudo posso.

Agradeço a minha família pelo apoio, carinho, pela paciência durante minha ausência e pelas orações. De modo mais que especial agradeço aos meus pais, Giselia e Edvaldo, e a meu irmão Alisson. Vocês são peças fundamentais na minha vida, esta vitória é também de vocês!

Aos meus orientadores Kleyber Cunha e Jérôme Rousseau, pela paciência, orientação e atenção dedicadas a mim durante o desenvolvimento deste trabalho. Vocês foram mais que professores, foram "pais acadêmicos".

A todos aqueles que foram meus professores durante a graduação, especialização e aqui no mestrado, me proporcionando uma formação acadêmica de qualidade. Aprendi muito com cada um de vocês.

Aos colegas da pós-graduação, pelos momentos de estudo, descontração e amizade. Nossa convivência tornou os meus dias mais alegres e o peso dos estudos mais suave. Vocês são nota dez, a sala 18 vai deixar saudades. Aqui, um agradecimento especial a Ana, Carol e Mille, amizade que carrego desde a graduação. É muito bom tê-las comigo. Ana merece um prêmio, acompanhou minhas chatices mais de perto e me mostrou o quanto é importante ter alguém conosco para compartilhar anseios e alegrias, noites de cantoria e estudo. Tu és minha amiga-irmã.

Aos meus amigos de Feira de Santana, obrigada pelo carinho e pela torcida.

A FAPESB pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui.

“Tudo concorre para o bem daqueles que amam ao Senhor.”  
Romanos 8, 28.

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar o tempo de retorno para  $r$ -vizinhança para transformações de intercâmbio de intervalos  $f : I \rightarrow I$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ . Apresentamos alguns resultados sobre indução de Rauzy-Veech, condição de Keane e algoritmo de Zorich. Para quase toda transformação de intercâmbio de intervalos, mostramos o resultado de Kim e Marmi que garante que o logaritmo do tempo de recorrência normalizado por  $-\log r$  vai para 1. Um resultado análogo vale para o tempo de entrada.

*Palavras-chave:* Intercâmbio de intervalos, condição de Keane, tempo de recorrência.



# Abstract

This work aims to study the recurrence time to the  $r$ -neighbourhood for interval exchange maps,  $f : I \rightarrow I$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ . We present some results about Rauzy-Veech induction, Keane condition and Zorich algorithm. For almost every interval exchange map we show the result of Kim and Marmi ensures that the logarithm of the recurrence time normalized by  $-\log r$  goes to 1. A similar result holds for the hitting time.

*Keywords:* Interval exchange, Keane condition, recurrence time.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Algumas definições básicas</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Transformações de Intercâmbio de Intervalos</b>	<b>7</b>
3.1	Definições . . . . .	7
3.2	Indução de Rauzy-Veech . . . . .	11
3.2.1	Operador $\Theta$ . . . . .	15
3.3	Condição de Keane . . . . .	16
3.4	Minimalidade . . . . .	19
3.5	Dinâmica da Aplicação de Indução . . . . .	23
3.6	Classes de Rauzy . . . . .	29
3.6.1	Pares Standard . . . . .	31
3.6.2	Renormalização de Rauzy-Veech . . . . .	34
3.6.3	Transformações de Zorich . . . . .	35
3.6.4	Algoritmo acelerado de Zorich . . . . .	35
<b>4</b>	<b>O Tempo de Primeiro Retorno da Transformação de Intercâmbio de Intervalos</b>	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>Resultados Principais</b>	<b>55</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão e Perspectivas Futuras</b>	<b>60</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>61</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O Teorema de Recorrência de Poincaré é um dos resultados fundamentais da teoria de Sistemas Dinâmicos. Ele indica que dada qualquer medida invariante finita, a órbita de quase todo ponto de qualquer conjunto mensurável retorna infinitas vezes em qualquer vizinhança de seu ponto de partida. No entanto, este resultado não dá uma estimativa sobre o tempo necessário para uma órbita voltar perto do seu estado inicial. Com isso, surgem questionamentos como: com qual taxa a órbita de um ponto retorna para uma vizinhança arbitrariamente próxima de seu estado inicial?

Seja  $I = [a, b)$  um intervalo semi-aberto e  $\mathcal{P} = \{I_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$  uma partição de  $I$  em subintervalos indexados por algum alfabeto  $\mathcal{A}$  com  $d \geq 2$  símbolos. Uma aplicação bijetiva  $f : I \rightarrow I$  que é uma translação em cada subintervalo  $I_\alpha$  é chamada de transformação de intercâmbio de intervalos.

Nesta dissertação estudamos o tempo de retorno para transformações de intercâmbio de intervalos baseado no artigo de Kim e Marmi [7]. O resultado principal deste artigo nos fornece uma informação quantitativa sobre o tempo de recorrência de algumas transformações de intercâmbio de intervalos.

Seja  $r > 0$ , definimos o tempo de retorno para  $\mu$ - quase todo ponto  $x \in X$  para a bola aberta  $B(x, r)$  por

$$\tau_r(x) = \min\{j \geq 1; d(f^j(x), x) < r\}.$$

E, o tempo de entrada da órbita de  $x$  na bola aberta  $B(y, r)$  por

$$\tau_r(x, y) = \min\{j \geq 1; d(f^j(x), y) < r\}.$$

Mostramos que para quase toda transformação de intercâmbio de intervalos,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} = 1, \text{ q.t.p.}$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r(x, y)}{-\log r} = 1, \text{ q.t.p.}$$

Este resultado mostra que  $\tau_r(x)$  (respectivamente  $\tau_r(x, y)$ ) é aproximadamente  $1/r$  quando  $r$  é suficientemente pequeno, isto é, que o tempo que a órbita de  $x$  leva para retornar ao conjunto é inversamente proporcional ao raio da bola  $B(x, r)$  (respectivamente  $B(y, r)$ ).

Esta dissertação está organizada da seguinte forma.

No capítulo 2, apresentamos alguns conceitos básicos da Teoria da Medida e Teoria Ergódica. Além disso, a demonstração do Teorema de Recorrência de Poincaré.

No capítulo 3, baseado no texto de Marcelo Viana [10], definimos transformação de intercâmbio de intervalos e exibimos alguns exemplos. Apresentamos alguns resultados sobre indução de Rauzy-Veech e condição Keane. Com esta condição provamos que quase toda transformação de intercâmbio de intervalos é minimal, isto é, cada órbita é densa no domínio inteiro. Ademais, introduzimos a renormalização de Rauzy-Veech visando manter invariante o comprimento dos intervalos. Também apresentamos a transformação de Zorich, que é uma aceleração do operador de renormalização. Por fim, baseado no artigo [8] introduzimos uma condição, denominada condição (A) que trata do tamanho das matrizes  $Z$ , matriz associada a renormalização de Zorich. Além disso, demonstramos dois resultados que serão importantes para os capítulos posteriores.

No capítulo 4, provamos alguns resultados que servirão de ferramentas para obter a demonstração do resultado principal desta dissertação.

No capítulo 5, assumindo que a transformação de intercâmbio de intervalos satisfaz a condição (A) mostramos o resultado principal.

Por fim, no último capítulo, apresentamos sugestões de pesquisas futuras.

# Capítulo 2

## Algumas definições básicas

Neste capítulo recordamos brevemente alguns conceitos básicos da Teoria da Medida e Teoria Ergódica. Além disso, apresentamos a demonstração do Teorema de Recorrência de Poincaré.

**Definição 2.0.1.** Uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  é uma família  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  tais que:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{B}$ ;
- (ii)  $E \in \mathcal{B}$  implica  $E^c \in \mathcal{B}$ ;
- (iii) para toda sequência  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{B}$ , sua união  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{B}$ .

Elementos de  $\mathcal{B}$  são chamados de conjuntos mensuráveis.

**Definição 2.0.2.** Um espaço topológico é uma dupla  $(X, \tau)$  em que  $X$  é um conjunto e  $\tau$  é uma família de subconjuntos de  $X$  fechada para as interseções finitas e uniões quaisquer. A família  $\tau$  é chamada topologia e os seus elementos são chamados abertos de  $X$ .

**Definição 2.0.3.** A  $\sigma$ -álgebra de Borel de um espaço topológico é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém todos os subconjuntos abertos.

**Definição 2.0.4.** Seja  $X$  um conjunto e  $\mathcal{B}$  uma  $\sigma$ -álgebra. Uma medida é uma função  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$  que satisfaz:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (ii)  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ , onde  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência disjunta em  $\mathcal{B}$ .

A tripla  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  é chamada espaço de medida.

Se  $\mu(X) < \infty$  dizemos que  $\mu$  é uma *medida finita* e se  $\mu(X) = 1$  dizemos que  $\mu$  é uma *medida de probabilidade*.

**Definição 2.0.5.** *Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida, dizemos que  $\mu$  é invariante pela transformação  $f$  se*

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E), \text{ para todo } E \in \mathcal{B}.$$

**Definição 2.0.6.** *Seja  $X$  um conjunto não vazio, chamamos de uma métrica sobre  $X$  uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo, para todo  $x, y, z \in X$ :*

(i)  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;

(ii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;

(iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Tal função também é conhecida como *distância*. O par  $(X, d)$  é o que chamamos de *espaço métrico*.

**Definição 2.0.7.** *Um sistema dinâmico consiste de um par  $(X, f)$ , onde  $X$  é um conjunto não vazio e  $f : X \rightarrow X$  uma transformação.*

Se o espaço  $X$  for munido de uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos mensuráveis e essa  $\sigma$ -álgebra é preservada pela dinâmica, isto é, a pré imagem de qualquer conjunto mensurável também é um conjunto mensurável, dizemos que  $(X, f)$  é um *sistema dinâmico mensurável*.

Para  $n \in \mathbb{N}$ , o  $n$ -ésimo iterado de  $f$  é a composição  $f^n = f \circ \dots \circ f$  ( $n$  vezes). Assim, dados  $(X, f)$  um sistema dinâmico e  $x \in X$ , definimos a *órbita* de  $x$  como  $O(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N}\}$ .

A seguir apresentamos o Teorema de Recorrência de Poincaré. Ele afirma que dada qualquer medida invariante finita, a órbita de quase todo ponto de qualquer conjunto mensurável regressa arbitrariamente perto do seu estado inicial.

**Teorema 2.0.8** (Recorrência de Poincaré). *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação mensurável e seja  $\mu$  uma medida invariante e finita. Seja  $E \subset X$  qualquer subconjunto mensurável com  $\mu(E) > 0$ . Então, para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in E$  existem infinitos valores de  $n$  para os quais  $f^n(x)$  também está em  $E$ .*

*Demonstração.* Seja  $E_0$  o conjunto dos pontos  $x \in E$  que nunca regressam a  $E$ , isto é,

$$E_0 = \{x \in E; f^n(x) \notin E, \forall n \geq 1\}.$$

Inicialmente vamos mostrar que  $E_0$  tem medida nula. Observemos que  $f^{-n}(E_0) \cap f^{-m}(E_0) = \emptyset$ , para todo  $m \neq n$ . De fato, suponhamos que existam  $m > n \geq 1$  e

$x \in f^{-n}(E_0) \cap f^{-m}(E_0)$ . Então  $y = f^n(x) \in E_0$  e  $f^{m-n}(y) = f^m(x) \in E_0$  que está contido em  $E$ . Isto significa que  $y$  regressa a  $E$ , o que contradiz a definição de  $E_0$ . Logo, provamos que as pré imagens são disjuntas duas a duas. Sabemos que  $\mu(f^{-n}(E_0)) = \mu(E_0)$  para todo  $n \geq 1$ , logo

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(E_0)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_0).$$

Uma vez que  $\mu$  é finita, devemos ter

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(E_0)\right) < \infty, \text{ logo } \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_0) < \infty.$$

Este último somatório é uma soma de infinitos termos, todos iguais. Daí, segue que  $\mu(E_0) = 0$ , tal como foi afirmado.

Agora, seja  $F$  o conjunto dos pontos  $x \in E$  que regressam a  $E$  apenas um número finito de vezes, isto é,

$$F = \{x \in E; \exists k \in \mathbb{N} f^n(x) \notin E, \forall n > k\}.$$

Portanto, temos que todo ponto  $x \in F$  tem algum iterado  $f^k(x)$  em  $E_0$ . Ou seja,

$$F \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0).$$

Como  $\mu(E_0) = 0$  e  $\mu$  é invariante, temos:

$$\mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(f^{-k}(E_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_0) = 0.$$

Portanto,  $\mu(F) = 0$ . E assim, segue o resultado.  $\square$

Seja  $\mu$  uma medida de probabilidade num espaço métrico  $(X, d)$  definido em subconjuntos de Borel de  $X$  e seja  $f$  uma transformação que preserva medida. Dado um subconjunto mensurável  $E$  com medida positiva e um ponto  $x \in E$ , consideramos  $R_E(x) = \min\{j \geq 1; f^j(x) \in E\}$ , o *tempo de primeiro retorno* do ponto  $x$  para o conjunto  $E$ . Pelo teorema 2.0.8,  $R_E(x) < \infty$  para quase todo  $x$ .

Seja  $r > 0$ , definimos o tempo de retorno para a  $r$ -vizinhança de  $x$ , isto é, o tempo de retorno de um ponto  $x \in X$  para a bola aberta  $B(x, r)$ , por

$$\tau_r(x) = \min\{j \geq 1; d(f^j(x), x) < r\}.$$

E, o tempo de entrada da órbita do ponto  $x$  numa  $r$ -vizinhança de  $y$ , isto é, tempo

de entrada da órbita de  $x$  na bola aberta  $B(y, r)$  por

$$\tau_r(x, y) = \min\{j \geq 1; d(f^j(x), y) < r\}.$$

O lema a seguir será útil no último capítulo.

**Lema 2.0.9.** (Borel-Cantelli) *Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida e  $E_n \in \mathcal{B}, n \geq 1$ .*

(i) *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ , então*

$$\mu(\{x; x \in E_n \text{ para infinitos valores de } n\}) = 0.$$

(ii) *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \infty$  e os  $E_n$ 's são independentes, então*

$$\mu(\{x; x \in E_n \text{ para infinitos valores de } n\}) = 1.$$

Uma demonstração desse lema pode ser encontrada em [5].



# Capítulo 3

## Transformações de Intercâmbio de Intervalos

Parte deste capítulo é baseado em [10]. Aqui, definimos transformação de intercâmbio de intervalos e apresentamos algumas notações e resultados que serão utilizadas no decorrer do trabalho.

### 3.1 Definições

Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo<sup>1</sup> e  $\mathcal{P} = \{I_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$  uma partição de  $I$  em subintervalos indexados por algum alfabeto  $\mathcal{A}$  com  $d \geq 2$  símbolos. Denotaremos por  $|I_\alpha|$  o comprimento do subintervalo  $I_\alpha$ .

**Definição 3.1.1.** *Uma transformação de intercâmbio de intervalos é uma aplicação bijetiva  $f : I \rightarrow I$  que é uma translação em cada subintervalo  $I_\alpha$ .*

A aplicação  $f$  é determinada por um dado combinatorial e um dado de comprimento. O dado combinatorial indica a ordem dos subintervalos  $I_\alpha$  antes e depois da aplicação de um iterado de  $f$ , que denotaremos por  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  com  $\pi_\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ ,  $\epsilon \in \{0, 1\}$ . Representamos  $\pi$  da seguinte forma:

$$\pi = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \dots & \alpha_d^0 \\ \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_d^1 \end{pmatrix},$$

onde  $\alpha_j^\epsilon = \pi_\epsilon^{-1}(j)$ , para  $\epsilon \in \{0, 1\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ .

O vetor  $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  com entradas positivas, nos dá o comprimento do subintervalo  $I_\alpha$  correspondente, isto é,  $\lambda_\alpha = |I_\alpha|$ .

---

<sup>1</sup>Todos os intervalos deverão ser limitados, fechados à esquerda e abertos à direita. Por simplicidade de notação, tomamos a extremidade esquerda de  $I$  coincidindo com 0.

Dessa forma, usaremos o par  $(\pi, \lambda)$  para representar uma transformação de intercâmbio de intervalos.

**Definição 3.1.2.** Chamamos  $p = \pi_1 \circ \pi_0^{-1} : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$  de monodromia invariante do par  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ .

Observemos que dado qualquer  $(\pi, \lambda)$  e qualquer bijeção  $\phi : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ , podemos definir

$$\pi'_\epsilon = \pi_\epsilon \circ \phi, \epsilon \in \{0, 1\} \text{ e } \lambda'_{\alpha'} = \lambda_{\phi(\alpha')}, \alpha' \in \mathcal{A}'.$$

Como  $(\pi'_0)^{-1} = (\pi_0 \circ \phi)^{-1} = \phi^{-1} \circ \pi_0^{-1}$  e  $\pi'_1 = \pi_1 \circ \phi$ , segue que

$$p = \pi'_1 \circ (\pi'_0)^{-1} = (\pi_1 \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \pi_0^{-1}) = \pi_1 \circ \pi_0^{-1}.$$

Assim,  $(\pi, \lambda)$  e  $(\pi', \lambda')$  têm a mesma monodromia invariante. Ou seja, representam a mesma transformação de intercâmbio de intervalos.

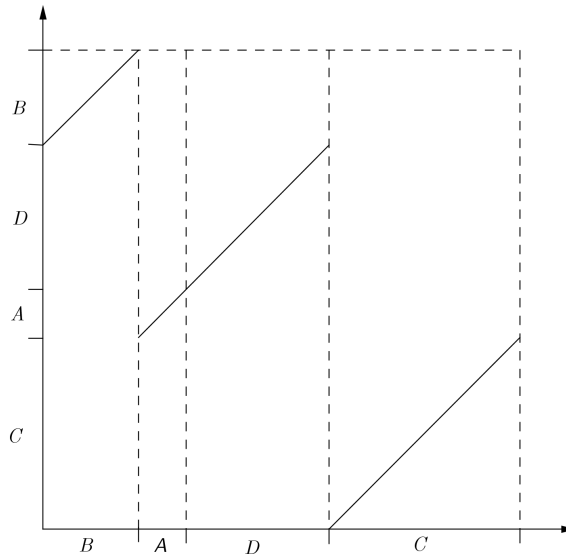


Figura 3.1: Transformação de intercâmbio de intervalos com  $d=4$

**Exemplo 3.1.3.** A transformação de intercâmbio de intervalos descrita pela figura 3.1 corresponde ao par

$$\pi = \begin{pmatrix} B & A & D & C \\ C & A & D & B \end{pmatrix}.$$

Por definição temos

$$\pi_0^{-1}(1) = B; \pi_0^{-1}(2) = A; \pi_0^{-1}(3) = D; \pi_0^{-1}(4) = C$$

e

$$\pi_1(C) = 1; \quad \pi_1(A) = 2; \quad \pi_1(D) = 3; \quad \pi_1(B) = 4.$$

Assim, monodromia invariante de  $\pi$  é

$$p = (\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(1), \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(2), \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(3), \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(4)) = (4, 2, 3, 1).$$

Outra possibilidade de representação para essa transformação é dada pela figura 3.2:

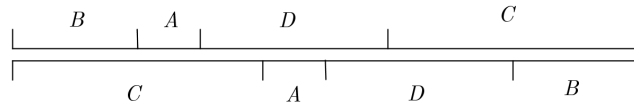


Figura 3.2: Representação de uma transformação de intercâmbio de intervalos com  $d=4$

**Definição 3.1.4.** Dizemos que um par  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  é *reduzível* se existe  $k \in \{1, \dots, d-1\}$  tal que  $p = \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\{1, \dots, k\}) = \{1, \dots, k\}$ , caso contrário, dizemos que  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  é *irreduzível*.

**Exemplo 3.1.5.** Para  $d = 2$  existe apenas um par irreduzível:  $\pi = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ .  
A transformação de intercâmbio de intervalos associada a  $(\pi, \lambda)$  é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + \lambda_B, & \text{se } x \in I_A \\ x - \lambda_A, & \text{se } x \in I_B \end{cases}.$$

Uma representação gráfica é dada pela figura 3.3,

Notemos que identificando  $I$  com o círculo unitário essa transformação de intercâmbio de intervalos é equivalente as rotações no círculo.

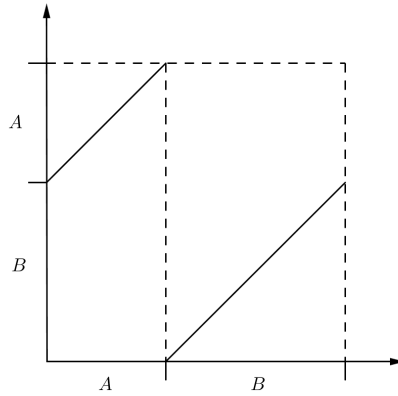
**Exemplo 3.1.6.** Para  $d = 3$  a permutação dada por  $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$  é *reduzível*. Já  $\pi$  dada por  $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$  é *irreduzível*.

Assim, se  $\pi$  é *reduzível*, para qualquer escolha de  $\lambda$ , o subintervalo

$$J = \bigcup_{\pi_0(\alpha) \leq k} I_\alpha = \bigcup_{\pi_1(\alpha) \leq k} I_\alpha$$

é invariante sob a transformação  $f$  e seu complementar também. Isto é,  $f$  se divide em duas transformações de intercâmbio de intervalos.

Neste trabalho vamos nos restringir apenas aos dados irreduzíveis.


 Figura 3.3: Transformação de intercâmbio de intervalos com  $d=2$ 

**Definição 3.1.7.** Dado  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ , definamos  $\Omega_\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  por  $\Omega_\pi(\lambda) = w$  com  $w_\alpha = \sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta$ . Assim, a transformação  $f$  correspondente é dada por  $f(x) = x + w_\alpha, x \in I_\alpha$ . Chamamos  $w$  de vetor translação de  $f$ .

Notemos que a matriz  $(\Omega_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$  de  $\Omega_\pi$  é dado por

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \begin{cases} +1, & \text{se } \pi_1(\alpha) > \pi_1(\beta) \text{ e } \pi_0(\alpha) < \pi_0(\beta) \\ -1, & \text{se } \pi_1(\alpha) < \pi_1(\beta) \text{ e } \pi_0(\alpha) > \pi_0(\beta) \\ 0, & \text{para todos os outros casos} \end{cases} .$$

**Exemplo 3.1.8.** A transformação  $f$  correspondente ao exemplo 3.1.3 é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + \lambda_A + \lambda_C + \lambda_D, & \text{se } x \in I_B \\ x + \lambda_C - \lambda_B, & \text{se } x \in I_A \cup I_D \\ x - \lambda_A - \lambda_B - \lambda_D, & \text{se } x \in I_C \end{cases} ,$$

onde  $w = (w_A, w_B, w_C, w_D) = (\lambda_C - \lambda_B, \lambda_A + \lambda_C + \lambda_D, -\lambda_A - \lambda_B - \lambda_D, \lambda_C - \lambda_B)$ .

**Lema 3.1.9.** Temos que  $\lambda \cdot w = 0$

*Demonstração.* Por definição,

$$\begin{aligned} \lambda \cdot w &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha w_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \left( \sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta \end{aligned} \quad (3.1)$$

Seja  $\pi_\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  uma bijeção,  $\epsilon \in \{0, 1\}$ . Escreva  $X_1^\epsilon = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}; \pi_\epsilon(\alpha) > \pi_\epsilon(\beta)\}$  e

$X_2^\epsilon = \{(\gamma, \theta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}; \pi_\epsilon(\gamma) < \pi_\epsilon(\theta)\}$ . Observe que

$$X_1^\epsilon \cap X_2^\epsilon = \emptyset, \quad X_1^\epsilon \cup X_2^\epsilon = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \setminus \{(\alpha, \alpha); \alpha \in \mathcal{A}\}$$

e

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\pi_\epsilon(\beta) < \pi_\epsilon(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta = \sum_{(\alpha, \beta) \in X_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta. \quad (3.2)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta &= \sum_{(\alpha, \beta) \in X_1^\epsilon \cup X_2^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta = \sum_{(\alpha, \beta) \in X_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta + \sum_{(\gamma, \theta) \in X_2^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta \\ &= \sum_{(\alpha, \beta) \in X_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta + \sum_{(\theta, \gamma) \in X_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta = 2 \sum_{(\alpha, \beta) \in X_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta \end{aligned}$$

Disso resulta que

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in X_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \quad (3.3)$$

Assim, por 3.1, 3.2 e 3.3 segue que

$$\lambda.w = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta = 0.$$

□

## 3.2 Indução de Rauzy-Veech

Nesta seção definiremos a indução de Rauzy-Veech, que é expressa por

$$\hat{R} : \hat{R}(\pi, \lambda) = (\pi^1, \lambda^1),$$

onde  $\pi^1$  e  $\lambda^1$  são os dados combinatorial e de comprimento, respectivamente, da aplicação  $\hat{R}(f)$ .

Consideremos  $(\pi, \lambda)$  uma transformação de intercâmbio de intervalos. Para cada  $\epsilon \in \{0, 1\}$ , definamos  $\alpha(\epsilon) = \pi_\epsilon^{-1}(d) = \alpha_d^\epsilon$ , ou seja,  $\alpha(\epsilon)$  é o último símbolo na expressão de  $\pi_\epsilon$ .

Suponhamos que os intervalos  $I_{\alpha(0)}$  e  $I_{\alpha(1)}$  possuam comprimentos diferentes. Se  $\lambda_{\alpha(0)} > \lambda_{\alpha(1)}$ , dizemos que  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 0 e, se  $\lambda_{\alpha(0)} < \lambda_{\alpha(1)}$ , dizemos que  $(\pi, \lambda)$  tem tipo

1. Nos dois casos, o maior dos intervalos é chamado ganhador e o menor é chamado perdedor. Assim, podemos definir a indução de Rauzy-Veech de  $f$ , que é a aplicação de primeiro retorno  $\hat{R}(f)$  para o subintervalo  $J$ , onde

$$J = \begin{cases} I \setminus f(I_{\alpha(1)}), & \text{se } (\pi, \lambda) \text{ tem tipo 0} \\ I \setminus I_{\alpha(0)}, & \text{se } (\pi, \lambda) \text{ tem tipo 1} \end{cases}.$$

Observemos que  $J$  é o subintervalo de  $I$  obtido após a remoção do intervalo de menor comprimento. Esta nova aplicação é também uma transformação de intercâmbio de intervalos. Dessa forma, podemos escrever para  $\hat{R}(f)$  uma partição  $\{J_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$  onde os subintervalos  $J_\alpha \subset J$  são definidos a seguir.

Se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 0,

$$J_\alpha = \begin{cases} I_\alpha, & \text{se } \alpha \neq \alpha(0) \\ I_{\alpha(0)} \setminus f(I_{\alpha(1)}), & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Além disso,  $f(J_\alpha) \subset J$  para todo  $\alpha \neq \alpha(1)$ . Por outro lado,

$$f(J_{\alpha(1)}) = f(I_{\alpha(1)}) \subset I_{\alpha(0)},$$

assim

$$f^2(J_{\alpha(1)}) \subset f(I_{\alpha(0)}) \subset J.$$

Vejamos a figura 3.4.

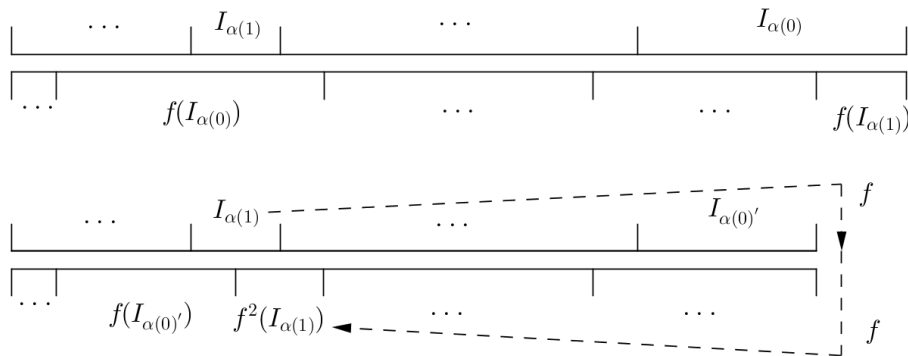


Figura 3.4: Indução de Rauzy-Veech tipo 0

Se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 1,

$$J_\alpha = \begin{cases} f^{-1}(I_{\alpha(0)}), & \text{se } \alpha = \alpha(0) \\ I_{\alpha(1)} \setminus J_{\alpha(0)}, & \text{se } \alpha = \alpha(1) \\ I_\alpha, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Observemos que  $f(J_\alpha) \subset J$  para todo  $\alpha \neq \alpha(0)$ . Por outro lado,

$$f^2(J_{\alpha(0)}) = f(I_{\alpha(0)}) \subset J.$$

Vejamos a figura 3.5.

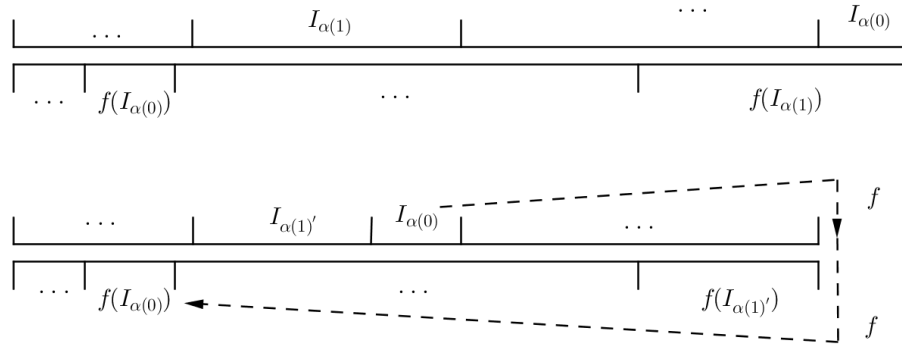


Figura 3.5: Indução de Rauzy-Veech tipo 1

Em ambos os casos,

$$\hat{R}(f) = \begin{cases} f, & \text{se } \alpha \neq \alpha(1 - \epsilon) \\ f^2, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com  $\epsilon \in \{0, 1\}$ .

Note que aplicação de indução  $\hat{R}(f)$  não está definida quando os dois intervalos  $I_{\alpha(0)}$  e  $I_{\alpha(1)}$  tem o mesmo comprimento.

Segue das descrições anteriores que se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 0, então a transformação  $\hat{R}(f)$  é descrita por  $(\pi^1, \lambda^1)$ , onde

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \dots & \alpha_{k-1}^0 & \alpha_k^0 & \alpha_{k+1}^0 & \dots & \dots & \alpha(0) \\ \alpha_1^1 & \dots & \alpha_{k-1}^1 & \alpha(0) & \alpha(1) & \alpha_{k+1}^1 & \dots & \alpha_{d-1}^1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\pi_0^1 = \pi_0$$

e

$$\pi_1^1(\alpha) = \begin{cases} \pi_1(\alpha), & \text{se } \pi_1(\alpha) \leq \pi_1(\alpha(0)) \\ \pi_1(\alpha) + 1, & \text{se } \pi_1(\alpha(0)) < \pi_1(\alpha) < d \\ \pi_1(\alpha(0)) + 1, & \text{se } \pi_1(\alpha(1)) = d \end{cases} \quad (3.4)$$

E  $\lambda^1 = (\lambda_\alpha^1)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  onde

$$\lambda_\alpha^1 = \begin{cases} \lambda_\alpha, & \text{se } \alpha \neq \alpha(0) \\ \lambda_{\alpha(0)} - \lambda_{\alpha(1)}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.5)$$

Analogamente, se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 1, então a transformação  $\hat{R}(f)$  é descrita por  $(\pi^1, \lambda^1)$ , onde

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \dots & \alpha_{k+1}^0 & \alpha(1) & \alpha(0) & \alpha_{k+1}^0 & \dots & \alpha_{d-1}^0 \\ \alpha_1^1 & \dots & \alpha_{k-1}^1 & \alpha_k^1 & \alpha_{k+1}^1 & \dots & \dots & \alpha(1) \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\pi_1^1 = \pi_1$$

e

$$\pi_0^1(\alpha) = \begin{cases} \pi_0(\alpha), & \text{se } \pi_0(\alpha) \leq \pi_0(\alpha(1)) \\ \pi_0(\alpha) + 1, & \text{se } \pi_0(\alpha(1)) < \pi_0(\alpha) < d \\ \pi_0(\alpha(1)) + 1, & \text{se } \pi_0(\alpha(0)) = d \end{cases} \quad (3.6)$$

E  $\lambda^1 = (\lambda_\alpha^1)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  onde

$$\lambda_\alpha^1 = \begin{cases} \lambda_\alpha, & \text{se } \alpha \neq \alpha(1) \\ \lambda_{\alpha(1)} - \lambda_{\alpha(0)}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.7)$$

**Exemplo 3.2.1.** Se  $\pi = \begin{pmatrix} C & B & E & A & D \\ A & D & C & B & E \end{pmatrix}$  tem tipo 0, isto é,  $\lambda_E < \lambda_D$  então

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} C & B & E & A & D \\ A & D & E & B & C \end{pmatrix} \text{ e } \lambda^1 = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D - \lambda_E, \lambda_E).$$



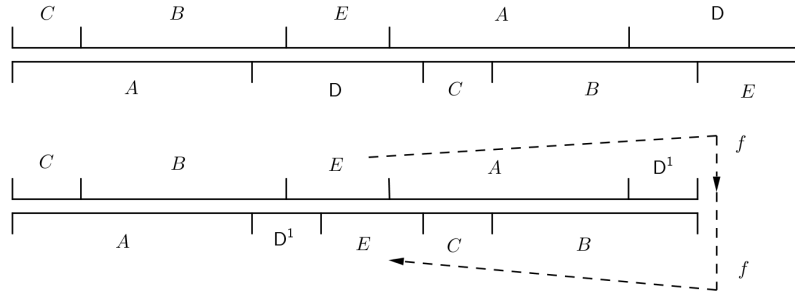


Figura 3.6: Exemplo de uma indução de Rauzy-Veech tipo 0

A seguir definiremos o operador  $\Theta$  cuja matriz  $(\Theta_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$  relaciona os vetores translação  $w$  e  $w^1$  de  $f$  e  $\hat{R}(f)$  respectivamente. E, em seguida, reescreveremos a relação entre os vetores de comprimento  $\lambda$  e  $\lambda^1$ .

### 3.2.1 Operador $\Theta$

Da figura 3.4 vimos que, se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 0,

$$w_\alpha^1 = \begin{cases} w_\alpha, & \text{se } \alpha \neq \alpha(1) \\ w_{\alpha(0)}, & \text{se } \alpha = \alpha(0) \\ w_{\alpha(1)} + w_{\alpha(0)}, & \text{se } \alpha = \alpha(1) \end{cases} .$$

Analogamente, da figura 3.5 segue que, se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 1,

$$w_\alpha^1 = \begin{cases} w_\alpha, & \text{se } \alpha \neq \alpha(0) \\ w_{\alpha(1)}, & \text{se } \alpha = \alpha(1) \\ w_{\alpha(0)} + w_{\alpha(1)}, & \text{se } \alpha = \alpha(0) \end{cases} .$$

Estas relações podem ser expressas como

$$w^1 = \Theta(w) \tag{3.8}$$

onde  $\Theta = \Theta_{\pi,\lambda} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é o operador linear cuja matriz  $(\Theta_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$  é dada por

$$\Theta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 1, & \text{se } \alpha = \alpha(1) \text{ e } \beta = \alpha(0) \\ 0, & \text{em todos os outros casos} \end{cases} \tag{3.9}$$

se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 0, e

$$\Theta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 1, & \text{se } \alpha = \alpha(0) \text{ e } \beta = \alpha(1) \\ 0, & \text{em todos os outros casos} \end{cases} \quad (3.10)$$

se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 1.

Notemos que  $\Theta$  depende apenas de  $\pi$  e do tipo  $\epsilon$ .

Agora vamos estabelecer uma relação entre os vetores de comprimento  $\lambda$  e  $\lambda^1$  de  $f$  e  $\hat{R}(f)$  respectivamente.

Podemos reescrever as relações 3.5 e 3.7 como

$$\lambda^1 = (\Theta^{-1})^*(\lambda) \text{ ou } \lambda = \Theta^*(\lambda^1) \quad (3.11)$$

onde  $\Theta^*$  é o operador adjunto de  $\Theta$ , isto é, operador cuja matriz é a transposta de  $\Theta$ . Notemos que  $\Theta^* = Id + E_{\alpha(\epsilon)\alpha(1-\epsilon)}$ ,  $\epsilon \in \{0, 1\}$ , onde  $E_{\alpha(\epsilon)\alpha(1-\epsilon)}$  é a matriz elementar cujo único coeficiente não nulo é igual a 1 na posição  $\alpha(\epsilon)\alpha(1-\epsilon)$ .

A inversa da matriz  $\Theta$  é dada por

$$\Theta_{\alpha,\beta}^{-1} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ -1, & \text{se } \alpha = \alpha(1) \text{ e } \beta = \alpha(0) \\ 0, & \text{em todos os outros casos} \end{cases} \quad (3.12)$$

se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 0, e

$$\Theta_{\alpha,\beta}^{-1} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ -1, & \text{se } \alpha = \alpha(0) \text{ e } \beta = \alpha(1) \\ 0, & \text{em todos os outros casos} \end{cases} \quad (3.13)$$

se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 1.

### 3.3 Condição de Keane

Queremos garantir que os iterados  $\hat{R}^n(f)$  estejam definidos para todo  $n \geq 1$ . Notemos que se  $(\pi, \lambda)$  é irreduzível, então  $(\pi^1, \lambda^1)$  também é irreduzível e possui os mesmos números de subintervalos. No intuito de garantir tal existência, introduziremos alguns resultados.

**Definição 3.3.1.** Um vetor  $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$  é racionalmente independente se  $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} n_\alpha \lambda_\alpha \neq 0$  para todo vetor inteiro não nulo  $(n_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \mathbb{Z}^d$ .

Seja  $\partial I_\gamma$  o ponto da extremidade esquerda de cada subintervalo  $I_\gamma$ . Como a extremidade esquerda de  $I$  foi tomada coincidindo com a origem, então a extremidade esquerda de cada subintervalo  $I_\gamma$ , é dada por

$$\partial I_\gamma = \sum_{\pi_0(\eta) < \pi_0(\gamma)} \lambda_\eta.$$

**Definição 3.3.2.** Um par  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a condição de Keane se as órbitas destas extremidades são tão disjuntas quanto é possível, ou seja,  $f^m(\partial I_\alpha) \neq \partial I_\beta$  para todo  $m \geq 1$  e  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  com  $\pi_0(\beta) \neq 1$ .

Essa condição garante que  $\pi$  é irreduzível e  $(\pi^1, \lambda^1) = \hat{R}(\pi, \lambda)$  está bem definido. De fato, suponhamos que  $\pi$  é redutível, então existe  $k \in \{1, \dots, d-1\}$  tal que  $\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\{1, \dots, k\}) = \{1, \dots, k\}$ . Assim, existe  $\alpha \in \{k+1, \dots, d\}$  tal que  $f(\partial I_\alpha) = \partial I_{k+1}$ . O que contradiz a condição de Keane. Além disso,  $\hat{R}$  está bem definido, pois se  $\lambda_{\alpha(0)} = \lambda_{\alpha(1)}$ , então  $f(\partial I_{\alpha(1)}) = \partial I_{\alpha(0)}$ , o que também contradiz a condição de Keane.

**Observação 3.3.3.** A condição de Keane não é afetada se restringirmos ao caso  $\pi_1(\alpha) > 1$ .

De fato, suponhamos que  $f^m(\partial I_\alpha) = \partial I_\beta > 0$  com  $\pi_1(\alpha) = 1$  e  $m > 1$ . Então,  $f(\partial I_\alpha) = 0 = \partial I_\gamma$  para algum  $\gamma \in \mathcal{A}$ . Assim,  $f^{m-1}(\partial I_\gamma) = f^m(\partial I_\alpha) = \partial I_\beta$ . Além disso,  $\pi_1(\gamma) > 1$  pois  $\pi$  é irreduzível e  $\pi_0(\gamma) = 1$ .

**Proposição 3.3.4.** Se  $\lambda$  é racionalmente independente e  $\pi$  é irreduzível, então  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a condição de Keane.

*Demonstração.* Suponha que exista  $m \geq 1$  e  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  tal que  $f^m(\partial I_\alpha) = \partial I_\beta$  e  $\pi_0(\beta) > 1$ . Defina  $\beta_j$ ,  $0 \leq j \leq m$ , tal que  $f^j(\partial I_\alpha) \in I_{\beta_j}$ . Note que  $\beta_0 = \alpha$  e  $\beta_m = \beta$ . Assim,

$$\begin{aligned} f(\partial I_\alpha) &= \partial I_\alpha + w_\alpha \\ f^2(\partial I_\alpha) &= f(f(\partial I_\alpha)) = f(\partial I_\alpha) + w_{\beta_1} = \partial I_\alpha + w_\alpha + w_{\beta_1} \\ &\vdots \\ \partial I_\beta &= f^m(\partial I_\alpha) = \partial I_\alpha + w_\alpha + w_{\beta_1} + \dots + w_{\beta_{m-1}}, \end{aligned}$$

onde  $w$  é o vetor translação definido em 3.1.7, logo

$$\partial I_\beta - \partial I_\alpha = \sum_{j=0}^{m-1} w_{\beta_j},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_m)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_0)} \lambda_\gamma &= \sum_{j=0}^{m-1} \left( \sum_{\pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma \right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_0)} \lambda_\gamma. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{j=1}^m \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma = 0.$$

Reescrevendo temos,  $\sum_{\lambda \in \mathcal{A}} \eta_\lambda \lambda_\gamma = 0$ , onde

$$\eta_\gamma = \#\{0 \leq j < m; \pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)\} - \#\{0 < j \leq m; \pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)\}.$$

Por hipótese,  $\lambda$  é racionalmente independente, então  $\eta_\gamma = 0$  para todo  $\gamma \in \mathcal{A}$ . Agora, seja

$$D = \max\{\pi_0(\beta_j)_{0 < j \leq m}, \pi_1(\beta_j)_{0 \leq j < m}\}.$$

Observe que  $D \geq \pi_0(\beta_m) = \pi_0(\beta) > 1$ . Ainda por hipótese temos que  $\pi$  é irredutível, então, existe  $\gamma \in \mathcal{A}$  tal que  $\pi_0(\gamma) < D \leq \pi_1(\gamma)$ . Como  $D \geq \pi_1(\beta_j)$ , segue que  $\pi_1(\beta_j) \leq \pi_1(\gamma)$  para todo  $0 \leq j < m$  e assim,  $\{0 \leq j < m; \pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)\} = \emptyset$ . Além disso, como  $\eta_\lambda = 0$ , então  $\#\{0 \leq j < m; \pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)\} = \#\{0 < j \leq m; \pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)\}$ . Daí, segue que,  $\{0 < j \leq m; \pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)\} = \emptyset$  e, portanto,  $\pi_0(\beta_j) \leq \pi_0(\gamma) < D$ , para todo  $0 < j \leq m$ .

Analogamente podemos mostrar que  $\pi_1(\beta_j) < D$  para todo  $0 \leq j < m$ . De fato, como  $D > 1$  e por hipótese  $\pi$  é irredutível, então existe  $\gamma \in \mathcal{A}$  tal que  $\pi_1(\gamma) < D \leq \pi_0(\gamma)$ . Como  $D \geq \pi_0(\beta_j)$ , segue que  $\pi_0(\beta_j) \leq \pi_0(\gamma)$  para todo  $0 < j \leq m$  e assim,  $\{0 < j \leq m; \pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)\} = \emptyset$ . Daí, segue que,  $\{0 \leq j < m; \pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)\} = \emptyset$  e, portanto,  $\pi_1(\beta_j) \leq \pi_1(\gamma) < D$  para todo  $0 \leq j < m$ .

Estes dois resultados contradizem a definição de  $D$ . Portanto,  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a condição de Keane.  $\square$

**Exemplo 3.3.5.** Suponha  $d = 2$ . Já vimos que a transformação de intercâmbio de intervalos é dada por  $f(x) = x + \lambda_B \pmod{(\lambda_A + \lambda_B)\mathbb{Z}}$ . A condição de Keane significa que, dado qualquer  $m \geq 1$  e  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$m\lambda_B \neq \lambda_A + n(\lambda_A + \lambda_B) \text{ e } \lambda_A + m\lambda_B \neq n(\lambda_A + \lambda_B)$$

Note que isso vale se, e somente se,  $(\lambda_A, \lambda_B)$  é racionalmente independente.

**Exemplo 3.3.6.** A partir de  $d = 3$ , a condição de Keane é estritamente mais fraca que in-

dependência racional. Considere, por exemplo,  $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$ . Então  $f(x) = x + \lambda_C \pmod{(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)\mathbb{Z}}$  e a condição de Keane significa que

$$m\lambda_C, \lambda_A + m\lambda_C \text{ e } \lambda_A + \lambda_B + m\lambda_C$$

são diferentes de  $\lambda_A + n(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)$  e  $\lambda_A + \lambda_B + n(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)$ , para todo  $m \geq 1$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . Reescrevendo, temos que dado qualquer  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,

$$p\lambda_C \neq q(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C) \text{ e } p\lambda_C \neq \lambda_A + q(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C).$$

### 3.4 Minimalidade

Mostraremos aqui que a condição de Keane implica a minimalidade de  $f$ . Para provar isto veremos a definição de minimalidade e alguns resultados auxiliares.

**Definição 3.4.1.** Uma transformação é chamada minimal se cada órbita é densa no domínio inteiro ou equivalentemente, o domínio é o único conjunto não vazio fechado invariante definido.

O próximo lema nos diz que a aplicação de primeiro retorno a um subintervalo qualquer  $J \subset I_\alpha$  é ainda uma transformação de intercâmbio de intervalos.

**Lema 3.4.2.** Dado qualquer subintervalo  $J = [a, b]$  de algum  $I_\alpha$ , então existe uma partição  $\{J_j; 1 \leq j \leq k\}$  de  $J$  e inteiros  $n_1, \dots, n_k \geq 1$ , onde  $k \leq d + 2$ , tal que

1.  $f(J_j) \cap J = \emptyset$  para todo  $0 < i < n_j$  e  $1 \leq j \leq k$ ;
2. Cada  $f^{n_j}|_{J_j}$  é uma translação de  $J_j$  para algum subintervalo de  $J$ ;
3. Os subintervalos  $f^{n_j}(J_j)$ ,  $1 \leq j \leq k$  são dois a dois disjuntos.

*Demonstração.* Seja  $A = \{a, b\} \cup \{\partial I_\gamma, \gamma \in \mathcal{A}\}$ , isto é, a união da fronteira  $\{a, b\}$  de  $J$  com o conjunto de pontos de extremidade de todos os intervalos  $I_\gamma, \gamma \in \mathcal{A}$ . Seja  $B \subset J$  o conjunto dos pontos  $z \in J$  para o qual deve existir algum  $m \geq 1$  tal que  $f^i(z) \notin J$  para todo  $0 < i < m$  e  $f^m(z) \in A$ .

A aplicação  $B \ni z \mapsto f^m(z) \in A$  é injetiva. De fato, sejam  $z_1, z_2 \in J$  e  $m_1, m_2 \geq 1$  tal que  $f^{m_1}(z_1) = f^{m_2}(z_2) \in A$ . Se  $m_1 = m_2$ , da injetividade de  $f$ , segue que  $f^m$  também o é. Sem perda de generalidade, suponhamos  $m_1 < m_2$ . Então,  $z_1 = f^{m_2 - m_1}(z_2) \in J$  e  $1 \leq m_2 - m_1 < m_2$ , o que contradiz a escolha de  $m_2$ . Logo,  $m_1 = m_2$  e  $f^m$  é injetiva. Daí, segue que,  $\#B \leq \#A$ .

Consideremos a partição de  $J$  determinada pelos pontos de  $B$ . Esta partição tem no máximo  $d + 2$  elementos. Pelo teorema 2.0.8, para cada elemento  $J_j = [a_j, b_j]$  desta

partição existem  $n_j \geq 1$  tal que  $f^{n_j}(J_j)$  intersepta  $J$ . Tome  $n_j$  o menor valor deles. Da definição de  $B$  segue que a restrição  $f^{n_j}|_{J_j}$  é uma translação e sua imagem está contida em  $J$ .

Por fim, os  $f^{n_j}(J_j)$ ,  $1 \leq j \leq k$  são disjuntos dois a dois. De fato, se existem  $J_i, J_j$  tais que  $y \in f^{n_j}(J_j) \cap f^{n_i}(J_i)$  então, existem  $x_j \in J_j$ ,  $x_i \in J_i$  tais que  $f^{n_j}(x_j) = y = f^{n_i}(x_i)$ . Como  $n_i \neq n_j$  pois, caso contrário, da bijetividade de  $f$  teríamos  $x_j = x_i$ , o que é um absurdo, já que  $J_i \cap J_j = \emptyset$  por construção, vamos supor que  $n_i > n_j$  então,  $f^{n_i - n_j}(x_i) = x_j \in J$ , contradizendo a definição de  $n_i$ . Portanto, os subintervalos  $f^{n_j}(J_j)$ ,  $1 \leq j \leq k$  são dois a dois disjuntos.  $\square$

**Corolário 3.4.3.** *Sob as hipóteses do Lema 3.4.2, a união  $\hat{J}$  de todos os iterados futuros de  $J$  é uma união finita de intervalos e um conjunto totalmente invariante, ou seja,  $f(\hat{J}) = \hat{J}$ .*

*Demonstração.* A primeira afirmação segue da primeira parte do lema 3.4.2:

$$\hat{J} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(J) = \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=0}^{n_j-1} f^i(J_j).$$

Sabemos que  $f^{n_j}(J_j) \subset J$ ,  $1 \leq j \leq k$ , então  $\bigcup_{j=0}^k f^{n_j}(J_j) \subset J$ . Além disso, pelos itens 2 e 3 do lema 3.4.2 temos

$$\left| \bigcup_{j=0}^k f^{n_j}(J_j) \right| = \sum_{j=1}^k |f^{n_j}(J_j)| = \sum_{j=1}^k |J_j| = |J|.$$

Logo,  $J = \bigcup_{j=0}^k f^{n_j}(J_j)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=0}^{n_j-1} f^i(J_j) \\ &= \bigcup_{j=1}^k \left( J_j \cup \left( \bigcup_{i=1}^{n_j-1} f^i(J_j) \right) \right) \\ &= \left( \bigcup_{j=1}^k J_j \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^{n_j-1} f^i(J_j) \right) \\ &= J \cup \left( \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^{n_j-1} f^i(J_j) \right) \\ &= \left( \bigcup_{j=1}^k f^{n_j}(J_j) \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^{n_j-1} f^i(J_j) \right) \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{j=1}^k \left( f^{n_j}(J_j) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{n_j-1} f^i(J_j) \right) \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^{n_j} f^i(J_j) \\ &= f(\hat{J}). \end{aligned}$$

□

**Lema 3.4.4.** *Se  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a condição de Keane então  $f$  não tem pontos periódicos.*

*Demonstração.* Suponha que exista  $m \geq 1$  e  $x \in I$  tal que  $f^m(x) = x$ . Definamos  $\beta_j$ ,  $0 \leq j \leq m$  tal que  $f^j(x) \in I_{\beta_j}$  e consideremos  $J = \{y \in I; f^j(y) \in I_{\beta_j}, 0 \leq j < m\}$ . Afirmamos que  $J$  é um intervalo. De fato, o conjunto  $J$  pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} J &= \bigcap_{j=0}^{m-1} \{y \in I; f^j(y) \in I_{\beta_j}\} \\ &= \bigcap_{j=0}^{m-1} f^{-j}(I_{\beta_j}). \end{aligned}$$

Então  $J$  é um intervalo. Além disso,  $f^m|_J$  é uma translação. Portanto, existe  $d$  tal que  $f^m(y) = y + d$ , para todo  $y \in J$ . Como  $x \in J$ , temos  $f^m(x) = x + d$ . Por outro lado,  $f^m(x) = x$ , logo  $d = 0$ . Portanto,  $f^m(y) = y$  para  $y \in J$ . Daí, segue que  $f^m|_J = Id$ . Em particular,  $f^m(\partial J) = \partial J$ .

A definição de  $J$  implica que existe  $1 \leq k \leq m$  e  $\beta \in \mathcal{A}$  tal que  $f^k(\partial J) = \partial I_\beta$ . Suponha que  $f^k(\partial J) \neq \partial I_\beta$ , para todo  $\beta \in \mathcal{A}$  e para todo  $0 \leq k \leq m$ . Isso implica que a fronteira de  $J$  pertence a  $J$ . Daí, segue que  $J$  é fechado, o que é um absurdo. Assim,

$$f^m(\partial I_\beta) = f^m(f^k(\partial J)) = f^k(f^m(\partial J)) = f^k(\partial J) = \partial I_\beta.$$

Se  $\pi_0(\beta) > 1$ , isto contradiz a condição de Keane. Se  $\pi_0(\beta) = 1$ , então existe  $\alpha$  tal que  $f(\partial I_\alpha) = \partial I_\beta$ . Note que  $\alpha \neq \beta$ , assim,  $\partial I_\alpha > 0$ . Com isso,

$$f^m(\partial I_\alpha) = f^{m-1}(f(\partial I_\alpha)) = f^{m-1}(\partial I_\beta) = f^{-1}(\partial I_\beta) = \partial I_\alpha.$$

O que também contradiz a condição de Keane. Portanto, não existe tal ponto periódico  $x$ .

□

**Proposição 3.4.5.** *Se  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a condição de Keane então  $f$  é minimal.*

*Demonstração.* Suponha que exista  $x \in I$  tal que  $\{f^n(x); n \geq 0\}$  não é denso em  $I$ , isto é,  $A = \overline{\{f^n(x); n \geq 0\}} \neq I$ . Então podemos escolher um subintervalo  $J = [a, b]$  de algum  $I_\alpha$  tal que  $J \subset I \setminus A$ . Seja  $\hat{J}$  a união de todos os iterados futuros de  $J$ . Pelo corolário 3.4.3 esta é uma união finita de intervalos totalmente invariantes sobre  $f$ . Afirmamos que  $\hat{J}$  não pode ser da forma  $[0, \hat{b})$ .

De fato, suponhamos que  $\hat{J}$  seja desta forma e consideremos  $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{A}; I_\alpha \subset \hat{J}\}$  então,  $\pi_0(\mathcal{B}) = 0$  ou  $\pi_0(\mathcal{B}) = \{1, \dots, k\}$  para algum  $k \geq 1$ . Se  $\pi_0(\mathcal{B}) = \{1, \dots, k\}$ , como  $\hat{J}$  é invariante, temos  $\pi_1(\mathcal{B}) = \{1, \dots, k\}$ . Assim,

$$\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\{1, \dots, k\}) = \{1, \dots, k\}.$$

Isso contradiz a irreduzibilidade de  $\pi$ , que é consequência da condição de Keane. Note que  $k < d$ , pois, se fosse  $k = d$  teríamos  $\hat{J} = I$  e assim,  $J \subset \hat{J} \setminus A$ , implicando que  $A = \emptyset$ , o que é um absurdo.

Se  $\pi_0(\mathcal{B}) = 0$ , temos que  $\hat{J} \subset I_\alpha$ , onde  $\pi_0(\alpha) = 1$ . Por invariância, temos que  $\hat{J} \subset f(I_\alpha)$  e, portanto,  $\pi_1(\alpha) = 1$ . O que também contradiz a irreduzibilidade de  $\pi$ . Assim, a afirmação está provada.

Com isso, deve existir algum intervalo contido em  $\hat{J}$  do tipo  $[\hat{a}, \hat{b})$ , com  $\hat{a} > 0$ . Se  $f^n(\hat{a}) \neq \partial I_\beta$  para todo  $n \geq 0$  e  $\beta \in \mathcal{A}$  então, pela continuidade de  $f$  e invariância de  $\hat{J}$ , todo  $f^n(\hat{a}), n \geq 0$  será extremidade de algum dos subintervalos de  $\hat{J}$ . De fato, como  $f^n|_{[\hat{a}, \hat{b})}$  é contínua, por construção de  $J$  e  $\hat{J}$ , temos que  $f^n([\hat{a}, \hat{b}))$  é um intervalo. E como  $\hat{J}$  é invariante por  $f$ ,  $f^n([\hat{a}, \hat{b})) \subset \hat{J}$ . Além disso,  $f$  é crescente, então  $f$  leva a extremidade esquerda do intervalo  $[\hat{a}, \hat{b})$  em uma extremidade esquerda de outro intervalo (componente conexa) contido em  $\hat{J}$ . Logo, como  $\hat{J}$  é uma união finita de intervalos,  $f$  deve possuir pontos periódicos, o que é um absurdo pelo lema 3.4.4.

Analogamente, se  $f^n(\hat{a}) \neq f(\partial I_\alpha)$  para todo  $n \leq 0$  e  $\alpha \in \mathcal{A}$  então, todo  $f^n(\hat{a}), n \leq 0$  será extremidade de algum dos subintervalos de  $\hat{J}$ . O que também implica a existência de um ponto periódico, que é impossível de acordo com o lema 3.4.4. Assim, existem  $n_1 \leq 0 \leq n_2$  e  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  tal que

$$f^{n_1}(\hat{a}) = f(\partial I_\alpha) \text{ e } f^{n_2}(\hat{a}) = \partial I_\beta. \quad (3.14)$$

Se  $\partial I_\beta > 0$ , isso contradiz a condição de Keane pois, tomando  $m = n_2 - n_1 + 1$ ,

$$f^{n_2 - n_1 + 1}(\partial I_\alpha) = f^{n_2}(f^{1 - n_1}(\partial I_\alpha)) = f^{n_2}(\hat{a}) = \partial I_\beta.$$

Se  $\partial I_\beta = 0$ , então  $n_2 > 0$ , pois tomamos  $\hat{a} > 0$ . Além disso,  $\partial I_\beta = f(\partial I_\gamma)$ , onde  $\pi_1(\gamma) = 1$ . Isso mostra que 3.14 permanece válida se substituirmos  $\beta$  por  $\gamma$  e  $n_2$  por  $n_2 - 1$ . Como



$\gamma \neq \beta$ , por irredutibilidade temos  $\partial I_\alpha > 0$ , o que contradiz a condição de Keane pois,

$$f^{n_2-n_1}(\partial I_\alpha) = f^{n_2-1}(f^{1-n_1}(\partial I_\alpha)) = f^{n_2-1}(\hat{a}) = \partial I_\gamma, \quad \pi_0(\gamma) \neq 1.$$

Assim, não existe  $x \in I$  tal que  $\overline{\{f^n(x); n \geq 0\}} \neq I$ . Portanto,  $f$  é minimal.  $\square$

### 3.5 Dinâmica da Aplicação de Indução

Seja  $(\pi, \lambda)$  tal que as iteradas  $(\pi^n, \lambda^n) = \hat{R}^n(\pi, \lambda)$  estejam definidas para todo  $n \geq 0$ . Isso é afirmado se  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a condição de Keane. Para cada  $n \geq 0$ , seja  $\epsilon^n \in \{0, 1\}$  o tipo de  $\hat{R}^n(\pi, \lambda)$  e  $\alpha^n, \beta^n \in \mathcal{A}$  tal que

$$\pi_{\epsilon^n}(\alpha^n) = d = \pi_{1-\epsilon^n}(\beta^n).$$

Ou seja,  $\alpha^n$  e  $\beta^n$  são os dois últimos símbolos nas duas linhas de  $\pi^n$ , com  $\lambda_{\alpha^n}^n > \lambda_{\beta^n}^n$ . Afirmamos que a sequência  $(\epsilon^n)_n$  assume os valores 0 e 1 infinitas vezes. De fato, suponha que  $\epsilon^n$  fosse a partir de algum elemento constante, então  $\alpha^n \in \mathcal{A}$  também seria constante. Observe que

$$\lambda_\alpha^{n+1} = \begin{cases} \lambda_\alpha^n & \text{se } \alpha \neq \alpha^n \\ \lambda_{\alpha^n}^n - \lambda_{\beta^n}^n & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Agora, consideremos  $\alpha^n = \alpha^0$ , para todo  $n$ . Então,

$$\lambda_{\alpha^0}^{n+1} = \lambda_{\alpha^0}^n - \lambda_{\beta^n}^n \text{ para todo } n.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha^0}^2 &= \lambda_{\alpha^0}^1 - \lambda_{\beta^1}^1 \\ \lambda_{\alpha^0}^3 &= \lambda_{\alpha^0}^2 - \lambda_{\beta^2}^2 = \lambda_{\alpha^0}^1 - \lambda_{\beta^1}^1 - \lambda_{\beta^2}^2 \\ &\vdots \\ \lambda_{\alpha^0}^n &= \lambda_{\alpha^0}^1 - (\lambda_{\beta^1}^1 + \lambda_{\beta^2}^2 + \dots + \lambda_{\beta^{n-1}}^{n-1}), \text{ onde } \beta^1, \dots, \beta^{n-1} \text{ são perdedores} \\ &= \lambda_{\alpha^0}^1 - (\lambda_{\beta^1}^1 + \lambda_{\beta^2}^2 + \dots + \lambda_{\beta^{n-1}}^{n-1}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_{\alpha^0}^n \leq \lambda_{\alpha^0}^1 - l(n-1), \text{ para todo } n, \text{ onde } l = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \{\lambda_\alpha\}.$$

E assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\alpha^0}^n < 0$ . Daí, segue que existe  $n_0$ , com  $n > n_0$ , tal que  $\lambda_{\alpha^0}^n < 0$ , o que é um absurdo. Portanto,  $\alpha^n$  não é constante, o que implica que  $\epsilon^n$  não é constante.

**Proposição 3.5.1.** *As sequências  $(\alpha^n)_n$  e  $(\beta^n)_n$  assumem todos os valores  $\alpha \in \mathcal{A}$  infinitas vezes.*

*Demonstração.* Dado qualquer  $\alpha \in \mathcal{A}$ , considere algum intervalo de tempo maximal  $[p, q)$ , tal que  $\alpha^n = \alpha$  para todo  $n \in [p, q)$ . No final desse intervalo o tipo deve mudar:

$$\epsilon^q = 1 - \epsilon^{q-1} \text{ e } \pi_{1-\epsilon^q}^q(\alpha) = d.$$

Ou seja,  $\alpha = \beta^q$ . Isso motra que temos que provar a afirmação somente para  $(\alpha^n)_n$ .

Seja  $\mathcal{B}$  o subconjunto de símbolos  $\beta \in \mathcal{A}$  que ocorre finitas vezes na sequência  $(\alpha^n)_n$ . Assim, podemos considerar, sem perda de generalidade, que  $\alpha^n \neq \beta$  para todo  $\beta \in \mathcal{B}$  e para todo  $n > 0$ . Então,  $\lambda_{\beta}^n = \lambda_{\beta}$  para todo  $\beta \in \mathcal{B}$  e para todo  $n \geq 0$ , visto que se  $\lambda_{\beta}^n \neq \lambda_{\beta}^{n+1}$ , isto é,  $\lambda_{\beta}^{n+1} < \lambda_{\beta}^n$  implicaria que  $\beta$  seria a letra ganhadora no nível  $n$ , ou seja,  $\alpha^n = \beta$  o que não é o caso.

Agora como  $\lambda_{\alpha^{n+1}}^n = \lambda_{\alpha^n}^n - \lambda_{\beta^n}^n$  temos que  $\beta^n = \beta$  só pode acontecer um número finito de vezes para todo  $\beta \in \mathcal{B}$ , pois caso contrário, se  $\beta^{n_i} = \beta$  para todo  $i \geq 0$  então

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha^{n_i}}^{n_i+1} &= \lambda_{\alpha^{n_i}}^{n_i} - \lambda_{\beta^{n_i}}^{n_i} = \lambda_{\alpha^{n_i}}^{n_i} - \lambda_{\beta}^{n_i} \\ &= \lambda_{\alpha^{n_i}}^{n_i} - \lambda_{\beta}. \end{aligned}$$

Como  $\alpha^{n_i} \in \mathcal{A}$ , que é um conjunto finito, existe uma subsequência  $n_{i_k}$  tal que  $\alpha^{n_{i_k}} = \alpha$  para todo  $k$ , então

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha^{n_{i_1}}}^{n_{i_1}+1} &= \lambda_{\alpha^{n_{i_1}}}^{n_{i_1}} - \lambda_{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\alpha}^{n_{i_1}+1} = \lambda_{\alpha}^{n_{i_1}} - \lambda_{\beta} \\ \lambda_{\alpha}^{n_{i_2}+1} &= \lambda_{\alpha}^{n_{i_2}} - \lambda_{\beta} \leq \lambda_{\alpha}^{n_{i_1}+1} - \lambda_{\beta} \leq \lambda_{\alpha}^{n_{i_1}} - 2\lambda_{\beta} \\ &\vdots \\ \lambda_{\alpha}^{n_{i_k}+1} &\leq \lambda_{\alpha}^{n_{i_1}} - k\lambda_{\beta}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Portanto, a menos de uma subsequência, podemos supor que  $\beta^n \neq \beta$  para todo  $\beta \in \mathcal{B}$  e todo  $n \geq 0$ . Daí, segue que para todo  $\beta \in \mathcal{B}$ , as sequências  $\pi_0^n(\beta)$  e  $\pi_1^n(\beta)$ ,  $n \geq 0$  são não decrescentes, pois se  $\pi_0^{n+1}(\beta) \leq \pi_0^n(\beta)$  temos que  $\beta = \beta^n$  e  $\epsilon^n = 1$  e se  $\pi_1^{n+1}(\beta) < \pi_1^n(\beta)$  temos que  $\beta = \beta^n$  e  $\epsilon^n = 0$ . Assim, substituindo  $(\pi, \lambda)$  por algum iterado podemos supor que estas sequências são constantes.

Agora, afirmamos que  $\pi_{\epsilon}(\beta) < \pi_{\epsilon}(\alpha)$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ ,  $\beta \in \mathcal{B}$  e  $\epsilon \in \{0, 1\}$ . De fato, suponha que existe  $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ ,  $\beta \in \mathcal{B}$  e  $\epsilon \in \{0, 1\}$  tal que  $\pi_{\epsilon}(\alpha) < \pi_{\epsilon}(\beta)$ . Então,  $\pi_{\epsilon}^n(\alpha) < \pi_{\epsilon}^n(\beta)$ , para todo  $n$ . Se assim não fosse, existiria  $n_0$  tal que  $\pi_{\epsilon}^{n_0}(\beta) < \pi_{\epsilon}^{n_0}(\alpha)$ . Isso implica que  $\beta$  é um perdedor, o que é um absurdo. Como  $\pi_{\epsilon}^n(\beta) < d$ , segue que

$\pi_\epsilon^n(\alpha) < d$ , para todo  $n$ . Além disso, temos que  $\alpha \notin \mathcal{B}$  então,  $\pi_{1-\epsilon}^n(\alpha) = d$  e  $\epsilon^n = 1 - \epsilon$ , para algum  $n$ , então  $\pi_\epsilon^{n+1}(\beta) = \pi_\epsilon^n(\beta) + 1$ , o que contradiz o fato de  $\pi_\epsilon^n(\beta)$  ser constante. Assim, concluímos a prova da afirmação.

Como consequência desse resultado,  $\pi_0(\mathcal{B}) = \{1, \dots, k\} = \pi_1(\mathcal{B})$ , para algum  $k < d$ . Logo,  $\pi$  é redutível, o que é um absurdo. Portanto  $k = 0$ , isto é,  $\mathcal{B} = \emptyset$ . Isso prova o resultado para  $(\alpha^n)_n$ , e assim completamos a prova da proposição.  $\square$

**Corolário 3.5.2.** *O comprimento do domínio  $I^n$  da transformação  $\hat{R}^n(f)$  tende a zero quando  $n$  tende ao infinito.*

*Demonstração.* Suponhamos que exista  $\beta \in \mathcal{A}$  e  $c > 0$  tal que  $\lambda_\beta^n \geq c$  para todo  $n \geq 0$ . Seja  $n_i$  tal que  $\beta^{n_i} = \beta$ , a existência desses  $n_i$ 's é assegurada pela proposição anterior,

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha^{n_i}}^{n_i+1} &= \lambda_{\alpha^{n_i}}^{n_i} - \lambda_{\beta^{n_i}}^{n_i} \\ &= \lambda_{\alpha^{n_i}}^{n_i} - \lambda_\beta^{n_i} \\ &\leq \lambda_{\alpha^{n_i}}^{n_i} - c. \end{aligned}$$

Como o alfabeto  $\mathcal{A}$  é finito, seque que deve existir  $n_{i_k}$  tal que  $\alpha^{n_{i_k}} = \alpha$  para todo  $k$ , assim

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha^{n_{i_k}}}^{n_{i_k}+1} &\leq \lambda_{\alpha^{n_{i_k}}}^{n_{i_k}} - c, \text{ logo} \\ \lambda_\alpha^{n_{i_k}+1} &\leq \lambda_\alpha^{n_{i_k}} - c \\ &\leq \lambda_\alpha^{n_{i_1}} - kc. \end{aligned}$$

Isto contradiz o fato de que  $\lambda_\alpha^n > 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Antes de enunciarmos o próximo corolário, por simplicidade, denotamos

$$\Theta_{\pi^m, \lambda^m}^{*n} := \Theta^*(m, n) = \Theta_{\pi^m, \lambda^m} \dots \Theta_{\pi^{m+n-1}, \lambda^{m+n-1}}. \quad (3.15)$$

Além disso, é fácil ver que

$$\Theta^*(m, n) = \Theta^*(m, k)\Theta^*(m+k, n-k). \quad (3.16)$$

**Corolário 3.5.3.** *Para cada  $m \geq 0$  existe  $n \geq 1$  tal que  $\Theta_{\pi^m, \lambda^m}^{*n} > 0$ , isto é, todos os elementos da matriz são positivos.*

*Demonstração.* Dado  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ ,  $m \geq 0$ ,  $n \geq 1$  representamos por  $\Theta^*(\alpha, \beta, m, n)$  o elemento

na linha  $\alpha$  e coluna  $\beta$  da matriz  $\Theta_{\pi^m, \lambda^m}^{*n}$ . Pela definição 3.9 - 3.10,

$$\Theta^*(\alpha, \beta, m, n) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 1, & \text{se } (\alpha, \beta) = (\alpha^m, \beta^m) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} . \quad (3.17)$$

Afirmamos que  $\Theta^*(\alpha, \beta, m, n)$  é não decrescente em  $n$ .

De fato, como  $\Theta^*(m, n+1) = \Theta^*(m, n)\Theta^*(n+m, 1)$ . Então,

$$\begin{aligned} \Theta^*(\alpha, \beta, m, n+1) &= \sum_s \Theta^*(\alpha, s, m, n)\Theta^*(s, \beta, n+m, 1) \\ &\geq_{s=\beta} \Theta^*(\alpha, \beta, m, n)\Theta^*(\beta, \beta, n+m, 1) \\ &= \Theta^*(\alpha, \beta, m, n), \text{ por 3.17.} \end{aligned}$$

Seja  $\alpha \in \{1, \dots, d\}$  fixado. Vamos construir uma enumeração  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d$  de  $\mathcal{A}$  e inteiros  $n_1, n_2, \dots, n_d$  tal que

$$\Theta^*(\alpha, \gamma_i, m, n) > 0, \text{ para todo } n > n_i \text{ e } i = 1, 2, \dots, d. \quad (3.18)$$

É evidente que isto implica o corolário já que  $\beta$  deve ser um dos  $\gamma_i$ .

Para  $i = 1$  tome  $\gamma_1 = \alpha$  e  $n_1 = 0$  assim, pela afirmação anterior e por 3.17 temos

$$\Theta^*(\alpha, \gamma_1, m, n) = \Theta^*(\gamma_1, \gamma_i, m, n) \geq \Theta^*(\alpha, \gamma_i, m, 1) = 1 > 0$$

Sejam  $m_2 > m$  tal que  $\gamma_1 = \alpha^{m_2}$  e defina  $\gamma_2 = \beta^{m_2}$ . Notemos que  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , pois do contrário, teríamos ganhador e perdedor iguais. Além disso, também por 3.17, observemos que

$$\Theta^*(\gamma_1, \gamma_2, m_2, 1) = 1 > 0. \quad (3.19)$$

Por 3.16,  $\Theta^*(m, n) = \Theta^*(m, m_2 - m)\Theta^*(m_2, n + m - m_2)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \Theta^*(\gamma_1, \gamma_2, m, n) &= \sum_s \Theta^*(\gamma_1, s, m, m_2 - m)\Theta^*(s, \gamma_2, m_2, n + m - m_2) \\ &\geq_{s=\gamma_1} \Theta^*(\gamma_1, \gamma_1, m, m_2 - m)\Theta^*(\gamma_1, \gamma_2, m_2, n + m - m_2) \\ &\geq \Theta^*(\gamma_1, \gamma_1, m, m_2 - m)\Theta^*(\gamma_1, \gamma_2, m_2, 1) \\ &= \Theta^*(\gamma_1, \gamma_1, m, m_2 - m) > 0, \text{ para todo } n > m_2 - m. \end{aligned}$$

Assim, para  $i = 2$  tomemos  $n_2 = m_2 - m$ .

Sejam  $p_2 > m_2$  tal que  $\alpha^{p_2} \neq \gamma_1, \gamma_2$  e  $m_3 > p_2$  tal que  $\alpha^{m_3} = \gamma_j$ ,  $j = 1$  ou  $j = 2$ .

Consideremos o menor  $m_3$  e seja  $\gamma_3 = \beta^{m_3}$ . Notemos que  $\gamma_3 = \alpha^{m_3-1}$  e não é nem  $\gamma_1$  nem  $\gamma_2$ . Além disso,  $\Theta^*(\gamma_j, \gamma_3, m_3, n) = \Theta^*(\alpha^{m_3}, \beta^{m_3}, m_3, n) \geq \Theta^*(\alpha^{m_3}, \beta^{m_3}, m_3, 1) = 1 > 0$ .

Por 3.16,  $\Theta^*(m, n) = \Theta^*(m, m_3 - m)\Theta^*(m_3, n + m - m_3)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \Theta^*(\gamma_1, \gamma_3, m, n) &= \sum_s \Theta^*(\gamma_1, s, m, m_3 - m)\Theta^*(s, \gamma_3, m_3, n + m - m_3) \\ &\stackrel{s=\gamma_j}{\geq} \Theta^*(\gamma_1, \gamma_j, m, m_3 - m)\Theta^*(\gamma_j, \gamma_3, m_3, n + m - m_3) \\ &\geq \Theta^*(\gamma_1, \gamma_j, m, m_3 - m)\Theta^*(\gamma_j, \gamma_3, m_3, n) \\ &\geq \Theta^*(\gamma_1, \gamma_j, m, m_3 - m) > 0, \text{ para todo } n > m_3 - m. \end{aligned}$$

Assim, para  $i = 3$  tomemos  $n_3 = m_3 - m$ .

Agora, suponhamos que tenhamos construído  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathcal{A}$  e  $n_1, \dots, n_k$  tal que  $\Theta^*(\gamma_1, \gamma_k, m, n) > 0$ , para todo  $n > n_i, i \in \{1, \dots, k\}$ . Sejam  $p_k > m_k$  tal que  $\alpha^{p_k} \notin \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  e  $m_{k+1} > p_k$  tal que  $\alpha^{m_{k+1}} = \gamma_j$  para algum  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Escolhamos o menor  $m_k + 1$  e seja  $\gamma_{k+1} = \beta^{m_{k+1}}$ . Temos que  $\beta^{m_{k+1}} = \gamma_{k+1} \notin \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  e  $\alpha^{m_{k+1}-1} = \gamma_{k+1}$ .

Como  $\Theta^*(m, n) = \Theta^*(m, m_{k+1} - m) = \Theta^*(m_{k+1}, n + m - m_{k+1})$ . Então,

$$\begin{aligned} \Theta^*(\gamma_1, \gamma_{k+1}, m, n) &= \sum_s \Theta^*(\gamma_1, s, m, m_{k+1} - m)\Theta^*(s, \gamma_{m_{k+1}}, m_{k+1}, n + m - m_{k+1}) \\ &\stackrel{s=\gamma_j}{\geq} \Theta^*(\gamma_1, \gamma_j, m, m_{k+1} - m)\Theta^*(\gamma_j, \gamma_{m_{k+1}}, m_{k+1}, n + m - m_{k+1}) \\ &\geq \Theta^*(\gamma_1, \gamma_j, m, m_{k+1} - m)\Theta^*(\gamma_j, \gamma_{m_{k+1}}, m_{k+1}, 1) \\ &= \Theta^*(\gamma_1, \gamma_j, m, m_{k+1} - m)\Theta^*(\alpha^{m_{k+1}}, \beta^{m_{k+1}}, m_{k+1}, 1) \\ &\geq \Theta^*(\gamma_1, \gamma_j, m, m_{k+1} - m) > 0, \text{ para todo } n > m_{k+1} - m. \end{aligned}$$

Assim, para  $i = k + 1$  tomemos  $n_{k+1} = m_{k+1} - m$ . Isso completa a prova da indução e, assim, finalizamos a prova do corolário.  $\square$

**Corolário 3.5.4.** Se  $(\pi^n, \lambda^n) = \hat{R}^n(\pi, \lambda)$  está definida para todo  $n \geq 1$  então,  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a condição de Keane.

*Demonstração.* Suponhamos que para algum  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  e  $m \geq 1$ ,

$$f^{m-1}(\partial f(I_\alpha)) = \partial I_\beta, \quad \partial f(I_\alpha) > 0. \quad (3.20)$$

Escolha  $m$  acima minimal. Da definição de  $f_n = \hat{R}^n(f)$  temos

$$\partial f(I_\alpha) = \partial f_n(I_\alpha^n) \text{ e } \partial I_\beta = \partial I_\beta^n, \quad (3.21)$$

para todo  $n$  tal que  $\partial f(I_\alpha)$  e  $\partial I_\beta$  pertencem ao domínio  $I^n$ . Tomemos  $n$  o máximo tal que

$\partial f(I_\alpha)$ ,  $\partial I_\beta \in I^n$ . Como  $f_n$  é a aplicação de primeiro retorno de  $f$  a  $I_n$ , temos

$$f^{m-1}(\partial f(I_\alpha)) = \partial I_\beta \text{ logo, } f^{m-1}(\partial f_n(I_\alpha^n)) = \partial I_\beta^n.$$

Isto implica

$$f_n^k(\partial f_n(I_\alpha^n)) = \partial I_\beta^n, \text{ para algum } k \leq m - 1. \quad (3.22)$$

Além disso,  $I_\beta^m$  ou  $f_n(I_\alpha^n)$  ou ambos são intervalos da extremidade direita da partição de  $I^n$ . Se  $\partial f(I_\alpha) = \partial I_\beta$  ( $m = 1$ ) então  $f_n(I_\alpha^n) = I_\beta^m$ , isto é, os dois intervalos da extremidade direita de  $f_n$  possuem o mesmo comprimento. Isso implica que a função  $f_{n+1} = \hat{R}^{n+1}(f)$  não está definida, o que contradiz a hipótese. Suponha que  $f_n$  tenha tipo 0, ou seja,  $\partial I_\beta < \partial f(I_\alpha)$  Por definição,  $f_{n+1}(I_\alpha^{n+1}) = f_n^2(I_\alpha^n)$ . Então,

$$f_{n+1}(\partial I_\alpha^{n+1}) = f_n^2(\partial I_\alpha^n) = f_n(f_n(\partial I_\alpha^n)) = f_n(\partial f_n(I_\alpha^n)) = f_n(\partial f(I_\alpha)),$$

onde esta última igualdade decorre de 3.21. Além disso,

$$\partial I_\beta^{n+1} = \partial I_\beta^n = \partial I_\beta.$$

Assim, comparando com 3.22, temos

$$f_n^{k-1}(\partial f_{n+1}(I_\alpha^{n+1})) = f_n^{k-1}(\partial f_n^2(I_\alpha^n)) = f_n^k(\partial f_n(I_\alpha^n)) = \partial I_\beta^n = \partial I_\beta^{n+1}.$$

Ora,  $f_{n+1}$  é a aplicação de primeiro retorno de  $f_n$  a  $I^{n+1}$ . Então,

$$f_{n+1}^{l-1}(\partial f_{n+1}(I_\alpha^{n+1})) = \partial I_\beta^{n+1}, \text{ para algum } l \leq k \leq m - 1. \quad (3.23)$$

Se  $f_n$  tiver tipo 1, isto é,  $\partial I_\beta > \partial f(I_\alpha)$ . Por definição,

$$\partial f_{n+1}(I_\alpha^{n+1}) = \partial f_n(I_\alpha^{n+1}) = f_n(\partial I_\alpha^{n+1}) = f_n(\partial I_\alpha^n) = \partial f_n(I_\alpha^n) = \partial f(I_\alpha)$$

$$\text{e } \partial I_\beta^{n+1} = f_n^{-1}(\partial I_\beta^n) = f_n^{-1}(\partial I_\beta).$$

Além disso, comparando com 3.22, temos

$$f_n^{k-1}(\partial f_n(I_\alpha^{n+1})) = f_n^{k-1}(\partial f(I_\alpha)) = f_n^{-1}(f_n^k(\partial f(I_\alpha))) = f_n^{-1}(\partial I_\beta^n) = f_n^{-1}(\partial I_\beta) = \partial I_\beta^{n+1}.$$

Sabemos que  $f_{n+1}$  é a aplicação de primeiro retorno de  $f_n$  a  $I^{n+1}$ . Então,

$$f_{n+1}^{l-1}(\partial f_n(I_\alpha^{n+1})) = \partial I_\beta^{n+1}, \text{ para algum } l \leq k \leq m - 1. \quad (3.24)$$

Em ambos os casos mostramos que 3.20 implica 3.23 ou 3.24, onde  $f$  é substituída por  $f_{n+1}$  e  $m \geq 2$  é substituído por um  $l$  menor. Interando o processo, devemos retornar em algum momento a  $m = 1$ , já tratado na primeira parte. Assim, finalizamos a prova.  $\square$

### 3.6 Classes de Rauzy

Dados dois pares  $\pi$  e  $\pi^1$ , dizemos que  $\pi^1$  é um *sucessor* de  $\pi$  se existem  $\lambda, \lambda^1 \in \mathbb{R}_+^d$  tal que  $\hat{R}(\pi, \lambda) = (\pi^1, \lambda^1)$ . Cada par  $\pi$  tem exatamente dois sucessores, um correspondendo ao tipo 0 e outro ao tipo 1. Similarmente, cada  $\pi^1$  é o sucessor de exatamente dois pares  $\pi$ .

Note que  $\pi$  é irredutível se, e somente se,  $\pi^1$  é irredutível. Assim, esta relação define uma ordem parcial no conjunto dos pares irredutíveis o qual representamos por um grafo  $G$ . As componentes conexas desse grafo é o que chamamos de *classes de Rauzy*.

**Lema 3.6.1.** *Se  $\pi$  e  $\pi^1$  são da mesma classes de Rauzy, então existe um caminho orientado em  $G$  iniciando em  $\pi$  e terminando em  $\pi^1$ .*

*Demonstração.* Seja  $A(\pi)$  o conjunto de todos os pares  $\pi'$  que podem ser atingidos por um caminho orientado começando em  $\pi$ . Já sabemos que em cada vértice do grafo  $G$  tem exatamente duas flechas saindo e duas chegando. Por definição, toda flecha iniciando em algum vértice de  $A(\pi)$  deve terminar em algum vértice de  $A(\pi)$ . Além disso, todo lado iniciando terminando em algum vértice de  $A(\pi)$  deve iniciar em algum vértice de  $A(\pi)$ . De fato, seja  $\pi' \in A(\pi)$ . Então, existem  $\pi^0$  e  $\pi^1$  tal que  $\pi'$  é sucessor tipo 0 de  $\pi^0$  e tipo 1 de  $\pi^1$ . Seja, por exemplo,

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha(1) & \alpha_{k+1}^0 & \cdots & \alpha(0) \\ \alpha_1^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha(1) \end{pmatrix}.$$

Consideremos a construção da figura 3.7. Assim, existe um caminho orientado começando em  $\pi'$  e terminando em  $\pi^1$ . Daí, segue que  $\pi^1 \in A(\pi)$ . De modo análogo, podemos mostrar que  $\pi^0 \in A(\pi)$ . Com isso, provamos que  $A(\pi)$  é uma componente conexa de  $G$  e assim coincide com a classe de Rauzy  $C(\pi)$ .  $\square$

Veremos, a seguir, as classes de Rauzy para os quatro primeiros valores de  $d$ . Para  $d = 2$  existem duas possibilidades de permutações, mas só uma é irredutível:  $(2, 1)$ . O grafo de Rauzy reduzido é dado pela figura 3.8.

$$\begin{array}{c}
 \pi^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha(1) & \alpha_{k+1}^0 & \cdots & \cdots & \alpha(0) \\ \alpha_1^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha(1) \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xleftarrow{1} \quad \cdots \quad \xleftarrow{1} \quad \cdots \\ \\ \uparrow 1 \end{array} \\
 \downarrow 1 \\
 \pi' = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha(1) & \alpha(0) & \alpha_{k+1}^0 & \cdots & \alpha_{d-1}^0 \\ \alpha_1^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha(1) \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \pi'' = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha(1) & \alpha_{d-1}^0 & \alpha(0) & \cdots & \alpha_{d-2}^0 \\ \alpha_1^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha(1) \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Figura 3.7:

$$0 \circlearrowleft \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \circlearrowright 1$$

Figura 3.8: Classe de Rauzy para d=2

Para  $d = 3$  existem seis possibilidades de permutações, mas apenas três são irreduzíveis:  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$ ,  $(3, 2, 1)$ . Elas estão representada numa única classe de Rauzy. Vejamos a figura abaixo,

$$1 \circlearrowleft \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{0} \end{array} \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{1} \end{array} \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} \circlearrowright 0$$

Figura 3.9: Classe de Rauzy para d=3

Para  $d = 4$  existem 24 possibilidades de permutações, mas apenas 13 são irreduzíveis:

$$\begin{aligned}
 &(4, 3, 2, 1), (4, 1, 3, 2), (3, 1, 4, 2), (4, 2, 1, 3), (2, 4, 3, 1), \\
 &(3, 2, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (4, 2, 3, 1), (4, 1, 2, 3), \\
 &(4, 3, 1, 2), (3, 4, 1, 2), (2, 3, 4, 1), (3, 4, 2, 1).
 \end{aligned}$$

Elas estão separadas em duas classes de Rauzy. A figura 3.10 contém os sete primeiros valores de monodromia invariante.

A figura 3.11 contém os outros seis valores de monodromia. Observemos que todos estes grafos são simétricos em relação ao eixo vertical, esta simetria corresponde à mudança nos papéis de  $\pi_0$  e  $\pi_1$ . No grafo representado na figura abaixo notemos que pares opostos em relação ao centro tem a mesma monodromia invariante, logo correspondem



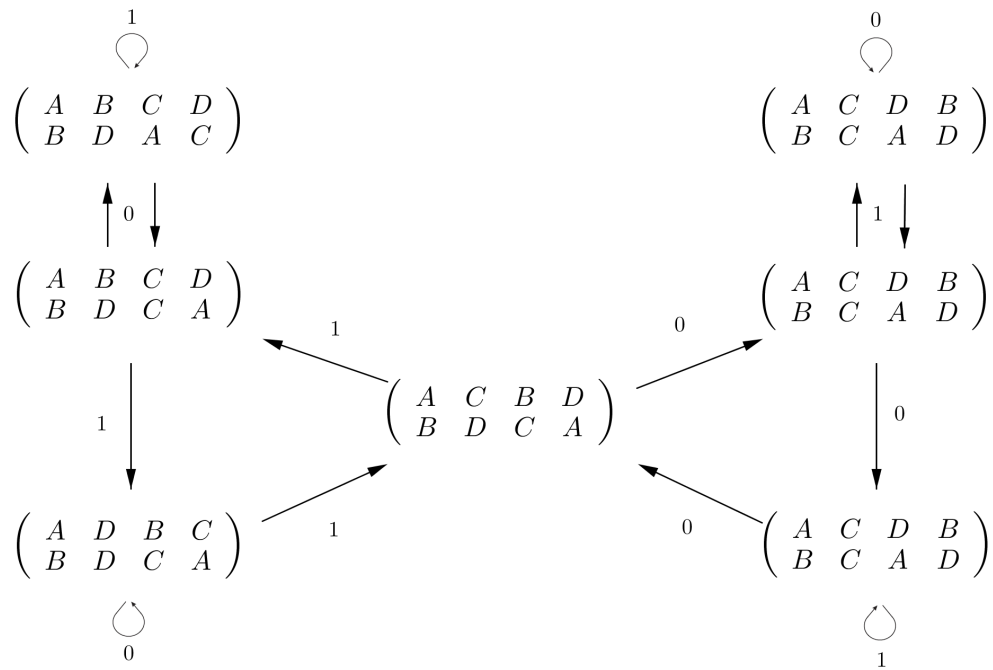


Figura 3.10: Classe de Rauzy para  $d=4$

a mesma transformação de intercâmbio de intervalos. Fazendo a identificação desses pares, podemos escrever a classe de Rauzy reduzida, como pode ser visto na figura 3.12.

### 3.6.1 Pares Standard

**Definição 3.6.2.** Um par  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  é chamado *standard* se o último símbolo em cada linha coincide com o primeiro símbolo na outra linha. Ou seja, se a monodromia invariante satisfaz:

$$\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(1) = d \text{ e } \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(d) = 1.$$

Analisando os exemplos de classes de Rauzy, dados na seção anterior, podemos ver que todas estas possuem algum par standard. Além disso, observe que o operador de Rauzy-Veech mantém os primeiros símbolos  $\alpha_1^\epsilon = \pi_\epsilon^{-1}(1)$ ,  $\epsilon \in \{0, 1\}$  inalterados em toda classe de Rauzy  $C(\pi)$ .

**Proposição 3.6.3.** Toda classe de Rauzy contém algum par standard.

A prova dessa proposição é baseada no lema que afirmamos abaixo.

**Lema 3.6.4.** Dado qualquer  $\epsilon \in \{0, 1\}$  e qualquer  $\beta \in \mathcal{A}$  tal que  $\pi_\epsilon(\beta) \neq 1$ , existe algum par  $\pi'$  na classe de Rauzy  $C(\pi)$  tal que  $\pi'_\epsilon(\beta) = d$ , isto é,  $\beta$  é o último símbolo da linha  $\epsilon$  de  $\pi'$ .

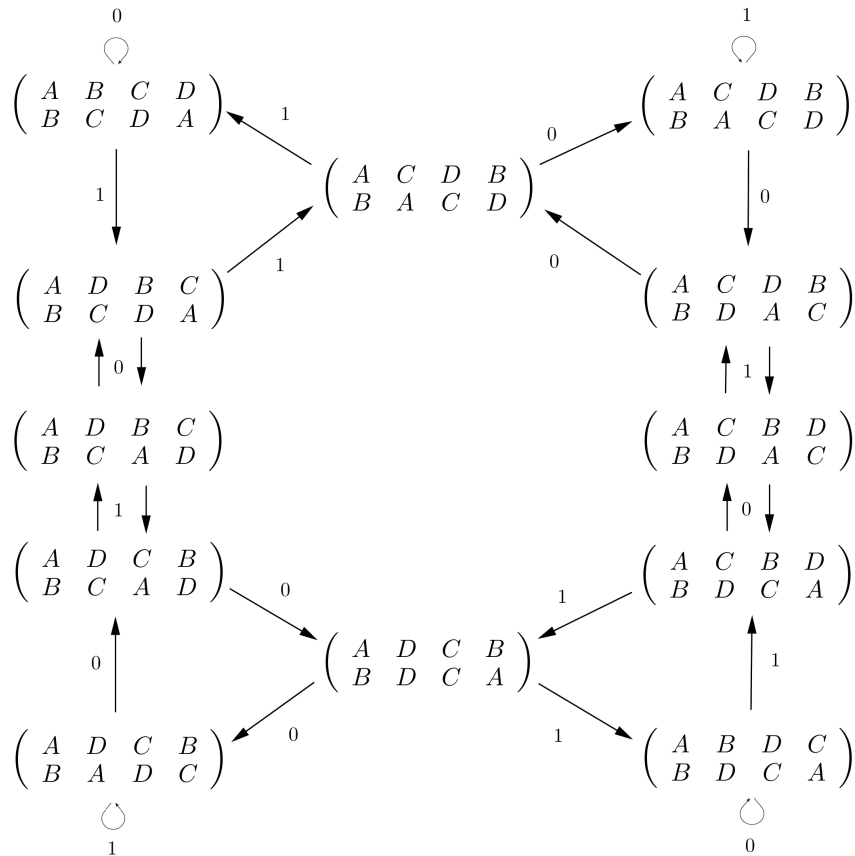


Figura 3.11: Classe de Rauzy para  $d=4$

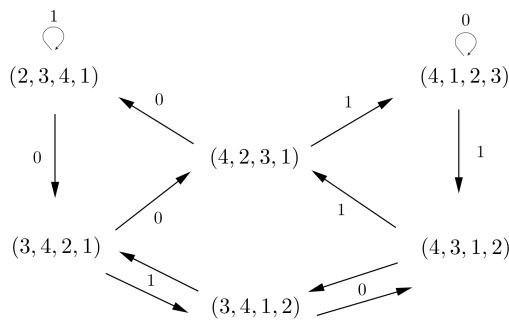


Figura 3.12: Classe de Rauzy reduzida

*Demonstração.* Para cada  $\epsilon \in \{0, 1\}$ , seja  $\mathcal{A}_\epsilon = \{\beta \in \mathcal{A}; \pi'_\epsilon(\beta) < d, \forall \pi' \in C(\pi)\}$ . Pela observação anterior,  $\alpha_1^\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon$ . Seja  $k(\epsilon) = \max\{\pi'_\epsilon(\beta); \pi' \in C(\pi) \text{ e } \beta \in \mathcal{A}_\epsilon\}$ . Por definição,  $k(\epsilon) < d$ . Queremos mostrar que  $k(\epsilon) = 1$  e assim  $\mathcal{A}_\epsilon = \{\alpha_1^\epsilon\}$ , para  $\epsilon \in \{0, 1\}$ .

Fixemos algum  $\beta_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon$  tal que o máximo seja atingido. Assim, existe  $\tilde{\pi} \in C(\pi)$  tal que  $\tilde{\pi}_\epsilon(\beta_\epsilon) = k(\epsilon)$  logo,  $\pi'_\epsilon(\beta_\epsilon) = k(\epsilon)$ , para todo  $\pi'$  sucessor de  $\tilde{\pi}$ . Pelo lema 3.6.1

conseguimos um caminho em  $C(\pi)$  começando em  $\pi$  e terminando em  $\pi'$ , para todo  $\pi'$  em  $C(\pi)$ . Então,  $\pi'_\epsilon(\beta_\epsilon) = k(\epsilon)$ , para todo  $\pi'$  em  $C(\pi)$ . Como consequência, os elementos à esquerda de  $\beta_\epsilon$  permanecem constantes na classe de Rauzy. Pois os símbolos  $\gamma$ , com  $\pi_\epsilon(\gamma) < d$ , só podem mover-se para direita, mas isto contradiz a definição de  $k(\epsilon)$ . Assim,

$$(\pi'_\epsilon)^{-1}(i) = \pi_\epsilon^{-1}(i) \text{ para todo } 1 \leq i \leq k(\epsilon). \quad (3.25)$$

Em particular, nenhum símbolo à esquerda de  $\beta_\epsilon$  na linha  $\epsilon$  pode chegar na última posição na linha  $1 - \epsilon$  :

$$\pi_\epsilon(\alpha) < k(\epsilon) \implies \pi'_{1-\epsilon}(\alpha) < d \implies \alpha \in \mathcal{A}_{1-\epsilon} \implies \pi'_{1-\epsilon} \leq k(1 - \epsilon), \quad \forall \pi \in C(\pi). \quad (3.26)$$

Escrevemos

$$\pi' = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{k(0)}^0 & \cdots & \cdots & \alpha_d^0 \\ \alpha_1^1 & \cdots & \cdots & \alpha_{k(1)} & \cdots & \alpha_d^1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1^\epsilon = (\pi'_\epsilon)^{-1}(i).$$

De 3.25 e 3.26 segue que  $\alpha \in \mathcal{A}_\epsilon \setminus \{\beta_\epsilon\}$  e  $\mathcal{A}_\epsilon \setminus \{\beta_\epsilon\} \subset \mathcal{A}_{1-\epsilon}$ . Logo

$$\{\alpha_1^\epsilon, \dots, \alpha_{k(\epsilon)-1}^\epsilon\} \subset \{\alpha_1^{1-\epsilon}, \dots, \alpha_{k(1-\epsilon)}^{1-\epsilon}\}, \quad \forall \epsilon \in \{0, 1\}. \quad (3.27)$$

Daí, segue que  $k(\epsilon) - 1 \leq k(1 - \epsilon)$ . Trocando  $\epsilon$  por  $1 - \epsilon$ , temos

$$\{\alpha_1^{1-\epsilon}, \dots, \alpha_{k(1-\epsilon)-1}^{1-\epsilon}\} \subset \{\alpha_1^\epsilon, \dots, \alpha_{k(\epsilon)}^\epsilon\}, \quad \forall \epsilon \in \{0, 1\}.$$

Assim,  $k(1 - \epsilon) - 1 \leq k(\epsilon) \Leftrightarrow k(1 - \epsilon) \leq k(\epsilon) + 1$ . Portanto,  $|k(1 - \epsilon) - k(\epsilon)| \leq 1$ .

Existem quatro possibilidades:

- i.  $k(0) = k(1) + 1$  : então o caso  $\epsilon = 0$  em 3.27 implica que  $\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{k(1)}^0\} = \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k(1)}^1\}$ , e isto contradiz a irreduzibilidade de  $\pi'$ ;
- ii.  $k(0) = k(1) - 1$  : análogo ao caso anterior, usando  $\epsilon = 1$ .  $\{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k(1)-1}^1\} = \{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{k(0)}^0\}$ ;
- iii.  $k(0) = k(1)$ , tomando  $\epsilon = 0$ , temos:  $\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{k(1)-1}^0\} \subset \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k(1)}^1\}$  assim,  $\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{k(1)-1}^0\} = \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k(1)-1}^1\}$ , também contradiz a irreduzibilidade, a menos que  $k(0) = k(1) = 1$ .
- iv.  $k(0) = k(1)$  e existe  $1 \leq i < k(0)$  tal que  $\alpha_i^0 = \alpha_{k(1)}$  : tomando  $\epsilon = 1$  em 3.27 temos

$$\{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k(1)-1}^1\} \subset \{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{k(1)}^1, \dots, \alpha_{k(0)}^0\},$$

logo,

$$\{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k(1)-1}^1\} = \{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{k(1)}^1, \dots, \alpha_{k(0)}^0\} \setminus \{\alpha_{k(1)}^1\}.$$

Daí, segue que,

$$\{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k(1)-1}^1, \alpha_{k(1)}^1\} = \{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{k(1)}^1, \dots, \alpha_{k(0)}^0\} \setminus \{\alpha_{k(1)}^1\} \cup \{\alpha_{k(1)}^1\}.$$

$\Updownarrow$

$$\{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k(1)}^1\} = \{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{k(0)}^0\}.$$

Isso implica que existe  $1 \leq j < k(1)$  tal que  $\alpha_j^1 = \alpha_{k(0)}^0$ . Mais uma vez, isto contradiz a irredutibilidade. Com isso, completamos a prova do lema. □

Prova da proposição 3.6.3:

*Demonstração.* Pela observação feita anteriormente, os primeiros símbolos  $\alpha_1^\epsilon$  em ambas as linhas permanecem inalterados sob a interação de Rauzy-Veech. Por irredutibilidade eles são necessariamente distintos. Então, usando o lema 3.6.4, podemos encontrar um par  $\pi'$  em  $C(\pi)$  tal que  $\pi'_0(\alpha_1^1) = d$ , ou seja, o último símbolo da primeira linha coincide com o primeiro da última linha. Agora, iterando  $\pi'$  sob a aplicação de Rauzy-Veech tipo 0, mantemos a primeira linha inalterada, enquanto deslocamos os símbolos da linha  $\pi_1$ , uma casa para direita, exceto  $\alpha_1^1$ . Assim, encontraremos um par  $\pi''$  que satisfaz  $\pi''_1(\alpha_1^0) = d$ . Logo,  $\pi''$  é standard. □

### 3.6.2 Renormalização de Rauzy-Veech

Sejam  $\pi$  e  $\pi'$  pares irredutíveis tal que  $\pi'$  é o tipo  $\epsilon$  sucessor de  $\pi$ , para  $\epsilon \in \{0, 1\}$ . Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$  satisfazendo

$$\lambda_{\alpha(\epsilon)} > \lambda_{\alpha(1-\epsilon)}, \text{ temos} \tag{3.28}$$

$$\hat{R}(\pi, \lambda) = (\pi', \lambda'), \text{ com } \lambda'_\alpha = \begin{cases} \lambda_\alpha, & \text{se } \alpha \neq \alpha(\epsilon) \\ \lambda_{\alpha(\epsilon)} - \lambda_{\alpha(1-\epsilon)}, & \text{se } \alpha = \alpha(\epsilon) \end{cases}.$$

A aplicação  $\lambda \mapsto \lambda'$  é uma bijeção que vai do conjunto de vetores satisfazendo 3.28 sobre todo  $\mathbb{R}_+^d$ . O inverso é dado por

$$\lambda_\alpha = \begin{cases} \lambda'_\alpha, & \text{se } \alpha \neq \alpha(\epsilon) \\ \lambda'_{\alpha(\epsilon)} + \lambda'_{\alpha(1-\epsilon)}, & \text{se } \alpha = \alpha(\epsilon) \end{cases}.$$

Tomemos o intervalo  $I$  de comprimento unitário, isto é,  $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha = 1$ . A indução  $\hat{R}(f)$  esta definida num intervalo menor, de comprimento  $1 - \lambda_{\alpha(\epsilon)}$ , mas se fizermos um redimensionamento adequado podemos ver a aplicação  $\hat{R}(f)$  no intervalo unitário. Esta aplicação é chamada de *função Renormalização de Rauzy-Veech* e definimos por

$$R : (\pi, \lambda) \mapsto (\pi', \lambda''), \text{ onde } \lambda'' = \frac{\lambda'}{1 - \lambda_{\alpha(1-\epsilon)}}.$$

### 3.6.3 Transformações de Zorich

Sejam  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  um vértice de  $C$ , onde  $C$  é uma classe de Rauzy e  $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$  satisfazendo a condição de Keane. Seja  $\epsilon \in \{0, 1\}$  o tipo de  $(\pi, \lambda)$  e para cada  $j \geq 1$ , seja  $\epsilon^j$  o tipo do iterado  $\hat{R}^j(\pi, \lambda)$ . Se considerarmos  $n = n(\pi, \lambda) \geq 1$  o menor inteiro tal que  $\epsilon^j \neq \epsilon$ . Definimos a aplicação *indução de Zorich* por

$$\hat{Z}(\pi, \lambda) = \hat{R}^n(\pi, \lambda).$$

A *renormalização de Zorich* é definida como  $Z(\pi, \lambda) = R^n(\pi, \lambda)$ .

### 3.6.4 Algoritmo acelerado de Zorich

Seja  $f$  uma transformação de intercâmbio de intervalos que satisfaz a propriedade de Keane,  $f^n, \gamma^n, \Theta^{*n}$  os dados gerados pela iteração do operador básico, onde  $\gamma^n$  é a letra ganhadora no nível  $n$ . Seja também  $1 \leq D < d$ . Definimos indutivamente uma sequência crescente  $n_D(m) = n_D(m, f)$  onde, por definição,  $n_D(0) = 0$  e  $n_D(m + 1)$  é o maior inteiro tal que não mais do que  $D$  símbolos são tomados por  $\gamma^n$ , para  $n_D(m) < n \leq n_D(m + 1)$ . A sequência está bem definida por causa da proposição 1.2.3 em [8]. Obviamente, para  $1 < D < d$ ,  $(n_D(m))_{m \geq 0}$  é uma subsequência de  $(n_{D-1}(n))_{n \geq 0}$ . Definimos para  $m > 0$ ,

$$Z_{(D)}(m) = \Theta^{*(n_D(m-1)+1)} \dots \Theta^{*(n_D(m))}.$$

O caso,  $D = 1$  coincide com a Renormalização de Zorich. Por outro lado, estaremos interessados no caso  $D = d - 1$ . Quando o contexto estiver claro iremos simplesmente escrever  $Z(m)$  para  $Z_{(d-1)}(m)$  e  $f^m$  para  $f^{(n_{(d-1)}(m))}$ ,  $\lambda^m$  para o dado métrico. Com esta notação, temos

$$\lambda^m = Z(m + 1)\lambda^{m+1}.$$

Vamos também definir, para  $m < n$ ,

$$Q(m, n) = Z(m + 1) \cdots Z(n),$$

de modo a obter

$$\lambda^m = Q(m, n)\lambda^n.$$

Também vamos escrever  $Q(n)$  para  $Q(0, n)$ . Os coeficientes  $Q_{\alpha\beta}(m, n)$  tem a seguinte interpretação. Seja  $I^m = \bigcup_{\beta \in \mathcal{A}} I_\beta^m$  o domínio de  $f^m$ . Para  $n \geq m$ , temos  $I^n \subset I^m$  e  $f^n$  é a aplicação de primeiro retorno de  $f^m$  em  $I^n$ . Então o inteiro não negativo  $Q_{\alpha\beta}(m, n)$  é o tempo gasto em  $I_\alpha^m$  por algum ponto de  $I_\beta^n$  até seu retorno a  $I^n$ .

Além disso,

$$Q_\beta(m, n) := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} Q_{\alpha\beta}(m, n)$$

é o tempo de retorno em  $I^n$  para pontos em  $I_\beta^n$ .

**Exemplo 3.6.5.** *Seja  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$  e consideremos  $D = 3$  no algoritmo acelerado de Zorich. Para uma transformação de intercâmbio de intervalos cuja sequência de Rauzy é dada pela figura 3.13, temos que os primeiros termos da sequência crescente  $n_3(m)$  são*

$$n_3(0) := 0; n_3(1) = 18; n_3(2) = 27; n_3(3) = 36 \dots$$

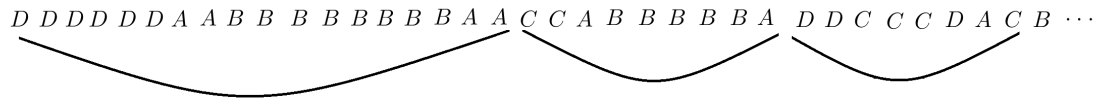


Figura 3.13: Sequência de Rauzy

**Lema 3.6.6.** ([8] Lema 1.2.4). *Seja  $f$  satisfazendo a condição de Keane. Assuma que*

$$n \geq \begin{cases} m + 2d - 3, & \text{se } d \geq 3 \\ m + 2, & \text{se } d = 2 \end{cases}.$$

*Então, para todo  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ , temos  $Q_{\alpha\beta}(m, n) > 0$ .*

*Demonstração.* Substituindo  $f$  por  $f^m$ , é suficiente considerar o caso  $m = 0$ . Para  $r \geq 0$ , seja

$$Q(r) = \Theta^{*(1)} \dots \Theta^{*(r)}.$$

Como os termos da diagonal principal das matrizes  $\Theta^*$  são iguais a 1 temos que

$$Q_{\alpha\beta}(r) > 0 \Rightarrow Q_{\alpha\beta}(r+1) > 0.$$

De fato,  $Q(r+1) = Q(r)\Theta^{*(r+1)}$  implica

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta}(r+1) &= \sum_{\gamma} Q_{\alpha\gamma}(r)\Theta_{\gamma\beta}^{*(r+1)} \\ &\stackrel{\gamma=\beta}{\geq} Q_{\alpha\beta}(r)\Theta_{\beta\beta}^{*(r+1)} \\ &= Q_{\alpha\beta}(r) > 0. \end{aligned}$$

Fixemos  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ . Vamos construir uma sequência de índices distintos  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_s = \beta$  e inteiros  $0 = r_1 < r_2 < \dots < r_s$  tais que

$$Q_{\alpha_1\alpha_j}(r) > 0, \text{ para } r \geq r_j.$$

Notemos que  $Q_{\alpha_1\alpha_j}(r) \geq Q_{\alpha_1\alpha_j}(r_1) > 0$ . Se  $\alpha = \beta$ ,

$$Q_{\alpha\beta}(1) = Q_{\alpha\alpha}(1) = 1 > 0, \text{ então}$$

$$Q_{\alpha\beta}(r) \geq Q_{\alpha\beta}(1) > 0.$$

Suponhamos  $\alpha \neq \beta$  e definamos  $r_2 = \min \{n \geq 0; \gamma^n = \alpha_1\}$ , isto é,  $r_2$  é o primeiro tempo que  $\alpha_1$  ganha. E seja  $\alpha_2$  o perdedor no tempo  $r_2$ , logo  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .

Temos que

$$\Theta^{*(r_2)} = Id + E_{\alpha_1\alpha_2} \text{ implica } \Theta_{\alpha_1\alpha_2}^{*(r_2)} = 1 > 0.$$

Como  $Q(r_2) = Q(r_2 - 1)\Theta^{*(r_2)}$ , então

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_1\alpha_2}(r_2) &= \sum_{\gamma} Q_{\alpha_1\gamma}(r_2 - 1)\Theta_{\gamma\alpha_2}^{*(r_2)} \\ &\stackrel{\gamma=\alpha_1}{\geq} Q_{\alpha_1\alpha_1}(r_2 - 1)\Theta_{\alpha_1\alpha_2}^{*(r_2)} \\ &= Q_{\alpha_1\alpha_1}(r_2 - 1) \\ &\geq Q_{\alpha_1\alpha_1}(1) > 0. \end{aligned}$$

Sejam  $r'_2 = \min \{n > r_2; \gamma^{r'_2} \notin \{\alpha_1, \alpha_2\}\}$ ,  $r_3 = \min \{n > r'_2; \gamma^{r_3} \in \{\alpha_1, \alpha_2\}\}$  e  $\alpha_3$  a letra perdedora em  $r_3$ . Então  $\gamma^{r_3-1} = \alpha_3$  e, portanto  $\alpha_3 \notin \{\alpha_1, \alpha_2\}$ .

Temos que

$$\Theta^{*(r_3)} = Id + E_{\gamma^{r_3}\alpha_3} \text{ implica } \Theta_{\gamma^{r_3}\alpha_3}^{*(r_3)} = 1 > 0.$$

Vimos que  $\gamma^{r_3} \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$ , então  $\gamma^{r_3} = \alpha_l$ ,  $1 \leq l \leq 2$ .

Como  $Q(r_3) = Q(r_3 - 1)\Theta^{*(r_3)}$ , então

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_1, \alpha_3}(r_3) &= \sum_{\gamma} Q_{\alpha_1 \gamma}(r_3 - 1)\Theta_{\gamma \alpha_3}^{*(r_3)} \\ &\stackrel{\gamma = \alpha_l}{\geq} Q_{\alpha_1 \alpha_l}(r_3 - 1)\Theta_{\alpha_l \alpha_3}^{*(r_3)} \\ &= Q_{\alpha_1 \alpha_l}(r_3 - 1) \\ &\geq Q_{\alpha_1 \alpha_l}(r_l), \text{ pois } r_3 - 1 \geq r_l \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $Q_{\alpha_1 \alpha_l}(r) > 0$  para  $r \geq r_l$ .

Assumamos que tenhamos construído  $\alpha_1, \dots, \alpha_j, r_1, \dots, r_j$ , com  $\beta \neq \alpha_l$  para  $1 \leq l \leq j$ . Sejam  $r'_j = \min\{n > r_j; \gamma^{r'_j} \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}\}$ ,  $r_{j+1} = \min\{n > r'_j; \gamma^{r_{j+1}} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}\}$  e  $\alpha_{j+1}$  a letra perdedora em  $r_j + 1$ . Então  $\gamma^{r_{j+1}-1} = \alpha_{j+1}$  e, portanto  $\alpha_{j+1} \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}$ . Temos que

$$\Theta^{*(r_{j+1})} = Id + E_{\gamma^{r_{j+1}} \alpha_j} \text{ implica } \Theta_{\gamma^{r_{j+1}} \alpha_{j+1}}^{*(r_{j+1})} = 1 > 0.$$

Vimos que  $\gamma^{r_{j+1}} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}$ , então  $\gamma^{r_{j+1}} = \alpha_l$ ,  $1 \leq l \leq j$ .

Como,  $Q(r_{j+1}) = Q(r_{j+1} - 1)\Theta^{*(r_{j+1})}$ , então

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_1 \alpha_{j+1}}(r_{j+1}) &= \sum_{\gamma} Q_{\alpha_1 \gamma}(r_{j+1} - 1)\Theta_{\gamma \alpha_{j+1}}^{*(r_{j+1})} \\ &\stackrel{\gamma = \alpha_l}{\geq} Q_{\alpha_1 \alpha_l}(r_{j+1} - 1)\Theta_{\alpha_l \alpha_{j+1}}^{*(r_{j+1})} \\ &= Q_{\alpha_1 \alpha_l}(r_{j+1} - 1) \\ &= Q_{\alpha_1 \alpha_l}(r_l), \text{ pois } r_{j+1} - 1 \geq r_l \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $Q_{\alpha_1 \alpha_l}(r) > 0$ , para  $r \geq r_{j+1}$ . Em algum momento iremos obter  $\alpha_s = \beta$ . Resta ver como muitos passos do acelerado de Zorich (com  $D = d - 1$ ) são necessários para atingir  $r_s$ .

Vimos que  $Q_{\alpha_1 \alpha_j}(r_j) > 0$ .

Para  $j = 2$ ,  $r_2 \leq n_{d-1}(1) + 1$ . De fato,  $Q_{\alpha_1 \alpha_2}(r_2) > 0$ , então  $\gamma^n = \alpha_1$  para  $0 \leq n \leq n_{d-1}(1) + 1$  pois em  $n_{d-1}(1) + 1$  todas as letras ganharam. Pela escolha de  $\alpha_2$  temos que

$$Q_{\alpha_1 \alpha_2}(n_{d-1}(1) + 1) > 0,$$

logo

$$r_2 \leq n_{d-1}(1) + 1.$$



Para  $j = 3$ ,  $r'_2 \leq n_{d-1}(2)$ . De fato, por definição de  $n_{d-1}(2)$  temos que  $\gamma^n = \alpha_1$  ou  $\gamma^n = \alpha_2$  para  $n_{d-1}(1) < n \leq n_{d-1}(2)$ . Logo,

$$r'_2 \leq n_{d-1}(2).$$

Além disso,  $r_3 \leq n_{d-1}(3)$ . De fato, pela definição de  $n_{d-1}(3)$  temos  $\gamma^n = \alpha_1$  ou  $\gamma^n = \alpha_1$  para  $n_{d-1}(1) < n \leq n_{d-1}(3)$ . Logo,

$$r_3 \leq n_{d-1}(3).$$

Portanto, para  $2 \leq j < d - 1$ , temos

$$r'_j \leq n_{d-1}(2j - 2),$$

$$r_{j+1} \leq n_{d-1}(2j - 1).$$

Por fim, quando  $s = d > 2$ , temos

$$r_d \leq n_{d-1}(2d - 3).$$

□

Por conveniência vamos reescrever o lema acima para a seguinte forma: *Seja  $f$  satisfazendo a condição de Keane. Então existe um inteiro  $m(d) > 0$  tal que para  $n \geq m + m(d)$ ,  $Q_{\alpha\beta}(m, n) > 0$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ .*

**Afirmção 3.6.7.** *Desde que  $Q(n) = Q(m)Q(m, n)$ , temos para todo  $n \geq m + m(d)$*

$$\min_{\beta \in \mathcal{A}} Q_{\beta}(n) \geq \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_{\beta}(m). \quad (3.29)$$

*Demonstração.* Pelo lema acima, para todo  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ ,  $Q_{\alpha\beta}(m, n) > 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma} Q_{\gamma}(m) &\leq \sum_{\gamma} \sum_{\alpha} Q_{\alpha\gamma}(m) \\ &\leq \sum_{\alpha, \gamma} Q_{\alpha\gamma}(m) Q_{\gamma\beta}(m, n), \quad \forall \beta \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\gamma} Q_{\alpha\gamma}(m) Q_{\gamma\beta}(m, n), \quad \forall \beta \\ &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha\beta}(n), \quad \forall \beta \\ &= Q_{\beta}(n), \quad \forall \beta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(m) \leq \sum_{\gamma} Q_\gamma(m) \leq \min_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n).$$

□

### Equação Diofantina

Tomando  $D = d - 1$  no lema 3.6.6, é exigido que as matrizes  $Z$  não sejam tão grandes no seguinte sentido:

(A) para todo  $\epsilon > 0$  existe  $C_\epsilon > 0$  tal que para todo  $n \geq 0$  temos

$$\|Z(m+1)\| \leq C_\epsilon \|Q(m)\|^\epsilon.$$

A prova dessa condição pode ser encontrada em [8].

Podemos reformular (A) em termos dos comprimentos  $\lambda_\alpha^m$ . É conveniente considerar aqui como a norma de uma matriz a soma de todos os seus coeficientes em valor absoluto. As matrizes que consideramos aqui tem entradas não negativas.

**Proposição 3.6.8.** Temos sempre, para  $m \geq 0$ ,

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \geq \frac{\lambda^*}{\|Q(m)\|} \geq \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m. \quad (3.30)$$

A condição (A) é equivalente a seguinte estimativa inversa: para todo  $\epsilon > 0$  existe  $C'_\epsilon > 0$  tal que

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \leq C'_\epsilon \|Q(n)\|^\epsilon \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m. \quad (3.31)$$

*Demonstração.* Vamos mostrar que de fato a primeira afirmação é válida.

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^0 = \sum_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(m) \lambda_\beta^m \\ &\leq \sum_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(m) \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \\ &= \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \sum_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(m) \\ &= \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} Q_{\alpha\beta}(m) \\ &= \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}} Q_{\alpha\beta}(m) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \|Q(m)\|. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\lambda^* &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^0 = \sum_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(m) \lambda_\beta^m \\ &\geq \sum_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(m) \min_{\lambda \in \mathcal{A}} \lambda_\beta^m \\ &= \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \|Q(m)\|.\end{aligned}$$

Logo,

$$\min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \leq \frac{\lambda^*}{\|Q(m)\|} \leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m.$$

Assuma que (A) é satisfeita. Seja  $n = m + 2d - 3$ , se  $d \geq 3$  ou  $n = m + 2$ , se  $d = 2$  como no lema 3.6.6.

Se  $d = 2$  então,

$$Q(m, m + 2) = Z(m + 1)Z(m + 2).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|Q(m, m + 2)\| &\leq \|Z(m + 1)\| \|Z(m + 2)\| \\ &\leq C_\epsilon \|Q(m)\|^\epsilon C_\epsilon \|Q(m + 1)\|^\epsilon \\ &= C_\epsilon^2 \|Q(m)\|^\epsilon \|Q(m)Z(m + 1)\|^\epsilon \\ &\leq C_\epsilon^2 \|Q(m)\|^\epsilon \|Q(m)\|^\epsilon \|Z(m + 1)\|^\epsilon \\ &\leq C_\epsilon^2 \|Q(m)\|^{2\epsilon} (C_\epsilon)^\epsilon \|Q(m)\|^{\epsilon^2} \\ &\leq C_\epsilon^{2+\epsilon} \|Q(m)\|^{2\epsilon+\epsilon^2}, \text{ tome } \epsilon' = \max\{2 + \epsilon, 2\epsilon + \epsilon^2\} \\ &\leq (C_\epsilon)^{\epsilon'} \|Q(m)\|^{\epsilon'}.\end{aligned}$$

Se  $d \geq 3$ , por um processo análogo ao caso acima, porém mais trabalhoso, podemos mostrar que

$$\|Q(m, m + 2d - 3)\| \leq C'_\epsilon \|Q(m)\|^\epsilon, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Por outro lado, pelo lema 3.6.6 como para todo  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ ,  $Q_{\alpha\beta}(m, n) > 0$  temos

$$\min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \geq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^n.$$

De fato,  $\lambda^m = Q(m, n)\lambda^n$ , implica

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha^m &= \sum_{\beta} Q_{\alpha\beta}(m, n)\lambda_\beta^n \\ &\geq \sum_{\beta} \lambda_\beta^n \\ &\geq \max_{\beta \in \mathcal{A}} \lambda_\beta^n, \forall \alpha \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \geq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^n.$$

Assumamos agora que vale a estimativa da proposição.

Temos sempre que

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \geq d^{-1} \|Z(m+1)\| \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^{m+1}.$$

De fato, seja  $\alpha^0 \in \mathcal{A}$  tal que  $\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m = \lambda_{\alpha^0}^m$ . Temos

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha^0}^m = d\lambda_{\alpha^0}^m \Leftrightarrow d^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m \leq \lambda_{\alpha^0}^m.$$

Além disso, como

$$\lambda_\alpha^m = \sum_{\beta} Z_{\alpha\beta}(m+1)\lambda_\beta^{m+1}$$

segue que

$$\begin{aligned}\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^m &\geq d^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left( \sum_{\beta \in \mathcal{A}} Z_{\alpha\beta}(m+1)\lambda_\beta^{m+1} \right) \\ &\geq d^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left( \sum_{\beta \in \mathcal{A}} Z_{\alpha\beta}(m+1) \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^{m+1} \right) \\ &= d^{-1} \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^{m+1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left( \sum_{\beta \in \mathcal{A}} Z_{\alpha\beta}(m+1) \right) \\ &= d^{-1} \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^{m+1} \|Z(m+1)\|.\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\alpha^0$  nunca ganha no intervalo de tempo  $[n_D(m), n_D(m+1)]$ ,

$$\lambda_{\alpha^0}^m = \lambda_{\alpha^0}^{m+1}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\alpha^0}^m &\leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^{m+1} \\
 &\leq C_{\epsilon} \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^{m+1} \|Q(m+1)\| \\
 &\leq C_{\epsilon} d \|Z(m+1)\|^{-1} \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^m \|Q(m+1)\|^{\epsilon} \\
 &\leq C_{\epsilon}^2 d \|Z(m+1)\|^{-1} \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^m \|Q(m)\|^{\epsilon} \|Q(m+1)\|^{\epsilon} \\
 &\leq C_{\epsilon}^2 d \|Z(m+1)\|^{-1} \lambda_{\alpha^0}^m \|Q(m)\|^{\epsilon} \|Q(m+1)\|^{\epsilon}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|Z(m+1)\| \leq C_{\epsilon}^2 d \|Q(m)\|^{\epsilon} \|Q(m+1)\|^{\epsilon}.$$

Assim, concluímos a condição (A). □

## Capítulo 4

# O Tempo de Primeiro Retorno da Transformação de Intercâmbio de Intervalos

Seja  $\mathcal{P}_n$  a partição de  $I = [0, 1)$  consistindo de  $f^i(I_\alpha^n)$ , com  $0 \leq i < Q_\alpha(n)$ . Observemos que  $\sum_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n) \lambda_\beta^n = 1$  e  $R_{I_\alpha^n}(x) = Q_\alpha(n)$ , para cada  $x \in I_\alpha^n$ .

Agora, seja  $P_n(x)$  o elemento da partição de  $\mathcal{P}_n$  que contém  $x$ . Definimos  $R_n(x)$  como sendo o tempo de primeiro retorno para  $P_n(x)$ , isto é,  $R_n(x) = R_{P_n(x)}(x)$ .

Antes de enunciarmos a primeira proposição deste capítulo, consideremos as seguintes observações.

**Observação 4.0.9.** *Dado um conjunto  $E$  mensurável vamos encontrar uma relação entre  $R_{f(E)}(x)$  e  $R_E(x)$ .*

*Sabemos que*

$$f^{R_{f(E)}(x)} \in f(E) \text{ e } f^i(x) \notin f(E), \text{ com } 1 \leq i \leq R_{f(E)}(x) - 1.$$

$\Downarrow$

$$f^{R_{f(E)}(x)-1} \in E \text{ e } f^{i-1}(x) \notin E, \text{ com } 0 \leq i-1 \leq R_{f(E)}(x) - 2.$$

Logo,  $R_E(x) = R_{f(E)}(x) - 1 \Leftrightarrow R_{f(E)}(x) = R_E(x) + 1$ . E assim,

$$R_{f^i(I_\alpha^n)}(x) = 1 + R_{f^{i-1}(I_\alpha^n)}(x) = \dots = i + R_{I_\alpha^n}(x).$$

**Observação 4.0.10.** *Desde que  $f^{Q_\alpha(n)}(I_\alpha^n) \subset I_\alpha^n$ , temos*

$$x \in f^i(I_\alpha^n) \Rightarrow f^{-i}(x) \in I_\alpha^n \Rightarrow R_{I_\alpha^n}(f^{-i}(x)) = Q_\alpha(n).$$

#### Capítulo 4. O Tempo de Primeiro Retorno da Transformação de Intercâmbio de Intervalos 45

A proposição a seguir dá uma estimativa para tempo de primeiro retorno de um ponto  $x$  a  $P_n(x)$ .

**Proposição 4.0.11.** *Temos sempre para  $n \geq 1$ ,*

$$\min_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n) \leq R_n(x) < 2 \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n + m(d)) + \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n).$$

*Demonstração.* Seja  $x \in [0, 1)$ , então  $x \in f^i(I_\alpha^n) = P_n(x)$  para algum  $0 \leq i < Q_\alpha(n)$  e para algum  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Afirmamos que  $f^{-j}(x) \notin I_\alpha^n$  para todo  $0 \leq j < i$ . De fato, suponha que  $f^{-j}(x) \in I_\alpha^n = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha^n \Rightarrow f^{-j}(x) \in I_\beta^n$  para algum  $\beta \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in f^j(I_\beta^n) \Rightarrow x \in f^i(I_\alpha^n) \cap f^j(I_\beta^n)$ , o que é um absurdo pois  $f^i(I_\alpha^n)$  e  $f^j(I_\beta^n)$  são elementos de  $P_n$ . Além disso,  $f^{-i}(x) \in I_\alpha^n$ .

Por construção de  $\mathcal{P}_n$  e da observação 4.0.9 temos,

$$R_n(x) = R_{P_n(x)}(x) = R_{f^i(I_\alpha^n)}(x) = i + R_{I_\alpha^n}(x) \geq i + R_{I^n}(x),$$

no qual a desigualdade decorre do fato de  $I_\alpha^n \subset I^n$  e, portanto,  $R_{I_\alpha^n}(x) \geq R_{I^n}(x)$ . Temos ainda que se  $f^{Q_\alpha(n)}(I_\alpha^n) \subset I^n$ , então pela observação 4.0.10,  $R_{I^n}(x) = Q_\alpha(n) - i$ . Assim,  $R_n(x) \geq Q_\alpha(n)$ .

Seja  $x \in f^j(I_\beta^{n+m(d)})$  para algum  $\beta$  e  $0 \leq j < Q_\beta(n + m(d))$ . Então,  $f^{Q_\beta(n+m(d))-j}(x) \in I_\beta^{n+m(d)}$ . De fato, como  $x \in f^j(I_\beta^{n+m(d)})$ , segue que

$$f^{-j}(x) \in I_\beta^{n+m(d)} \Rightarrow f^{Q_\beta(n+m(d))}(f^{-j}(x)) \in f^{Q_\beta(n+m(d))}(I_\beta^{n+m(d)}) \in I_\beta^{n+m(d)}.$$

Desde que  $Q_{\alpha\gamma}(n, n + m(d)) > 0$ , para todo  $\alpha, \gamma \in \mathcal{A}$ , temos que a órbita  $f^l(y)$ , com  $y \in I_\gamma^{n+m(d)}$  visita  $I_\alpha^n$  antes de retornar a  $I_\gamma^{n+m(d)}$ , com  $l \leq Q_\gamma(n + m(d))$ . Queremos saber quando esta órbita visita  $I_\alpha^n$ . Da afirmação acima temos que existe  $\gamma \in \mathcal{A}$  tal que

$$f^{Q_\beta(n+m(d))-j}(x) \in I_\gamma^{n+m(d)} \Rightarrow f^{l+Q_\beta(n+m(d))-j}(x) \in f^l(I_\gamma^{n+m(d)}) \subset I_\alpha^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= R_{I_\alpha^n} + i \\ &< Q_\beta(n + m(d)) - j + l + Q_\alpha(n) \\ &\leq Q_\beta(n + m(d)) - j + Q_\gamma(n + m(d)) + Q_\alpha(n) \\ &\leq \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n + m(d)) - j + \max_{\gamma \in \mathcal{A}} Q_\gamma(n + m(d)) + \max_{\alpha \in \mathcal{A}} Q_\alpha(n) \\ &< 2 \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n + m(d)) + \max_{\alpha \in \mathcal{A}} Q_\alpha(n). \end{aligned}$$

**Capítulo 4. O Tempo de Primeiro Retorno da Transformação de Intercâmbio de Intervalos** 46

Além disso, como  $R_n(x) \geq Q_\alpha(n) \geq \min_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n)$ , segue o resultado da proposição.  $\square$

Definimos  $W_n(x, y)$  como o tempo de entrada de  $x$  em  $P_n(y)$ , isto é,

$$W_n(x, y) = R_{P_n(y)}(x) = \min \{j \geq 1; f^j(x) \in P_n(y)\}.$$

Notemos que  $W_n(x, y) \leq i$  para todo  $x = f^{-i}(y)$ ,  $i \geq 1$ .

De fato,  $W_n(f^{-i}(y), y) = \min \{j \geq 1; f^{j-i}(y) \in P_n(y)\} \stackrel{j=i}{=} \min \{j \geq 1; y \in P_n(y)\}$ . Como  $f^{-i}(y)$  pode entrar antes em  $P_n(y)$ , segue que  $W_n(x, y) \leq i$ . Além disso, não há limite inferior para  $W_n(x, y)$  como na proposição 4.0.11.

**Proposição 4.0.12.** *Para todo  $x, y$  e para todo  $n \geq 0$  temos a seguinte desigualdade:*

$$W_n(x, y) < 2 \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n + m(d)) + \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n).$$

*Demonstração.* Seja  $x \in f^i(I_\alpha^{n+m(d)})$  para algum  $\alpha$  e  $i$  com  $0 \leq i < Q_\alpha(n + m(d))$  e  $y \in f^j(I_\beta^n) = P_n(y)$  para algum  $\beta$  e  $j$  com  $0 \leq j < Q_\beta(n)$ . Por construção de  $\mathcal{P}_n$  temos

$$W_n(x, y) = R_{P_n(y)}(x) = R_{f^j(I_\beta^n)}(x) = j + R_{I_\beta^n}(x).$$

Além disso, dado  $x \in f^i(I_\alpha^{n+m(d)})$  segue que,

$$f^{-i}(x) \in I_\alpha^{n+m(d)} \Rightarrow f^{Q_\alpha(n+m(d))-i}(x) \in f^{Q_\alpha(n+m(d))}(I_\alpha^{n+m(d)}).$$

Logo,  $f^{Q_\alpha(n+m(d))-i}(x) \in I_\alpha^{n+m(d)}$ .

Desde que  $Q_{\beta\gamma}(n, n + m(d)) > 0$  temos que a órbita  $f^l(y)$ , com  $y \in I_\gamma^{n+m(d)}$  visita  $I_\beta^n$  antes de retornar a  $I_\alpha^{n+m(d)}$ , com  $l \leq Q_\gamma(n + m(d))$ . Portanto, existe  $\gamma \in \mathcal{A}$  tal que  $f^{Q_\alpha(n+m(d))-i}(x) \in I_\gamma^{n+m(d)} \Rightarrow f^{l+Q_\alpha(n+m(d))-i}(x) \in f^l(I_\gamma^{n+m(d)}) \subset I_\beta^n$ . Disso, segue que,

$$\begin{aligned} W_n(x, y) &= R_{I_\beta^n}(x) + j \\ &< l + Q_\alpha(n + m(d)) - i + Q_\beta(n) \\ &< Q_\gamma(n + m(d)) + Q_\alpha(n + m(d)) + Q_\beta(n) \\ &\leq \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n + m(d)) + \max_{\alpha \in \mathcal{A}} Q_\alpha(n + m(d)) + \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n) \\ &\leq 2 \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n + m(d)) + \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n). \end{aligned}$$

Donde segue o resultado.  $\square$



**Lema 4.0.13.** *Se a transformação de intercâmbio de intervalos satisfaz a condição (A), então para todo  $\epsilon > 0$  podemos encontrar  $C > 0$  tal que para todo  $n \geq m(d)$*

$$C\|Q(n)\|^{1-\epsilon} \leq \min_{\beta \in \mathcal{A}} Q_{\beta}(n).$$

*Demonstração.* Se  $n = m + m(d)$ , para todo  $\epsilon' > 0$  temos

$$\begin{aligned} \|Q(n)\| &= \sum_{\alpha, \gamma} |Q_{\alpha\gamma}(n)| = \sum_{\alpha, \gamma} Q_{\alpha\gamma}(n) \\ &= \sum_{\alpha, \gamma} \left( \sum_{\beta} Q_{\alpha\beta}(m) Q_{\beta\gamma}(m, n) \right) \\ &= \sum_{\beta, \gamma} \left( \sum_{\alpha} Q_{\alpha\beta}(m) Q_{\beta\gamma}(m, n) \right) \\ &= \sum_{\beta, \gamma} \left( Q_{\beta\gamma}(m, n) \sum_{\alpha} Q_{\alpha\beta}(m) \right) \\ &= \sum_{\beta, \gamma} \left( Q_{\beta\gamma}(m, n) Q_{\beta}(m) \right) \\ &\leq \sum_{\beta, \gamma} \left( Q_{\beta\gamma}(m, n) \max_{\eta \in \mathcal{A}} Q_{\eta}(m) \right) \\ &= \max_{\eta \in \mathcal{A}} Q_{\eta}(m) \sum_{\beta, \gamma} Q_{\beta\gamma}(m, n) \\ &= \max_{\eta \in \mathcal{A}} Q_{\eta}(m) \|Q(m, n)\|. \end{aligned}$$

De 3.29, obtemos

$$\begin{aligned} \|Q(n)\| &\leq \min_{\eta \in \mathcal{A}} Q_{\eta}(n) \|Q(m, n)\| \\ &= \min_{\eta \in \mathcal{A}} Q_{\eta}(n) \|Z(m+1) \dots Z(n)\| \\ &\leq \min_{\eta \in \mathcal{A}} Q_{\eta}(n) \|Z(m+1)\| \dots \|Z(n)\| \\ &\leq \min_{\eta \in \mathcal{A}} Q_{\eta}(n) C_{\epsilon'} \|Q(m)\|^{\epsilon'} \dots C_{\epsilon'} \|Q(n-1)\|^{\epsilon'}, \text{ pela condição (A)} \\ &\leq \min_{\eta \in \mathcal{A}} Q_{\eta}(n) C_{\epsilon'}^{m(d)} (\|Q(m)\| \dots \|Q(n-1)\|)^{\epsilon'} \\ &\leq \min_{\eta \in \mathcal{A}} Q_{\eta}(n) C_{\epsilon'}^{m(d)} (\|Q(m)\|^{m(d)})^{\epsilon'}, \text{ pois } \|Q(i)\| \leq \|Q(j)\|, \text{ para todo } j \geq i \\ &= \min_{\eta \in \mathcal{A}} Q_{\eta}(n) C \|Q(n)\|^{\epsilon}, \text{ onde } \epsilon' = \frac{\epsilon}{m(d)}. \end{aligned}$$

□

**Lema 4.0.14.** *Se a transformação de intercâmbio de intervalos satisfaz a condição (A) então,*

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |P_{n+1}(x)|}{\log |P_n(x)|} = 1$  e a convergência é uniforme.

Demonstração. Para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \min_{\beta \in \mathcal{A}} \lambda_{\beta}^{n+1} &\geq \frac{\max_{\beta \in \mathcal{A}} \lambda_{\beta}^{n+1}}{C'_{\epsilon} \|Q(n+1)\|^{\epsilon}}, \text{ por 3.31} \\
 &\geq \frac{\max_{\beta \in \mathcal{A}} \lambda_{\beta}^{n+1}}{C'_{\epsilon} \|Q(n)\|^{\epsilon} \|Z(n+1)\|^{\epsilon}}, \text{ pois } Q(n+1) = Q(n)Z(n+1) \\
 &\geq \frac{\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n}{C'_{\epsilon} \|Q(n)\|^{\epsilon} \|Z(n+1)\|^{\epsilon+1}}, \text{ pois } \lambda^n = Z(n+1)\lambda^{n+1} \\
 &\geq \frac{\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n}{C'_{\epsilon} C_{\epsilon}^{\epsilon+1} \|Q(n)\|^{\epsilon} \|Q(n)\|^{\epsilon(\epsilon+1)}}, \text{ pela condição (A)} \\
 &= \frac{\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n}{C'_{\epsilon} C_{\epsilon}^{\epsilon+1} \|Q(n)\|^{\epsilon(\epsilon+2)}} \\
 &\geq \frac{\lambda^*}{C'_{\epsilon} C_{\epsilon}^{\epsilon+1} \|Q(n)\|^{1+\epsilon(\epsilon+2)}}, \text{ por 3.30}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n &\leq C'_{\epsilon} \|Q(n)\|^{\epsilon} \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n \\
 &\leq C'_{\epsilon} \|Q(n)\|^{\epsilon-1} \lambda^*.
 \end{aligned}$$

Assim, como

$$\begin{aligned}
 -\log \left( \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^{n+1} \right) &\leq -\log \left( \frac{\lambda^*}{C'_{\epsilon} C_{\epsilon}^{\epsilon+1} \|Q(n)\|^{1+\epsilon(\epsilon+2)}} \right) \\
 &= \log \left( \frac{C'_{\epsilon} C_{\epsilon}^{\epsilon+1} \|Q(n)\|^{1+\epsilon(\epsilon+2)}}{\lambda^*} \right) \\
 &= \log(C'_{\epsilon} C_{\epsilon}^{\epsilon+1}) - \log \lambda^* + (1 + \epsilon(\epsilon + 2)) \log \|Q(n)\|
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 -\log \left( \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n \right) &\geq -\log(C'_{\epsilon} \|Q(n)\|^{\epsilon-1} \lambda^*) \\
 &= \log \left( \frac{\|Q(n)\|^{1-\epsilon}}{C'_{\epsilon} \lambda^*} \right) \\
 &= (1 - \epsilon) \log \|Q(n)\| - \log(C'_{\epsilon} \lambda^*).
 \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
 \frac{\log |P_{n+1}(x)|}{\log |P_n(x)|} &= \frac{-\log \lambda_\alpha^{n+1}}{-\log \lambda_\alpha^n} \\
 &\leq \frac{-\log \left( \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^{n+1} \right)}{-\log \left( \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^n \right)} \\
 &\leq \frac{\log(C'_\epsilon C_\epsilon^{\epsilon+1}) - \log \lambda^* + (1 + \epsilon(\epsilon + 2)) \log \|Q(n)\|}{(1 - \epsilon) \log \|Q(n)\| - \log(C'_\epsilon \lambda^*)} \\
 &= \frac{(1 + \epsilon(\epsilon + 2)) \log \|Q(n)\| \left( \frac{\log(C'_\epsilon C_\epsilon^{\epsilon+1}) - \log \lambda^*}{(1 + \epsilon(\epsilon + 2)) \log \|Q(n)\|} + 1 \right)}{(1 - \epsilon) \log \|Q(n)\| \left( 1 - \frac{\log(C'_\epsilon \lambda^*)}{(1 - \epsilon) \log \|Q(n)\|} \right)}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |P_{n+1}(x)|}{\log |P_n(x)|} &\leq \frac{1 + \epsilon(\epsilon + 2)}{1 - \epsilon}, \text{ para todo } \epsilon \\
 &\leq 1.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $|P_{n+1}(x)| \leq |P_n(x)|$  e  $|P_n(x)| \leq 1$ , temos

$$\log |P_{n+1}(x)| \leq \log |P_n(x)| \Rightarrow \frac{\log |P_{n+1}(x)|}{\log |P_n(x)|} \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |P_{n+1}(x)|}{\log |P_n(x)|} \geq 1.$$

E assim, segue o resultado do lema. □

Pelo proposição abaixo, para  $n$  suficientemente grande, o tempo de primeiro retorno de um ponto  $x \in P_n(x)$  é inversamente proporcional ao comprimento de  $P_n(x)$ .

**Proposição 4.0.15.** *Para uma transformação de intercâmbio de intervalos que satisfaz a condição (A) temos que para todo  $x$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} = 1.$$

*Demonstração.* Pela proposição 4.0.11 e lema 4.0.13 se  $n \geq m(d)$ , então para todo  $\epsilon > 0$  podemos escolher uma constante  $C > 0$  tal que

$$R_n(x) \geq \min_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta(n) \geq C \|Q(n)\|^{1-\epsilon}.$$

Além disso, desde que

$$\begin{aligned} \|Q(n)\|^{1+\epsilon} &= \|Q(n)\| \|Q(n)\|^\epsilon \\ &\geq \frac{\lambda^* \|Q(n)\|^\epsilon}{\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^n}, \text{ por 3.30} \\ &\geq \frac{\lambda^*}{C'_\epsilon \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^n}, \text{ por 3.31} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} R_n(x) &\geq C \|Q(n)\|^{1-\epsilon} = C (\|Q(n)\|^{1+\epsilon})^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \\ &\geq C \left( \frac{\lambda^*}{C'_\epsilon \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha^n} \right)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \geq C \left( \frac{\lambda^*}{C'_\epsilon |P_n(x)|} \right)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \\ &= C (C'_\epsilon)^{-\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} (\lambda^*)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} |P_n(x)|^{-\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}. \end{aligned}$$

Assim, para todo  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} &\geq \frac{\log(C(C'_\epsilon)^{-\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} (\lambda^*)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} |P_n(x)|^{-\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}})}{-\log |P_n(x)|} \\ &= \frac{\log(C(C'_\epsilon)^{-\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} (\lambda^*)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}) - \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \log |P_n(x)|}{-\log |P_n(x)|} \\ &= \frac{\log(C(C'_\epsilon)^{-\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} (\lambda^*)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}})}{-\log |P_n(x)|} + \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(C(C'_\epsilon)^{-\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} (\lambda^*)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}})}{-\log |P_n(x)|} + \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \\ &= \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}, \text{ para todo } \epsilon > 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pela condição (A), para todo  $\epsilon > 0$  podemos escolher uma constante  $D$  tal que

$$\begin{aligned} \|Q(n, n + m(d))\| &= \|Z(n+1) \dots Z(n+m(d))\| \\ &\leq \|Z(n+1)\| \|Z(n+2)\| \dots \|Z(n+m(d))\| \\ &\leq C_\epsilon \|Q(n)\|^\epsilon (d+1) \dots (d+1) \\ &= C_\epsilon \|Q(n)\|^\epsilon (d+1)^{m(d)-1} \\ &= D \|Q(n)\|^\epsilon, \text{ onde } D := D(\epsilon, d). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_{\beta}(n + m(d)) &< \|Q(n + m(d))\| \leq \|Q(n)\| \|Q(n, n + m(d))\| \\ &\leq D \|Q(n)\|^{\epsilon} \|Q(n)\| = D \|Q(n)\|^{\epsilon+1}. \end{aligned}$$

Das desigualdades 3.30 e 3.31 segue que

$$\|Q(n)\|^{1-\epsilon} \leq \frac{\lambda^*}{\|Q(n)\|^{\epsilon} \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n} \leq \frac{C'_{\epsilon} \lambda^*}{\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n}.$$

Então,

$$\|Q(n)\|^{1+\epsilon} = \left( \|Q(n)\|^{1-\epsilon} \right)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \leq \left( \frac{C'_{\epsilon} \lambda^*}{\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n} \right)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}.$$

Logo,

$$\max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_{\beta}(n + m(d)) < D \left( \frac{C'_{\epsilon} \lambda^*}{\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n} \right)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}. \quad (4.1)$$

Assim, pela proposição 4.0.11 temos

$$\begin{aligned} R_n(x) &< 2 \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_{\beta}(n + m(d)) + \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_{\beta}(n) < 3 \max_{\beta \in \mathcal{A}} Q_{\beta}(n + m(d)) \\ &< 3D \left( \frac{C'_{\epsilon} \lambda^*}{\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n} \right)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \leq 3D \left( \frac{C'_{\epsilon} \lambda^*}{|P_n(x)|} \right)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \\ &= 3D(C'_{\epsilon} \lambda^*)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} |P_n(x)|^{-\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}. \end{aligned}$$

Portanto, para todo  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} &\leq \frac{\log \left( 3D(C'_{\epsilon} \lambda^*)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} |P_n(x)|^{-\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \right)}{-\log |P_n(x)|} \\ &= \frac{\log \left( 3D(C'_{\epsilon} \lambda^*)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \right) - \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \log |P_n(x)|}{-\log |P_n(x)|} \\ &= \frac{\log \left( 3D(C'_{\epsilon} \lambda^*)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \right)}{-\log |P_n(x)|} + \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left( 3D(C'_\epsilon \lambda^*)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \right)}{-\log |P_n(x)|} + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \\ &= \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}, \text{ para todo } \epsilon > 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como,

$$1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} \leq 1$$

temos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} = 1.$$

□

Antes de apresentarmos os teoremas principais, mostraremos que o limite superior do logaritmo do tempo de recorrência normalizado por  $-\log r$  quando  $r \rightarrow 0^+$  é igual ao limite superior do logaritmo do tempo de recorrência normalizado por  $-\log |P_n(x)|$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Observação 4.0.16.** *Queremos mostrar que*

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{|P_n(x)|}(x)}{-\log |P_n(x)|}.$$

**Fato 4.0.17.**

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{|P_n(x)|}(x)}{-\log |P_n(x)|}. \quad (4.2)$$

*Resta mostrar que a afirmação abaixo é válida:*

**Afirmação 4.0.18.**

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{|P_n(x)|}(x)}{-\log |P_n(x)|}.$$

**Fato 4.0.19.** *Seja  $L = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r}$ . Então existe  $r_n \rightarrow 0$  tal que  $\limsup_{r_n \rightarrow 0} \frac{\log \tau_{r_n}(x)}{-\log r_n} = L$ .*

**Capítulo 4. O Tempo de Primeiro Retorno da Transformação de Intercâmbio de Intervalos** 53

De fato,  $\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \{f(x); x \in B(a, \epsilon) \setminus \{a\}\} = L$ . Como

$$\begin{aligned} L &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \{f(x); x \in B(a, \epsilon) \setminus \{a\}\} \stackrel{(1)}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n); x_n \in B(a, 1/n) \setminus \{a\}\} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \end{aligned}$$

segue o resultado.

(1) Seja  $\sup\{f(x); x \in B(a, \epsilon) \setminus \{a\}\} = L_\epsilon$ . Se  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} L_\epsilon = L$ , então para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $x_\epsilon \in B(a, \epsilon)$  tal que

$$L_\epsilon - \epsilon < f(x_\epsilon) \leq L_\epsilon \Leftrightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} L_\epsilon - \epsilon \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x_\epsilon) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} L_\epsilon = L \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x_\epsilon) = L.$$

Tome  $\epsilon = \frac{1}{n}$ , logo  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ . Como  $x_n \in B(a, 1/n) \setminus \{a\} \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

**Demonstração da afirmação 4.0.18:** Para todo  $n$ , existe  $n_i$  tal que

$$|P_{n_i+1}(x)| \leq r_n < |P_{n_i}(x)|.$$

Logo,

$$\tau_{|P_{n_i}(x)|}(x) \leq \tau_{r_n}(x) \leq \tau_{|P_{n_i+1}(x)|}(x).$$

E assim,

$$\log \tau_{|P_{n_i}(x)|}(x) \leq \log \tau_{r_n}(x) \leq \log \tau_{|P_{n_i+1}(x)|}(x).$$

$\Downarrow$

$$\frac{\log \tau_{|P_{n_i}(x)|}(x)}{-\log |P_{n_i}(x)|} \leq \frac{\log \tau_{r_n}(x)}{-\log |P_{n_i}(x)|} \leq \frac{\log \tau_{|P_{n_i+1}(x)|}(x)}{-\log |P_{n_i}(x)|} = \frac{\log \tau_{|P_{n_i+1}(x)|}(x)}{-\log |P_{n_i+1}(x)|} \frac{\log |P_{n_i+1}(x)|}{\log |P_{n_i}(x)|}.$$

Por outro lado, como  $r_n < |P_{n_i}(x)|$ , segue que  $\log r_n < \log |P_{n_i}(x)|$  e assim  $\frac{\log r_n}{\log |P_{n_i}(x)|} > 1$ . Logo,

$$\frac{\log \tau_{r_n}(x)}{-\log |P_{n_i}(x)|} = \frac{\log \tau_{r_n}(x)}{-\log r_n} \frac{\log r_n}{\log |P_{n_i}(x)|} > \frac{\log \tau_{r_n}(x)}{-\log r_n}.$$

Dessa forma, da desigualdade anterior, temos

$$\frac{\log \tau_{r_n}(x)}{-\log r_n} < \frac{\log \tau_{|P_{n_i+1}(x)|}(x)}{-\log |P_{n_i+1}(x)|} \frac{\log |P_{n_i+1}(x)|}{|P_{n_i}(x)|}.$$

Assim,

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{r_n}(x)}{-\log r_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{|P_{n_i+1}(x)|}(x)}{-\log |P_{n_i+1}(x)|} \frac{\log |P_{n_i+1}(x)|}{\log |P_{n_i}(x)|}.$$

$\Downarrow$

$$L \stackrel{(2)}{\leq} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{|P_{n_i+1}(x)|}(x)}{-\log |P_{n_i+1}(x)|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{|P_{n_i}(x)|}}{-\log |P_{n_i}(x)|}. \quad (4.3)$$

(2)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |P_{n+k}(x)|}{\log |P_n(x)|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |P_{n+k}(x)|}{\log |P_{n+k-1}(x)|} \frac{\log |P_{n+k-1}(x)|}{\log |P_{n+k-2}(x)|} \cdots \frac{\log |P_{n+2}(x)|}{\log |P_{n+1}(x)|} \frac{\log |P_{n+1}(x)|}{\log |P_n(x)|} = 1,$$

onde a última igualdade decorre do lema 4.0.14.

Por 4.2 e 4.3 segue o resultado.

Utilizando um argumento análogo podemos mostrar que:

**Observação 4.0.20.**

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{|P_n(x)|/n^2}(x)}{-\log(|P_n(x)|/n^2)}.$$

**Observação 4.0.21.**

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x, y)}{-\log r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{r_n}(x, y)}{-\log r_n}.$$



# Capítulo 5

## Resultados Principais

De posse de todos os resultados obtidos até aqui, mostramos neste capítulo a prova dos teoremas principais.

**Teorema 5.0.22.** *Para uma transformação de intercâmbio de intervalos que satisfaz a condição (A), temos*

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} \leq 1, \text{ para todo } x, \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} \geq 1, \text{ q.t.p.}$$

*Demonstração.* Temos que  $P_n(x) \subset B(x, |P_n(x)|)$ , então como

$$\tau_{|P_n(x)|}(x) = \min \{j \geq 1; |f^j(x) - x| < |P_n(x)|\}$$

segue da definição de  $R_n(x)$ , que  $\tau_{|P_n(x)|}(x) \leq R_n(x)$ . Assim, por 4.0.16 para todo  $x$

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{|P_n(x)|}(x)}{-\log |P_n(x)|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} \leq 1.$$

Seja  $E_n = \{x; |\partial P_n(x) - x| > \frac{1}{n^2} |P_n(x)|\}$  a união da parte 'central' de cada intervalo  $P_n(x)$ . Notemos que

$$\mu(E_n) = 1 - \sum \frac{2}{n^2} |A^k| = 1 - \frac{2}{n^2} \sum |A^k| = 1 - \frac{2}{n^2},$$

onde  $A_k$  é cada elemento da partição. Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right) = \infty.$$

Assim, pelo lema 2.0.9, existe  $N$  tal que para todo  $n \geq N$ ,  $x \in E_n$ .

Se  $x \in E_n$ , como

$$\tau_{|P_n(x)|/n^2}(x) = \min \left\{ j \geq 1; |f^j(x) - x| < \frac{|P_n(x)|}{n^2} \right\},$$

segue que

$$f^{\tau_{|P_n(x)|/n^2}(x)}(x) \in B \left( x, \frac{|P_n(x)|}{n^2} \right) \subset P_n(x).$$

Logo,

$$R_n(x) \leq \tau_{|P_n(x)|/n^2}(x).$$

O fato de  $Q_{\alpha\beta}(n + m(d)) > 0$  para todo  $\alpha, \beta$  implica o decaimento exponencial de  $|P_n(x)|$ :

$$|P_{n+m(d)}(x)| < \frac{1}{d}|P_n(x)|. \quad (5.1)$$

Com isso, temos a seguinte afirmação:

**Afirmção 5.0.23.**  $\liminf_{n \rightarrow \infty} |P_n(x)| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|P_n(x)|}{n^2}.$

De fato, como

$$\frac{|P_n(x)|}{n^2} \leq |P_n(x)|, \text{ para todo } n,$$

segue que,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|P_n(x)|}{n^2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |P_n(x)|, \text{ para todo } n.$$

Por outro lado, por 5.1,

$$|P_{n+km(d)}(x)| < \frac{1}{d^k}|P_n(x)|, \text{ para todo } k.$$

Tomando  $k = n$ , temos

$$|P_{n+nm(d)}(x)| < \frac{1}{d^n}|P_n(x)| \leq \frac{|P_n(x)|}{n^2}.$$

Logo,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |P_{n+nm(d)}(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|P_n(x)|}{n^2}.$$

Como,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |P_n(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |P_{n+nm(d)}(x)|.$$

Temos,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |P_n(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|P_n(x)|}{n^2}.$$

Assim, segue o resultado da afirmação.

Com isso, temos para todo  $x$  que

$$\begin{aligned} \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{|P_n(x)|/n^2}}{-\log(|P_n(x)|/n^2)} \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(x)}{-\log |P_n(x)|} = 1. \end{aligned}$$

□

Observemos que o limite superior em quase toda parte da proposição 4.0.15 vale para sistemas que preservam medidas em geral. Por [6], para qualquer transformação que preserve medida no intervalo,

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} \leq 1, \text{ q.t.p.}$$

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} = 1, \text{ q.t.p.}$$

Este resultado mostra que o tempo de retorno da órbita de um ponto  $x$  é inversamente proporcional ao raio da bola  $B(x, r)$ . Agora, vejamos o teorema para o caso do tempo de entrada.

**Teorema 5.0.24.** *Assuma que a transformação de intercâmbio de intervalos satisfaz a condição (A). Então, para todo  $x$  e  $y$  temos*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log W_n(x, y)}{-\log |P_n(y)|} \leq 1 \text{ e } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_r(x, y)}{-\log r} \leq 1.$$

*Demonstração.* Pela proposição 4.0.12 e por 4.1 temos

$$\begin{aligned} W_n(x, y) &< 3 \max_{\beta} Q_{\beta}(n + m(d)) \leq 3D \left( \frac{C'_\epsilon \lambda^*}{\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_{\alpha}^n} \right)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \\ &\leq 3D \left( \frac{C'_\epsilon \lambda^*}{|P_n(y)|} \right)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} = 3D(C'_\epsilon \lambda^*)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} |P_n(y)|^{-\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}. \end{aligned}$$

Então, para todo  $x$  e  $y$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log W_n(x, y)}{-\log |P_n(y)|} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3D(C'_\epsilon \lambda^*)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} |P_n(y)|^{-\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}}{-\log |P_n(y)|} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3D(C'_\epsilon \lambda^*)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}})}{-\log |P_n(y)|} + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \\ &= \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}, \text{ para todo } \epsilon > 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Escrevamos  $r_n = |P_n(y)|$ . Como  $W_n(x, y) = \min\{j \geq 1; f^j(x) \in P_n(y)\}$  e  $y \in P_n(y)$ , temos  $d(f^{W_n(x,y)}(x), y) \leq |P_n(y)|$ . Mas,  $\tau_{r_n}(x, y) = \tau_{|P_n(y)|}(x, y) = \min\{j \geq 1; d(f^j(x), y) < |P_n(y)|\}$ . Daí, segue que  $\tau_{r_n}(x, y) \leq W_n(x, y)$ . Portanto, por 4.0.21

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x, y)}{-\log r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{r_n}(x, y)}{-\log r_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log W_n(x, y)}{-\log |P_n(y)|} \leq 1.$$

□

Por [4, 6], para qualquer transformação no intervalo preservando medida de Lebesgue,

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x, y)}{-\log r} \geq 1, \text{ q.t.p.}$$

Portanto, temos o seguinte colorário.

**Corolário 5.0.25.** *Para uma transformação de intercâmbio de intervalos que satisfaz a condição (A) temos*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x, y)}{-\log r} = 1, \text{ q.t.p.}$$

A observação abaixo mostra por que o corolário anterior não vale para todo  $x, y$ .

**Observação 5.0.26.** *Fixando  $y$  e dado  $\epsilon > 0$ , temos*

$$E_n = \{x; W_n(x, y) < |P_n(y)|^{-1+\epsilon}\} = \bigcup_{1 \leq i < |P_n(y)|^{-1+\epsilon}} f^i(P_n(y)).$$

De fato,

$$x \in E_n \Leftrightarrow x \in f^{-W_n(x,y)}(P_n(y)) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{1 \leq i < |P_n(y)|^{-1+\epsilon}} f^i(P_n(y)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \mu(E_n) &= \mu \left( \bigcup_{1 \leq i < |P_n(y)|^{-1+\epsilon}} f^i(P_n(y)) \right) \\
 &\leq \sum_{1 \leq i < |P_n(y)|^{-1+\epsilon}} \mu(f^i(P_n(y))) \\
 &= \sum_{1 \leq i < |P_n(y)|^{-1+\epsilon}} |P_n(y)| = |P_n(y)| |P_n(y)|^{-1+\epsilon} = |P_n(y)|^\epsilon.
 \end{aligned}$$

vimos que  $|P_n(y)|$  decresce para 0 exponencialmente, logo

$$\sum_n \mu(E_n) = \sum_n |P_n(y)|^\epsilon \leq \sum_{k_n} |P_{k_n}(y)|^\epsilon \leq \left( \frac{1}{d^{k_n}} \right)^\epsilon < \infty.$$

Assim, pelo lema 2.0.9, para quase todo ponto  $x$ ,  $x \in E_n$  para uma quantidade finita de  $n$ . Ou seja,  $x \notin E_n$  para todo  $n$  suficientemente grande. Logo,

$$\begin{aligned}
 W_n(x, y) &\geq |P_n(y)|^{-1+\epsilon} \\
 &\Downarrow \\
 \frac{\log W_n(x, y)}{-\log |P_n(y)|} &\geq \frac{\log |P_n(y)|^{-1+\epsilon}}{-\log |P_n(y)|} \\
 &\Downarrow \\
 \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log W_n(x, y)}{-\log |P_n(y)|} &\geq 1 - \epsilon, \text{ q.t.p.}
 \end{aligned}$$

Se escolhermos  $x = f^{-1}(y)$  para  $i \in \mathbb{N}$ , vimos no capítulo anterior que  $W_n(x, y) \leq i$  para todo  $n$ . Além disso,

$$\begin{aligned}
 W_n(x, y) &= \min \{ j \geq 1; f^j(x) \in P_n(y) \} \\
 &= \min \{ j \geq 1; f^{j-i}(y) \in P_n(y) \} \\
 &= \min \{ j \geq 1; |f^{j-i}(y) - y| < |P_n(y)| \} \\
 &= \tau_r(x, y), \text{ com } r = |P_n(y)|.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log W_n(x, y)}{-\log |P_n(y)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{|P_n(y)|}(x, y)}{-\log |P_n(y)|} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \tau_r(x, y)}{-\log r} = 0,$$

pois  $\log W_n(x, y)$  é limitado e  $-\log |P_n(y)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

# Capítulo 6

## Conclusão e Perspectivas Futuras

Vimos, ao longo deste trabalho, conceitos e resultados acerca das transformações de intercâmbio de intervalos. Fizemos o estudo do tempo de retorno para essas transformações, tema bastante estudado na teoria de Sistemas Dinâmicos. O teorema de Recorrência de Poincaré, sob determinadas condições, garante que a iterada de quase todo ponto retorna infinitas vezes próximo ao seu ponto de partida. Neste trabalho mostramos um resultado mais forte, no capítulo 5 mostramos que para quase toda transformação de intercâmbio de intervalos, que satisfaz a condição (A), dada uma  $r$ -vizinhança do ponto  $x$  o tempo de retorno e o tempo de entrada são inversamente proporcionais a  $r$ . Obtemos um resultado que determina a taxa com que essa órbita retorna próxima do seu estado inicial.

Para trabalhos futuros podemos fazer uma extensão do artigo trabalhado. Estudar o tempo de retorno para  $r$ -vizinhança para transformações afins de intercâmbio de intervalos. A definição de tal transformação segue abaixo.

Seja  $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1} < a_m = b$  uma partição do intervalo  $I = [a, b)$ .

**Definição 6.0.27.** *Uma aplicação  $f : I \rightarrow I$  é uma transformação afim de intercâmbio de intervalos se é uma transformação bijetiva da forma*

$$f(x) = e^{w_i}x + d_i, \quad x \in [a_{i-1}, a_i), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

para alguns vetores  $d = (d_1, \dots, d_m)$ ,  $w = (e^{w_1}, \dots, e^{w_m}) \in \mathbb{R}^m$ .

O vetor  $w$  é chamado vetor inclinação de  $f$ .

Uma transformação de intercâmbio de intervalos é uma transformação afim de intercâmbio de intervalos com vetor inclinação  $w = (1, 1, \dots, 1)$ .

Além disso, podemos tentar obter os mesmos resultados que Coelho e De Faria em [2], sobre distribuição dos tempos de retornos, para transformações de intercâmbio de intervalos.

# Bibliografia

- [1] Cobo, M., *Piece-wise affine maps conjugate to interval exchanges*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, **22**, (2002), 375–407.
- [2] Coelho, Z., De Faria, E., *Limit laws of entrance times for homeomorphisms of the circle*. Mathematics Subject Classification (1991): 34C35, 58F11, 60G55.
- [3] Cunha, K., Smiana, D., *Renormalization for piecewise smooth homeomorphisms on the circle*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **30**, (2013), 441–462.
- [4] Galatolo S., *Hitting time and dimension in axiom A systems, generic interval exchanges and an application to Birkhoff sums*. Journal of Statistical Physics, **123**, (2006), 111–124.
- [5] James, B. J., *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. IMPA, Projeto Euclides, (2004).
- [6] Kim C., Kim D. H., *On the law of the logarithm of the recurrence time*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, **10**, (2004), 581–587.
- [7] Kim D.H., Marmi S., *The recurrence time for interval exchange maps*. Nonlinearity, **21**, (2008), 2201–2210.
- [8] Marmi S., Moussa P., Yoccoz J.C., *The cohomological equation for both type interval exchange maps*. Journal of the American Mathematical Society, **18**, (2005), 823–872.
- [9] Oliveira, K.; Viana, M. *Teoria Ergódica Um Curso Introdutório*. Disponível em <<http://w3.impa.br/viana/out/ite.pdf>>.
- [10] Viana M., *Dynamics of Interval Exchange Transformations and Teichmüller Flows*, Notas de aula, IMPA, (2008).

Universidade Federal da Bahia-UFBA  
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

---

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus de Ondina, Salvador-BA

CEP: 40170 -110

[www.pgmat.ufba.br](http://www.pgmat.ufba.br)