



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



CARACTERÍSTICAS TOPOLÓGICAS E ERGÓDICAS DE  
SISTEMAS DINÂMICOS COM A PROPRIEDADE DE COLAGEM  
DE ÓRBITAS

AFONSO FERNANDES DA SILVA

Salvador-Bahia  
Fevereiro de 2018

# CARACTERÍSTICAS TOPOLÓGICAS E ERGÓDICAS DE SISTEMAS DINÂMICOS COM A PROPRIEDADE DE COLAGEM DE ÓRBITAS

AFONSO FERNANDES DA SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Thiago Bomfim São Luiz Nunes.

Salvador-Bahia  
Fevereiro de 2018

Silva, Afonso Fernandes da.

Características Topológicas e Ergódicas de Sistemas Dinâmicos com a Propriedade de Colagem de órbitas / Afonso Fernandes Da Silva. – Salvador: UFBA, 2018.

70 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Bomfim São Luiz Nunes.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2018.

Referências bibliográficas.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Propriedade de colagem de órbita. 3.Especificação.  
I. Nunes, Thiago Bomfim São Luiz. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU : 517.98

: 519.218.84

# CARACTERÍSTICAS TOPOLÓGICAS E ERGÓDICAS DE SISTEMAS DINÂMICOS COM A PROPRIEDADE DE COLAGEM DE ÓRBITAS

AFONSO FERNANDES DA SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 21 de fevereiro de 2018.

## Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Thiago Bomfim São Luiz Nunes (Orientador)  
UFBA

---

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas  
UFBA

---

Prof. Dr. Anderson Reis da Cruz  
UFRB

*A minha família e a todos que de algum modo contribuíram com esse trabalho.*

# Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que de alguma forma colaboraram com essa parte da minha vida acadêmica: A Deus em primeiro lugar, pois onde parecia impossível tive inspiração e força para continuar e não desistir, a Capes pela confiança e pelo suporte econômico que foi fundamental para mim nestes anos, ao professor Joilson e os demais professores que se dedicaram a buscar e nos oferecer bolsas de estudos, ao meu professor e orientador Thiago Bomfim pela grande paciência e dedicação em meus momentos de dificuldade, aos demais membros da banca aos quais tenho a honra de ser avaliado, aos meus pais Maria da Paz e Antonio Fernandes, a Geovandro Alves Vasconcelos que foi de grande ajuda nos momentos da vida em que estive enfermo, a quem devo muitos agradecimentos e a todos os meus colegas, professores, amigos brasileiros e aos amigos portugueses da igreja de Coimbra e do coro da capela da Universidade de Coimbra, em especial António, Raquel, Ana e Telmo que conheci na minha vida acadêmica pelo apoio e pela amizade que levarei por toda minha vida.

*“O amor não busca os próprios interesses.”*

(I Coríntios, 13)

# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo descrever algumas características de sistemas dinâmicos com a propriedade de colagem de órbitas, evidenciando as diferenças e semelhanças com as propriedades de sistemas dinâmicos com a propriedade de especificação. Estudaremos as propriedades topológicas e ergógicas da colagem de órbitas, em particular, desde dinâmicas do intervalo até dinâmicas hiperbólicas tanto a tempo discreto quanto a tempo contínuo. Mostraremos através de resultados e contra-exemplos que a propriedade de colagem de órbitas é uma condição muito mais fraca que especificação, mas que ainda preserva propriedades importantes. Todo o trabalho foi baseado nos artigos de Bomfim e Varandas [BV15] e Bomfim, Torres e Varandas [BTV17].

**Palavras-chave:** Propriedade de colagem de órbitas; Especificação; Hiperbolicidade.



# Abstract

This paper is an attempt to describe some characteristics of dynamic systems with gluing orbit property, evidencing the differences and similarities with the property of dynamics systems with specification property. We will study the topological and ergodic properties of dynamic systems with gluing orbit property, in particular, from dynamics of the interval to hyperbolic dynamics in both discrete and continuous time, running through intermittent dynamics. We will show through results and counterexample that the gluing orbits property is a much weaker condition than specification, but still preserves important properties. All work was based on the articles of Bomfim and Varandas [BV15] and Bomfim, Torres and Varandas [BTV17].

**Keywords:** Gluing Orbit Property; Specification; Hyperbolicity.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Entropia e pressão . . . . .	5
1.2 Dinâmicas simbólicas . . . . .	11
1.3 Dinâmicas expansoras . . . . .	13
1.4 Hiperbolicidade . . . . .	15
1.5 Propriedade de especificação . . . . .	19
<b>2 Propriedade de colagem de órbitas</b>	<b>29</b>
2.1 Exemplos . . . . .	32
2.1.1 Rotações e fluxos irracionais . . . . .	32
2.1.2 Dinâmicas do intervalo . . . . .	35
2.1.3 Produto de dinâmicas . . . . .	37
2.1.4 G.O.P. Vs entropia positiva . . . . .	38
2.1.5 Subshift do tipo finito . . . . .	39
2.1.6 Difeomorfismos hiperbólicos . . . . .	40
2.2 Propriedade de colagem de órbitas reparametrizadas . . . . .	43
<b>3 Fluxos de suspensão</b>	<b>45</b>
<b>4 Propriedades topológicas e ergódicas</b>	<b>57</b>
<b>Referências</b>	<b>68</b>

# Introdução

O objetivo dos Sistemas Dinâmicos é entender a evolução de um sistema descrevendo em cada instante de tempo o estado em que cada partícula do sistema se encontra com ênfase no comportamento assintótico, especialmente na presença de recorrência não-trivial. Temos um “espaço de fase”  $M$  cujos pontos representam os possíveis estados do sistema, um “tempo” onde observamos o estado de cada elemento do sistema que pode ser tomado discreto ou contínuo e pode estender-se apenas para o “futuro” (sistema não-invertível) ou simultaneamente para o “passado” e “futuro” (sistema inversível). No caso de sistemas a tempo discreto inversíveis usamos o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números reais no caso contínuo, e para sistemas não-inversíveis usamos o conjunto dos números inteiros positivos no caso discreto e os reais não-negativos no caso contínuo. Temos também uma lei temporal que determinará o estado de cada ponto do sistema em cada instante de tempo a partir de estados anteriores de cada ponto desse sistema. Consideramos sempre que a lei temporal que rege o sistema não varia com o tempo.

O foco do presente trabalho será estudar duas propriedades em sistemas dinâmicos, a saber, *especificação* e *propriedade de colagem de órbitas*. A propriedade de especificação, que é um invariante topológico, foi primeiramente introduzida por Rufus Bowen [Bow71]. Em poucas palavras significa que dado um número finito de pedaços de órbitas e um erro fixado, podemos encontrar um ponto cuja órbita “sombreia”, a menos do erro fixado, cada pedaço de órbita e que o tempo em que a órbita desse ponto demora para sair de um pedaço de órbita para outro é o mesmo e só depende do erro fixado.

Sistemas dinâmicos com especificação são sempre topologicamente mixing, e na dinâmica do intervalo Blokh [Blo83] provou que vale a recíproca, o que nos fornece uma grande variedade de exemplos. Atualmente, sabemos que a propriedade de especificação implica em muitas propriedades topológicas e ergódicas, por exemplo: princípio de grandes desvios para dinâmicas a tempo discreto e observáveis contínuos [You90]; entropia positiva [Bow71]; descrição fina do formalismo termodinâmico a tempo discreto [Tho09]; densidade de medidas periódicas e abundância de medidas ergódicas com suporte máximo, não

atômicas e com entropia zero [Sig70] e [Sig72]; taxa de crescimento assintótico de órbitas periódicas [Bow71].

Especificação está diretamente associada a sistemas *hiperbólicos*, todos os sistemas hiperbólicos mixing têm especificação, porém é muito raro que valha especificação no complementar da hiperbolicidade [SVY16] e [SVY15]. O exemplo do fluxo de suspensão obtido por uma base que é um difeomorfismo Anosov mixing e com altura constante nunca terá a propriedade de especificação, pois não será mixing, assim em [BV15] foi introduzido o conceito de *propriedade de colagem de órbitas* que é um invariante topológico mais fraco que especificação. Essa propriedade caracteriza os sistemas hiperbólicos transitivos, e é satisfeita por dinâmicas do intervalo transitivas, e fluxos de suspensão obtidos por uma base intermitente (Maneville-Poumeau) e altura Hölder sempre têm a propriedade de colagem de órbitas. Atualmente, temos diversos resultados de sistemas dinâmicos com a propriedade de colagem de órbitas similares aos de especificação, assim a propriedade de colagem de órbitas vem se mostrando suficiente em relação à especificação.

O corpo deste trabalho está dividido em 5 capítulos cujos conteúdos discutiremos a seguir.

1. **Capítulo 1:** Apresentação da preliminares. Nesse capítulo são definidos *Entropia e Pressão* que são maneiras de medir a complexidade do sistema, e assim um sistema pode ser dito caótico se possuir entropia positiva; Estudo de sistemas dinâmicos *Hiperbólicos* que foi iniciado por Smale na década de 60; *Sistemas dinâmicos simbólicos* que exerce um papel importante, pois através da conjugação topológica com alguns sistemas complicados, podemos deduzir boas propriedades; *Especificação*, estudada por Bowen na década de 70 que foi a inspiração na definição de propriedade de colagem de órbitas.
2. **Capítulo 2:** Apresentaremos a propriedade de colagem de órbitas que foi introduzida em [BV15] e uma seção de exemplos e contra-exemplos importantes que nos ajudam a perceber as diferenças ou semelhanças da propriedade de colagem de órbitas com a propriedade de especificação. Dentre outros exemplos, as rotações irracionais no círculo que são exemplos de dinâmicas discretas transitivas, mas não são mixing, fluxos lineares irracionais no toro que possuem entropia zero e são exemplos de dinâmicas a tempo contínuo transitivas e não-mixing e estudaremos o caso particular sobre dinâmicas definidas no intervalo, onde vale que transitiva contínua implica em ter a propriedade de colagem de órbitas. No caso de fluxos, também definimos propriedade de colagem de órbitas reparametrizada, que é uma versão mais

fraca da propriedade de colagem de órbitas, pois em algumas dinâmicas os pontos podem começar próximos, mas no decorrer do tempo ficarem afastados. Isso pode ocorrer, por exemplo, quando perturbamos um fluxo com a propriedade de colagem de órbitas de modo que os pontos não "caminhem" na mesma velocidade, assim, por vezes, podemos usar reparametrizações para "empurrar", e assim os pontos ficarem próximos.

3. **Capítulo 3:** Provaremos um teorema originalmente demonstrado em [BV15] que nos fornece um critério para gerar exemplos de fluxos com a propriedade de colagem de órbitas que enunciaremos a seguir.

**Teorema 0.1.** *Seja  $M$  um espaço métrico e  $f : M \rightarrow M$  satisfazendo a propriedade de colagem de órbitas. Assuma que a função altura  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  é limitada inferiormente e superiormente afastada do zero, é uniformemente contínua e as constantes*

$$C_\xi := \sup_{n \geq 1} \sup_{y \in B(x, n, \xi)} |S_n \rho(x) - S_n \rho(y)| < \infty, \text{ satisfazem } \lim_{\xi \rightarrow 0} C_\xi = 0$$

onde  $S_n \rho = \sum_{j=0}^{n-1} \rho \circ f^j$ . Então o semifluxo de suspensão obtido pela base  $f$  e altura  $\rho$  tem a propriedade de colagem de órbita. Se  $f$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódica, então a suspensão satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódica.

A partir desse teorema provamos que todo fluxo axioma A restrito a cada peça básica possui a propriedade de colagem de órbitas periódica, e que a suspensão de uma dinâmica expansora transitiva com altura Hölder possui a propriedade de colagem de órbitas periódica.

4. **Capítulo 4:** Demonstraremos algumas propriedades topológicas e ergódicas de fluxos com a propriedade de colagem de órbitas (reparametrizada) como a frequência inferior de visitas a bolas positiva, que no caso da família das bolas centradas em órbitas periódicas temos uma estimativa super linear, no caso de propriedade de colagem de órbitas periódicas e expansividade podemos utilizar os pontos periódicos para calcular a entropia e também mostraremos que todo ponto é ponto de entropia. Sendo mais preciso:

**Teorema 0.2.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana Compacta e conexa. Assumimos que  $(X^t)_t$  é a restrição a um conjunto invariante e compacto de um fluxo contínuo gerado por um campo de vetores lipschitz  $X : M \rightarrow TM$ . Se  $(X^t)_t$  satisfaz a propriedade de colagem de órbita reparametrizada, então:*

- (1)  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Leb}(s \in [0, t] : B_1 \cap X^{-s}(B_2) \neq \emptyset) \geq \tau(x_2, \epsilon) > 0$ ;
- (2) *Seja a família de bolas  $\mathcal{B} := \{B(x, \epsilon); x \in \text{Per}((X^t)_t), \epsilon > 0\}$ , então qualquer centro  $x_2$  que é o centro de uma bola em  $\mathcal{B}$  existe  $C(x_2) > 0$  de tal maneira que  $\tau(x_2, \epsilon) \geq C(x_2)\epsilon$ , onde  $\tau(x_2, \epsilon)$  é a estimativa dada no item anterior.*

*Se o fluxo satisfaz a propriedade de colagem de órbita reparametrizada periódica, então:*

- (3)  $h_{\text{top}}((X^t)_t) \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log((\#\text{Per}(X^t)_t), T)$ , onde  $\text{Per}((X^t)_t, T)$  denota o número de órbitas periódicas de período menor ou igual a  $T$ .
- (4) *Se, adicionalmente, o fluxo  $(X^t)_t$  é Komuro expansivo, então:*

$$[(i)] h_{\text{top}}((X^t)_t) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log((\#\text{Per}(X^t)_t), T)$$

*[(ii)] Todo ponto em  $M$  é um ponto de entropia para o fluxo  $(X^t)_t$ , isto é, calcular a entropia numa vizinhança de cada ponto é o mesmo que calcular a entropia de todo o sistema.*

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Entropia e pressão

Um invariante numérico importante relacionado com o crescimento orbital é a entropia. Representa a taxa de crescimento exponencial do número de segmentos de órbitas distinguíveis com taxa de precisão arbitrariamente pequena mas finita. Para poder entender o conceito de entropia precisamos introduzir a noção de bola dinâmica tanto para tempo discreto quanto para tempo contínuo. Todas as definições aqui são encontradas em [KH99] e [OV03].

**Definição 1.1.** *Suponhamos que  $f : M \rightarrow M$  é uma aplicação contínua num espaço métrico compacto  $M$ . Dado  $x \in M$ ,  $n \geq 1$  e  $\epsilon > 0$ , chamamos bola dinâmica de comprimento  $n$  e raio  $\epsilon$  em torno de  $x$  ao conjunto:*

$$B(x, n, \epsilon) := \{y \in M : d(f^j(x), f^j(y)) < \epsilon \text{ para todo } j = 0, 1, \dots, n-1\}$$

Da mesma forma definimos bola dinâmica para tempo contínuo:

**Definição 1.2.** *Suponhamos que  $(X^t) : M \rightarrow M$  é um fluxo contínuo num espaço métrico compacto  $M$ . Dado  $x \in M$ ,  $T > 0$  e  $\epsilon > 0$ , chamamos bola dinâmica de comprimento  $T$  e raio  $\epsilon$  em torno de  $x$  ao conjunto:*

$$B(x, T, \epsilon) := \{y \in M : d(X^t(x), X^t(y)) < \epsilon \text{ para todo } t \in [0, T]\}$$

**Definição 1.3.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  sistema dinâmico. Dado  $K \subset M$  compacto,  $\epsilon > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ , dizemos que um conjunto  $E \subset K$  é  $(n, \epsilon)$ -separado se dados  $x, y \in E$ , existe  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $d(f^i(x), f^i(y)) \geq \epsilon$ . Em outras palavras se  $x \in E$  então  $B(x, n, \epsilon)$  não contém nenhum outro ponto de  $E$ .*

Denotamos por  $s_n(f, \epsilon, K)$  a cardinalidade máxima de um conjunto  $(n, \epsilon)$ -separado. Definimos

$$s(f, \epsilon, K) := \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, K)$$

É claro que se  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$  então todo conjunto  $(n, \epsilon_2)$  – separado é um conjunto  $(n, \epsilon_1)$  – separado. Portanto  $s_n(f, \epsilon_1, K) \geq s_n(f, \epsilon_2, K)$  para todo  $n \geq 1$ , logo existe  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} s(f, \epsilon, K) = s(f, K)$ .

**Definição 1.4.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  contínua num espaço métrico compacto  $M$ . A entropia topológica de  $f$  no subconjunto compacto  $K \subset M$  é definida como*

$$h_{top}(f, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, K)$$

**Definição 1.5.** *A entropia de uma dinâmica  $f : M \rightarrow M$  num espaço métrico compacto  $M$  é definida quando  $K = M$  na definição anterior, ou seja*

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, M)$$

**Observação:** Se na expressão acima trocarmos o  $\limsup$  pelo  $\liminf$  o resultado seria o mesmo. Obviamente o  $\limsup$  e  $\liminf$  não precisam ser iguais, e por um lado, é claro que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, M) \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, M)$$

Por outro lado, temos que  $s_n(f, \frac{\epsilon}{2}, M) \geq s_n(f, \epsilon, M)$  para todo  $\epsilon > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Logo

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, M) \leq \liminf_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \frac{\epsilon}{2}, M)$$

e fazendo  $\epsilon$  ir para zero, temos:

$$h_{top}(f, M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, M) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \frac{\epsilon}{2}, M)$$

Também poderíamos definir a entropia topológica através de conjuntos  $(n, \epsilon)$  geradores no lugar de  $(n, \epsilon)$  separado com as mesmas contas anteriores:

**Definição 1.6.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma dinâmica. Dado  $K \subset M$ ,  $\epsilon > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ , um conjunto  $\mathcal{E} \subset K$  é um conjunto  $(n, \epsilon)$  gerador de  $K$ , se para todo  $x \in K$  existe  $a \in \mathcal{E}$  tal que  $d(f^i(x), f^i(a)) < \epsilon$  para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Em outras palavras*

$$K \subset \bigcup_{a \in \mathcal{E}} B(a, n, \epsilon)$$

Denotamos por  $g_n(f, \epsilon, K)$  a menor cardinalidade de um conjunto  $(n, \epsilon)$  gerador e  $g(f, \epsilon, M) := \limsup_n \frac{1}{n} \log(g_n(f, \epsilon, K))$ , e ainda  $g(f, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(f, \epsilon, K)$ . Da mesma forma, a entropia de  $f$  é dada quando tomarmos  $K = M$ .

Mostremos agora que as duas definições são equivalentes.



**Proposição 1.7.** *Tem-se  $g(f, M) = s(f, M)$*

*Demonstração.* Afirmamos que  $g_n(f, \epsilon, M) \leq s_n(f, \epsilon, M) \leq g_n(f, \frac{\epsilon}{2}, M)$ . De fato, seja  $E \subset M$  um conjunto  $(n, \epsilon)$  separado com cardinalidade máxima. Então dado qualquer  $y \in M - E$  temos que  $E \cup \{y\}$  não é um conjunto  $(n, \epsilon)$  separado. Portanto, existe  $x \in E$  tal que para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  temos  $d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon$ . Isso prova que  $E$  é um conjunto  $(n, \epsilon)$  gerador de  $M$ . Logo  $g_n(f, \epsilon, M) \leq s_n(f, \epsilon, M)$ .

Seja agora  $E \subset M$  um conjunto  $(n, \epsilon)$  separado e seja  $F \subset M$  um conjunto  $(n, \frac{\epsilon}{2})$  gerador de  $M$ . Dado qualquer  $x \in E$  existe algum ponto  $y \in F$  tal que  $d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon$  para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Defina a aplicação  $\phi : E \rightarrow F$  considerando  $\phi(x)$  sendo qualquer ponto  $y$  nessas condições. Seja  $x, z \in E$  tais que  $\phi(x) = y = \phi(z)$ , então temos:

$$d(f^i(x), f^i(z)) \leq d(f^i(x), f^i(y)) + d(f^i(y), f^i(z)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Como  $E$  é  $(n, \epsilon)$  separado, temos  $x = z$ . Logo  $\phi$  é injetiva. Como  $E$  e  $F$  são arbitrários, temos  $s_n(f, \epsilon, M) \leq g_n(f, \frac{\epsilon}{2}, M)$ .

Assim, dado  $\epsilon > 0$  temos:

$$\begin{aligned} g(f, \epsilon, M) &= \limsup_n \frac{1}{n} \log(g_n(f, \epsilon, M)) \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log(s_n(f, \epsilon, M)) \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log(g_n(f, \frac{\epsilon}{2}, M)) \end{aligned}$$

Tomando o limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} g(f, M) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(f, \epsilon, M) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s(f, \epsilon, M) \\ &= s(f, M) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(f, \frac{\epsilon}{2}, M) = g(f, M). \end{aligned}$$

□

**Definição 1.8.** *Sejam  $M, N$  espaços topológicos compactos.  $g : N \rightarrow N$  e  $f : M \rightarrow M$  aplicações contínuas. Dizemos que  $g$  é um fator topológico de  $f$  se existe uma aplicação  $h : M \rightarrow N$  contínua sobrejetiva satisfazendo  $h \circ f = g \circ h$ . Se  $h : M \rightarrow N$  for um homeomorfismo e  $f = h^{-1} \circ g \circ h$  então dizemos que  $f$  e  $g$  são conjugados topologicamente. A aplicação  $h$  é então dita uma semiconjugação de  $f$  e  $g$*

Mostremos agora que a entropia é um invariante por conjugação topológica.

**Proposição 1.9.** *Sejam  $M, N$  espaços métricos compactos e  $g : N \rightarrow N$  é um fator topológico de  $f : M \rightarrow M$  então  $h_{top}(g) \leq h_{top}(f)$ . Em particular se  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas então  $h_{top}(g) = h_{top}(f)$ .*

*Demonstração.* Seja  $h$  a semiconjugação tal que  $h \circ f = g \circ h$ ,  $h(M) = N$  e  $d_M, d_N$  as distâncias em  $M$  e  $N$ , respectivamente.

Como  $h$  é uniformemente contínua, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que  $d_M(x_1, x_2) < \delta(\epsilon)$  então  $d_N(h(x_1), h(x_2)) < \epsilon$ . Dessa forma, a imagem por  $h$  da bola dinâmica  $B_{d_M}(f, \delta(\epsilon), n)$  de  $f$  está contida na bola  $B_{d_N}(g, \epsilon, n)$  de  $g$ , e conseqüentemente  $g_{d_M}(f, \delta(\epsilon), n) \geq g_{d_N}(g, \epsilon, n)$ .

Assim

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log(g_{d_M}(f, \delta(\epsilon), n)) \geq \limsup_n \frac{1}{n} \log(g_{d_N}(g, \epsilon, n))$$

logo

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log(g_{d_M}(f, \delta(\epsilon), n)) \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log(g_{d_N}(g, \epsilon, n)) = h_{top}(g)$$

A primeira parte está provada. Na hipótese de conjugação, basta observar que  $f$  também será um fator topológico de  $g$  e aplicar o que já provamos.  $\square$

A priori a entropia topológica poderia depender da métrica. Mostremos que a entropia depende apenas da topologia. De fato, seja  $M$  um espaço métrico compacto e  $d_0, d_1$  métricas induzindo a mesma topologia em  $M$ . Seja então uma dinâmica contínua  $f : M \rightarrow M$ . Notemos que  $f : (M, d_0) \rightarrow (M, d_0)$  é conjugado a  $f : (M, d_1) \rightarrow (M, d_1)$  pelo homeomorfismo  $h : (M, d_0) \xrightarrow{x \mapsto x} (M, d_1)$ . Em particular teremos que a entropia topológica de  $f$  calculada por  $d_0$  é a mesma que calculado por  $d_1$ .

A definição de entropia topológica estende-se facilmente para o contexto de fluxos contínuos  $X^t = \{X^t : M \rightarrow M : t \in \mathbb{R}\}$  num espaço métrico compacto  $M$ .

Seja  $K \subset M$ . Dizemos que um conjunto  $\mathcal{E} \subset K$  é um conjunto  $(T, \epsilon)$ -separado em  $K$  se a bola dinâmica  $B(x, T, \epsilon)$  de cada  $x \in \mathcal{E}$  não contém nenhum outro elemento de  $\mathcal{E}$ .

Denotamos por  $s_T(\phi, \epsilon, K)$  a cardinalidade maximal de um conjunto  $(T, \epsilon)$ -separado  $\mathcal{E} \subset K$ .

**Definição 1.10.** *A entropia topológica para um fluxo  $\phi^t : M \rightarrow M$  em  $K$  é dada por:*

$$h_{top}(X^t, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log(s_T(\phi, \epsilon, K))$$

**Definição 1.11.** *A entropia topológica de  $(X^t), h_{top}((X^t))$  é definida tomando  $K = M$  na definição acima.*

**Observação:** Dada  $X^t : M \rightarrow M$  um fluxo contínuo num espaço métrico compacto  $M$ . Dizemos que um ponto  $x \in M$  é um *ponto de entropia* se para toda vizinhança compacta de  $x$  a entropia calculada em tal vizinhança é igual a entropia de todo o sistema.

**Definição 1.12.** *Seja  $X^t : M \rightarrow M$  um fluxo contínuo numa espaço métrico compacto  $M$ . Dado  $K \subset M$ ,  $\epsilon > 0$  e  $T \in \mathbb{R}^+$ , um conjunto  $\mathcal{E} \subset K$  é um conjunto  $(T, \epsilon)$  gerador de  $K$ , se para todo  $x \in K$  existe  $y \in \mathcal{E}$  tal que  $d(X^t(x), X^t(y)) < \epsilon$  para todo  $t \in [0, T]$ . Isso quer dizer que*

$$K \subset \cup_{y \in \mathcal{E}} B(y, T, \epsilon)$$

Denotamos por  $g_T((X^t)_t, \epsilon, K)$  a menor cardinalidade de um conjunto  $(T, \epsilon)$  gerador e  $g((X^t)_t, \epsilon, K) := \limsup_n \frac{1}{n} \log(g_n((X^t)_t, \epsilon, K))$ , e ainda  $g((X^t)_t, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g((X^t)_t, \epsilon, K)$ . Da mesma forma, a entropia de  $(X^t)_t, h_{top}((X^t)_t)$ , é definida quando tomarmos  $K = M$  na definição acima.

Da mesma forma que no caso discreto, temos  $s(X^t, M) = g(X^t, M)$ . Para provar isso, basta usar a próxima proposição e a demonstração do caso discreto, proposição 1.7.

**Proposição 1.13.**  $h_{top}((X^t)_t) = h_{top}(X^1)$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{E} \subset M$  um subconjunto  $(T, \epsilon)$ -gerador para  $M$  relativamente ao fluxo  $(X^t)_t$ . Então  $\mathcal{E}$  é um conjunto  $(n, \epsilon)$ -gerador para  $M$  relativamente ao tempo 1, qualquer que seja  $n \leq T + 1$ . Em particular,  $g_n(X^1, \epsilon, M) \leq g_n((X^t)_t, \epsilon, M)$ . Segue-se que

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log(g_n(X^1, \epsilon, M)) \leq \limsup_T \frac{1}{T} \log(g_T((X^t)_t, \epsilon, M)).$$

Por compacidade e continuidade, para cada  $\epsilon > 0$  podemos encontrar  $\delta > 0$ ,  $\delta \in (0, \epsilon)$  tal que se  $d(x, y) < \delta$  então  $\max_{0 \leq t \leq 1} d(X^t(x), X^t(y)) < \epsilon$ . Se  $\mathcal{E} \subset M$  é um conjunto  $(n, \delta)$ -gerador para  $M$  relativamente a  $X^1$  então  $\mathcal{E}$  é um conjunto  $(T, \epsilon)$ -gerador para  $M$  relativamente ao fluxo  $(X^t)_t$ , qualquer que seja  $T \leq n$ . Em particular,  $g_T((X^t)_t, \epsilon, M) \leq g_n(X^1, \delta, M)$ . Segue-se que

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log(g_n(X^1, \epsilon, M)) \geq \limsup_T \frac{1}{T} \log(g_T((X^t)_t, \delta, M)).$$

Fazendo agora  $\epsilon$  e  $\delta$  tenderem a zero, obtemos que  $g((X^t)_t, M) \leq g(X^1, M)$ , como afirmamos.  $\square$

Assim como no caso discreto, também iremos provar que a entropia topológica de fluxos é preservada por conjugação topológica.

**Definição 1.14.** *Seja  $\varphi^t : M \rightarrow M$  e  $\phi^t : N \rightarrow N$  fluxos contínuos definidos em espaços métricos compactos  $M, N$ .  $\phi$  é um fator topológico de  $\varphi$  ou  $\phi$  é semiconjugado a  $\varphi$  se existe uma função contínua sobrejetiva  $h : M \rightarrow N$  tal que  $h(\varphi(t, x)) = \phi(t, h(x))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se  $h$  é um homeomorfismo, então dizemos que  $\varphi$  e  $\phi$  são conjugados.*

**Proposição 1.15.** *Sejam  $M, N$  espaços métricos compactos e  $\phi^t : N \rightarrow N$  contínuo é um fator topológico de  $\varphi^t : M \rightarrow M$  contínuo. Então  $h_{top}(\phi^t) \leq h_{top}(\varphi^t)$ . Em particular se  $\varphi^t$  e  $\phi^t$  são topologicamente conjugadas então  $h_{top}(\varphi^t) = h_{top}(\phi^t)$ .*

*Demonstração.* Basta usar a proposição (1.13) e depois utilizar a proposição (1.9).  $\square$

A proposição anterior não é válida se em vez de conjugação supormos equivalência topológica, pois seja  $X^t : M \rightarrow M$  um fluxo contínuo com entropia não nula e consideremos  $X^{2t} : M \rightarrow M$ . Claramente os fluxos são topologicamente equivalentes, basta tomar o homeomorfismo  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\tau(t) = \frac{t}{2}$ , mas  $h_{top}((X^t)_t) = h_{top}((X^1)) \neq h_{top}(X^{2t}) = h_{top}(X^2)$ , usamos então que no caso discreto que tomando  $f : M \rightarrow M$  temos  $h_{top}(f^2) = 2h_{top}(f)$ . (Ver [KH99])

Agora vamos apresentar uma definição de pressão topológica  $P(f, \phi)$  de uma dinâmica  $f$  e um potencial  $\phi$  em termos de conjuntos separados. A pressão topológica desempenha o mesmo papel que entropia, mas agora levamos em conta o peso que um dado potencial atribui a cada ponto do espaço. Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação contínua num espaço métrico compacto  $M$  e  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua.

Dados  $n \geq 1$  e  $\epsilon > 0$ , definimos

$$s_n(f, \phi, \epsilon) := \sup_{\mathcal{E}} \left\{ \sum_{x \in \mathcal{E}} e^{\phi_n(x)} \right\}$$

onde  $\mathcal{E}$  é um conjunto  $(n, \epsilon)$ -separado em  $M$ . Definimos:

$$s(f, \phi, \epsilon) = \limsup_n \frac{1}{n} \log(s_n(f, \phi, \epsilon))$$

**Definição 1.16.** *A pressão topológica de  $f$  com relação ao potencial  $\phi$  é dada por*

$$P(f, \phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s(f, \phi, \epsilon)$$

Apresentaremos a seguir uma definição de pressão topológica  $P(X^t, \phi)$  de um fluxo  $X^t$  e um potencial  $\phi$  em termos de conjuntos separados.

Seja  $X^t : M \rightarrow M$  um fluxo contínuo num espaço métrico compacto  $M$  e  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua.

Dados  $T \geq 0$  e  $\epsilon > 0$ , definimos

$$s_T(X^t, \phi, \epsilon) := \sup_{\mathcal{E}} \left\{ \sum_{x \in \mathcal{E}} e^{\int_0^T \phi(X^s(x)) ds} \right\}$$

onde  $\mathcal{E}$  é um conjunto  $(T, \epsilon)$ -separado maximal em  $M$ . Em seguida, como anteriormente, definimos:

$$s(X^t, \phi, \epsilon) = \limsup_T \frac{1}{T} \log(s_T(X^t, \phi, \epsilon))$$

**Definição 1.17.** *A pressão topológica de  $X^t$  com relação ao potencial  $\phi$  é dada por*

$$P(X^t, \phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s(f, \phi, \epsilon)$$

## 1.2 Dinâmicas simbólicas

Consideremos para cada número natural  $N \geq 2$  o espaço

$$\Sigma := \{\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots); \omega_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \forall i \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, \dots, N-1\}^{\mathbb{Z}}$$

das sequências bilaterais de  $N$  símbolos e o espaço unilateral análogo

$$\Sigma^+ := \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots); \omega_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \forall i \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 1, \dots, N-1\}^{\mathbb{N}_0}$$

Notando que  $\Sigma$  é um produto direto de  $\mathbb{Z}$  cópias do conjunto  $\{0, 1, \dots, N-1\}$  podemos munir este com a topologia discreta e usar a topologia produto para definir uma topologia em  $\Sigma$ .

Notemos que se considerarmos o conjunto finito  $\{0, 1, \dots, N-1\}$  como o grupo finito  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  então aquele produto é um grupo topológico comutativo compacto.

**Definição 1.18.** *Fixados inteiros  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  e números  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  chamamos ao conjunto*

$$C_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{n_1 < n_2 < \dots < n_k} := \{\omega \in \Sigma; \omega_{n_i} = \alpha_i, i = 1, \dots, k\}$$

*um cilindro e ao número  $k$  de dígitos fixos o comprimento do cilindro*

Os cilindros no espaço  $\Sigma^+$  são definidos de modo análogo.

Uma forma alternativa de definir uma topologia em  $\Sigma$  (e portanto em  $\Sigma^+$ ) é declarar que todos os cilindros são conjuntos abertos e que formam uma base da topologia. Então todo cilindro é também um conjunto fechado, pois o complementar de um cilindro é uma união finita de cilindros. Um conjunto aberto arbitrário é uma união enumerável de cilindros.

Ainda uma outra forma de introduzir a topologia é definindo a distância:

$$d(\omega, \omega') := \frac{1}{2^N}$$

sempre que  $w_i = w'_i$  para todo  $|i| \leq N$  no caso bilateral (resp. para todo  $0 \leq i \leq N$  no caso unilateral).

É importante mencionar que todas as noções citadas acima induzem a mesma topologia de Tychonoff logo  $\Sigma$  é um espaço métrico compacto.

**Definição 1.19** (Transformação shift). *Consideremos o desvio para a esquerda em  $\Sigma$*

$$\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma \text{ dada por } \sigma(\omega) = \omega' = (\dots, \omega'_0, \omega'_1, \dots)$$

onde  $\omega'_n = \omega_{n+1}$ .  $\sigma$  é uma transformação bijetora que transforma cilindros em cilindros. Logo é um homeomorfismo de  $\Sigma$ . De modo análogo definimos o desvio unilateral que será apenas uma transformação contínua não invertível do espaço  $\Sigma^+$  nele próprio, mas será um homeomorfismo local.

**Subshift do tipo finito:** Consideramos aqui um caso especial de sistema dinâmicos simbólicos.

Seja  $A = (A_{i,j})_{i,j=0}^{N-1}$  uma matriz  $N \times N$  cujas entradas  $a_{i,j}$  são zeros ou uns. Seja

$$\Sigma_A := \{w \in \Sigma : a_{w_n, w_{n+1}} = 1, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

**Definição 1.20.** *A restrição*

$$\sigma|_{\Sigma_A} := \sigma_A$$

*diz-se um subshift bilateral do tipo finito determinada pela matriz  $A$ .*

Vale ainda mencionar o caso unilateral.

Seja  $A = (A_{i,j})_{i,j=0}^{N-1}$  uma matriz  $N \times N$  cujas entradas  $a_{i,j}$  são zeros ou uns. Seja

$$\Sigma_A := \{w \in \Sigma^+ : a_{w_n, w_{n+1}} = 1, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

**Definição 1.21.** *A restrição*

$$\sigma|_{\Sigma_A} := \sigma_A$$

*diz-se um subshift unilateral do tipo finito determinada pela matriz  $A$ .*

**Exemplo 1.22.** *Tomando  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ , considere todas as seqüências binárias nas quais não existem dois 1's adjacentes. Essa restrição pode ser posta pela seguinte matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*O subshift determinado é chamado de subshift da razão áurea.*

### 1.3 Dinâmicas expansoras

**Definição 1.23** (Dinâmicas expansoras). *Uma transformação contínua  $f : M \rightarrow M$  num espaço métrico compacto  $M$  diz-se expansora se existem constantes  $\sigma > 1$  e  $\rho > 0$  tais que para todo  $p \in M$ , a imagem de bola  $B(p, \rho)$  contém uma vizinhança do fecho de  $B(f(p), \rho)$  e*

$$d(f(x), f(y)) \geq \sigma d(x, y) \text{ para todo } x, y \in B(p, \rho)$$

**Observação:** Às vezes na definição de dinâmica expansora, ao invés de pedirmos a condição sobre a imagem da bola podemos pôr uma condição mais forte, mas que na prática é mais facilmente checável: basta pedir que  $f$  seja aberta.

**Proposição 1.24.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  diferenciável em  $M$  variedade riemanniana compacta, então  $f$  é expansora se, e somente se existir  $\sigma > 1$  e alguma métrica riemanniana em  $M$  tal que*

$$\| Df(x)v \| \geq \sigma \| v \| \text{ para todo } x \in M \text{ e todo } v \in T_x M$$

*Demonstração.* Pelo teorema da função implícita,  $f$  é um difeomorfismo local. Para cada  $x \in M$  seja  $\delta_x$  o tamanho da vizinhança tal que  $f_{B(x, \delta_x)}$  é um difeomorfismo com a sua imagem. Cobrimos  $M$  com tais bolas, e como  $M$  é compacta, podemos tomar uma subcobertura finita  $\{B(x, \delta_i), i = 1, \dots, n\}$ . Seja  $\delta := \min_i \{\delta_i\}$ . Podemos tomar ainda  $\delta_1 > 0$  tal que toda componente conexa da pré-imagem de qualquer bola de raio  $\delta_1$  tenha diâmetro menor que  $\delta_0$ . Seja  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $d(x, y) < \epsilon_0$  implique que  $d(f(x), f(y)) < \frac{\delta_1}{2}$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  com  $\gamma(0) = f(x)$  e  $\gamma(1) = f(y)$  uma curva diferenciável unindo  $f(x)$  e  $f(y)$  e contida numa bola de raio  $\delta_1$ . Então a curva  $\tilde{\gamma}$ , univocamente definida por  $\tilde{\gamma}(0) = x$  e  $\tilde{\gamma}(1) = y$  e  $f(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$  é uma curva diferenciável unindo  $x$  a  $y$  e

$$Comp(\gamma) = \int_0^1 \| D_{\tilde{\gamma}(t)} f(\tilde{\gamma}(t)) \| dt \geq \sigma \int_0^1 \| \tilde{\gamma}'(t) \| dt = \sigma Comp(\tilde{\gamma})$$

Atendendo agora a que  $d(f(x), f(y)) = \inf_{\gamma} \{Comp(\gamma)\}$  onde o ínfimo é tomado sobre todas as curvas diferenciáveis unindo  $f(x)$  e  $f(y)$  contidas na bola de raio  $\delta_1$  com centro em  $f(x)$ , obtemos

$$d(f(x), f(y)) \geq \sigma d(x, y)$$

Se agora  $M$  é uma variedade Riemanniana e  $f : M \rightarrow M$  é uma transformação expansora, então segue que para todo  $x$  a definição que a aplicação derivada  $D_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$  é expansora relativamente à norma gerada pela métrica Riemanniana, isto é, existe  $\mu > 1$  tal que para todo  $x \in M$  e  $v \in T_x M$  temos

$$\| D_x f(v) \| \geq \mu \| v \|$$

□

**Exemplo 1.25.** Considere a transformação não invertível da circunferência  $E_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , que em notação multiplicativa é dada por

$$E_2(z) = z^2, |z| = 1$$

e em notação aditiva

$$E_2(x) = 2x \pmod{1}$$

Pela proposição anterior  $E_2$  é uma transformação expansora. Mais geralmente, as transformações

$$E_m : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \text{ dada por } E_m(x) = mx \pmod{1},$$

onde  $m$  é um inteiro com valor absoluto maior que 1, são também expansoras.

Em [KH99] é mostrado que essas transformações são topologicamente transitivas (possui uma órbita densa) e o conjunto das órbitas periódicas é denso.

**Exemplo 1.26.** Considere  $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  o shift unilateral do tipo finito associado a uma matriz de transição  $A$ . Recordamos em  $\Sigma_A$  a distância definida por

$$d((x_n)_n, (y_n)_n) = 2^{-N}, N = \inf\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$$

Afirmamos que  $\sigma$  é uma transformação expansora. De fato, fixamos  $\rho \in [1/2, 1)$  e  $\delta = 2$ . A bola de raio  $\rho$  em torno de qualquer ponto  $(p_n)_n \in \Sigma_A$  é o cilindro  $[0, p_0]_A = \{(x_j)_j \in \Sigma_A : x_0 = p_0\}$  que contém esse ponto. Da distância definida acima, temos

$$d((x_{n+1})_n, (y_{n+1})_n) = 2d((x_n)_n, (y_n)_n)$$

para quaisquer  $(x_n)_n, (y_n)_n$  no cilindro  $[0, p_0]_A$ . Além disso  $\sigma([0, p_0]_A)$  é a união de todos os cilindros  $[0, q]$  tais que  $A_{p_0, q} = 1$ . Em particular ele contém o cilindro  $[0, p_0]_A$ . Como os cilindros são abertos e fechados de  $\Sigma_A$ , isto mostra que a imagem da bola de raio  $\rho$  em torno de  $(p_n)_n$  contém uma vizinhança da bola de raio  $\rho$  em torno de  $(p_{n+1})_n$ . Assim todo shift unilateral do tipo finito é uma transformação expansora.

**Exemplo 1.27.** Seja  $J \subset [0, 1]$  uma união finita de (dois ou mais) intervalos compactos disjuntos. Considere uma aplicação  $f : J \rightarrow [0, 1]$  tal que a restrição de  $f$  a cada componente conexa de  $J$  é um difeomorfismo sobre  $[0, 1]$ . Suponha que existe  $\sigma > 1$  tal que

$$|f'(x)| \geq \sigma \text{ para todo } x \in J.$$



Denote por  $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(J)$

Segue-se imediatamente da definição que  $\Lambda$  é compacto. Em [OV03] é mostrado que  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor e que  $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ , e a restrição  $f|_{\Lambda}$  é uma transformação expansora.

**Exemplo 1.28.** *Seja  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  um difeomorfismo local de classe  $C^2$  com grau maior que 1 (o grau topológico é a constante definida como o número de pré-imagens de todo ponto). Suponha que os pontos periódicos de  $f$  são hiperbólicos, ou seja,  $|(f^n)'(x)| \neq 1$  para todo  $x \in \text{Fix}(f^n)$  e todo  $n \geq 1$ . Seja  $\Lambda$  o complementar da união das bacias de atração dos pontos periódicos atratores de  $f$  ( $|(f^n)'(x)| < 1$ ). Então a restrição  $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é uma transformação expansora. Esse resultado é consequência de um teorema devido a Mañé (ver [Man85]).*

## 1.4 Hiperbolicidade

**Definição 1.29.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana fechada,  $d$  a distância Riemanniana induzida em  $M$ ,  $\| \cdot \|$  a norma Riemanniana e  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo. Um conjunto  $\Lambda \subset M$  invariante por  $f$  é dito hiperbólico para  $f$  se existe  $C > 0$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  e para todo  $x \in \Lambda$  existem  $E^s(x), E^u(x) \subset T_x M$  tais que:*

1.  $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$
2.  $\| Df_x^n(v^s) \| \leq C\lambda^n \| v^s \|, \forall v^s \in E^s(x), n \geq 0$
3.  $\| Df_x^{-n}(v^u) \| \leq C\lambda^n \| v^u \|, \forall v^u \in E^u(x), n \geq 0$
4.  $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$  e  $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$

**Observação:** No caso de transformações lineares  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $A$  é hiperbólica se todos os autovalores da matriz associada à transformação  $A$  têm norma diferente de 1. Assim se  $p$  é um ponto fixo para uma transformação diferenciável  $f : M \rightarrow M$ , então  $\{p\}$  é hiperbólico se  $Df_p$  for uma matriz hiperbólica. Mais geralmente, seja  $p$  um ponto periódico de período  $n$  para o difeomorfismo de classe  $C^1$   $f : M \rightarrow M$  numa variedade compacta diferenciável  $M$ , então a órbita de  $p$  é um conjunto hiperbólico para  $f$  se  $(Df^n)_p : T_p M \rightarrow T_p M$  é uma transformação linear hiperbólica.

Passemos a definição de conjuntos hiperbólicos localmente maximais.

**Definição 1.30.** *Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo  $f : U \subset M \rightarrow M$ . Se existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $\Lambda$  tal que  $\Lambda = \Lambda_V^f := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\bar{V})$ , então  $\Lambda$  é dito localmente maximal.*

**Exemplo 1.31** (Ferraduras de Smale). *Seja  $\Delta$  um retângulo em  $\mathbb{R}^2$  e  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo sobre sua imagem tal que a intersecção  $\Delta \cap f(\Delta)$  consiste de dois retângulos horizontais,  $\Delta_0$  e  $\Delta_1$ , e a restrição de  $f$  às componentes  $\Delta_i \subset f^{-1}(\Delta)$  é uma transformação hiperbólica linear, contraindo na direção vertical e expandindo na direção horizontal. Desse modo,  $\Delta_0$  e  $\Delta_1$  são retângulos "verticais". Seja  $\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(\Delta)$ .  $\Lambda \neq M$  é hiperbólico para  $f$ , ver ([KH99]).*

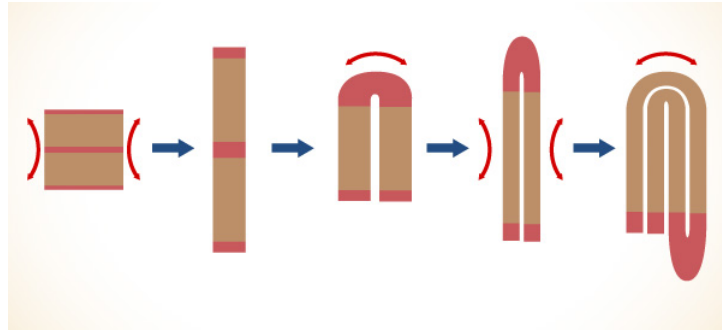


Figura 1.1: Descrição esquemática dos primeiros passos da construção do exemplo ferradura de Smale.

**Definição 1.32.** Um difeomorfismo de classe  $C^1$   $f : M \rightarrow M$  numa variedade compacta  $M$  diz-se um difeomorfismo de Anosov se  $M$  é um conjunto hiperbólico para  $f$ .

**Exemplo 1.33.**

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$$

O determinante da matriz associada a  $A$  é 1 e  $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ . Definimos a relação de equivalência em  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$(x, y) \approx (x', y'), \text{ se } (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$$

Assim  $A(x, y) \approx A(x', y')$ . Isso define uma aplicação

$$\hat{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x + y \pmod{1}, x + y \pmod{1})$$

que é um difeomorfismo de Anosov. Os valores próprios da matriz  $A$  são  $\lambda^\pm = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ , e a decomposição hiperbólica em cada ponto é obtida por translação para esse ponto dos subespaços próprios da matriz.

Mais geralmente, seja  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma matriz com entradas inteiras, com determinante 1 ou  $-1$  e sem valores próprios com módulo igual a 1, isto é, uma matriz hiperbólica. Definindo como acima a relação de equivalência em  $\mathbb{R}^m$

$$(x_1, \dots, x_m) \approx (y_1, \dots, y_m), \text{ se } (x_1 - y_1, \dots, x_m - y_m) \in \mathbb{Z}^m$$

Então  $L(\mathbb{Z}^m) = \mathbb{Z}^m$  e  $L$  é invertível em  $\mathbb{Z}^m$ . Logo  $L$  determina uma transformação invertível no toro  $\mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$  que tem propriedades muito semelhantes às discutidas no exemplo acima. A transformação obtida é um difeomorfismo de Anosov, Ver ([KH99]).

Para fluxos, a definição de hiperbolicidade é a seguinte:

**Definição 1.34.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana fechada,  $d$  a distância riemanniana induzida em  $M$ ,  $\| \cdot \|$  a norma riemanniana e  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  um fluxo diferenciável. Um conjunto  $\Lambda \subset M$  compacto  $\phi^t$ -invariante é dito hiperbólico para  $\phi^t$  se existe  $\lambda < 1 < \mu$  e para todo  $x \in \Lambda$  existem  $E^s(x), E^u(x) \subset T_x M$  tais que:*

1.  $T_x M = E_x^u \oplus \langle X \rangle \oplus E_x^v$ , onde  $X = \frac{d}{dt} \phi^t|_{t=0}$
2.  $\frac{d}{dt}|_{t=0} \phi^t(x) \in \langle X \rangle$  e  $\text{Dim.}(\langle X \rangle) = 1$ ;
3.  $D\phi^t(E_x^u) = E_{\phi^t(x)}^u$  e  $D\phi^t(E_x^v) = E_{\phi^t(x)}^v$ ;
4.  $\| D\phi^t|_{E_x^u} \| \leq \lambda^t$  e  $\| D\phi^{-t}|_{E_x^v} \| \leq \mu^{-t}$

**Definição 1.35.** *Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico para um fluxo diferenciável  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ . Se existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $\Lambda$  tal que  $\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi^t(\overline{V})$ , então  $\Lambda$  é dito localmente maximal.*

**Definição 1.36.** *Um fluxo  $\phi^t : M \rightarrow M$  de classe  $C^1$  numa variedade compacta  $M$  diz-se um fluxo de Anosov se  $M$  é um conjunto hiperbólico para  $\phi^t$ .*

Uma forma para obtermos fluxos de Anosov é construir um fluxo de suspensão cuja base é um difeomorfismo de Anosov e altura  $\rho := 1$ . Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo, consideramos o produto  $M \times \mathbb{R}$  com a relação de equivalência  $(x, 1) \approx (f(x), 0)$ . denotamos o quociente por essa relação por  $M_f = M \times \mathbb{R} / \approx$ .

**Exemplo 1.37.** *Dado um difeomorfismo Anosov  $f : M \rightarrow M$ , a suspensão  $X_f^t$  com altura  $\rho := 1$  de  $f$  é um fluxo de Anosov em  $M_f$ . De fato, seja  $TM = E_x^s \oplus E_x^u$  a decomposição contínua associada a  $f$ . definimos para  $(x, 0) \in M \times 0$*

$$E^{ss}(x, 0) = E_x^s \text{ e } E_{x,0}^{uu} = E_x^u$$

Quando  $(x, t) \in M \times [0, 1]$ , definimos

$$E_{(x,t)}^{ss} = D\phi_f^t(x, 0)(E_x^s) \text{ e } E_{(x,t)}^{uu} = D\phi_f^t(x, 0)(E_x^u)$$

Não é difícil observar que  $TM_f = E^{ss} \oplus X \oplus E^{uu}$ , onde  $X = \frac{d}{dt} X_f^t|_{t=0}$ .

**Exemplo 1.38** (Fluxo geodésico). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana compacta. O fibrado tangente  $TM$  é o espaço das duplas  $(x, v)$  em que  $x \in M$  e  $v$  é um vetor tangente à variedade no ponto  $x$ . denotamos por  $T^1 M$  o fibrado tangente unitário, formado pelas duplas  $(x, v) \in TM$  com  $\| v \| = 1$ . Segue-se da teoria das equações diferenciais que para cada  $(x, v) \in T^1 M$  existe uma única geodésica  $\gamma_{x,v} : \mathbb{R} \rightarrow M$  na variedade tal que  $\gamma_{x,v}(0) = x$  e  $\gamma'_{x,v}(0) = v$ . Além disso, a família de transformações definida por*

$$f^t : (x, v) \mapsto (\gamma_{x,v}(t), \gamma'_{x,v}(t))$$

é um fluxo no fibrado tangente unitário  $T^1M$ , que é chamado *fluxo geodésico* de  $M$ . Em ([An67]) é mostrado que se  $M$  é variedade compacta com curvatura seccional negativa então o fluxo geodésico é um fluxo de Anosov mixing.

**Definição 1.39.** Um ponto  $x \in M$  diz-se não-errante relativamente à transformação  $f : M \rightarrow M$  se para qualquer conjunto aberto  $U \ni x$  existe  $N > 0$  tal que  $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$ . o conjunto de todos os pontos não-errantes denota-se por  $\Omega(f)$  é um conjunto não vazio invariante por  $f$ .

Um ponto  $x \in M$  diz-se fixo relativamente à transformação  $f : M \rightarrow M$  se  $f(x) = x$ . Denotamos o conjunto dos pontos fixos de uma transformação  $f$  por  $Fix(f)$

Um ponto  $x \in M$  diz-se periódico de período relativamente à transformação  $f : M \rightarrow M$  se existe  $n$  tal que  $f^n(x) = x$ . Denotamos o conjunto dos pontos periódicos de  $f$  por  $Per(f)$

**Observação:** Para fluxos, as definições acima são semelhantes levando em conta o tempo contínuo e a devida definição de hiperbolicidade para fluxos.

**Definição 1.40.** Seja  $X^t : M \rightarrow M$  contínuo numa variedade compacta riemanniana  $M$ .  $X^t$  é axioma A se o conjunto dos não-errante  $\Omega(X^t)$  é um conjunto hiperbólico para  $(X^t)$  e o conjunto dos pontos periódicos é denso em  $\Omega(X^t)$ .

**Definição 1.41.** Seja  $M$  uma variedade riemanniana fechada,  $d$  a distância riemanniana induzida em  $M$ ,  $\| \cdot \|$  a norma riemanniana e  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo. Dizemos que  $f$  é axioma A se  $\Omega(f)$  for um conjunto hiperbólico para  $f$  e  $Per(f)$  é denso em  $\Omega(f)$

**Observação:** Em [Bow75] e [Sm67] é mostrado que todo Anosov satisfaz axioma A. Notemos também que o conjunto não-errante de um Axioma A sempre é localmente maximal (ver por exemplo [KH99]).

## 1.5 Propriedade de especificação

Na década de setenta em [Bow71] foi introduzido o conceito de especificação para sistemas dinâmicos, formulado da seguinte maneira:

Dado um número finito de pedaços de órbitas e um erro fixado, podemos encontrar um ponto cuja órbita sombreia, a menos de um erro fixado, cada pedaço de órbita e que o “tempo de pulo” de um pedaço de órbita para outro pode ser controlado em função do erro. Matematicamente:

**Definição 1.42.** Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N(\epsilon) \geq 1$ , que só depende de  $\epsilon$ , tal que para quaisquer pontos  $x_1, x_2, \dots, x_k \in M$  e tempos  $n_1, n_2, \dots, n_{k-1} \geq 0$  e para todos  $p_1, p_2, \dots, p_{k-1} \geq N(\epsilon)$  existe um ponto  $x \in M$  tais que:

$$\begin{aligned} d(f^j(x), f^j(x_1)) &\leq \epsilon, 0 \leq j \leq n_1 \\ d(f^{j+n_1+p_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}}(x), f^j(x_i)) &\leq \epsilon, 2 \leq i \leq k-1 \quad e \quad 0 \leq j \leq n_i \end{aligned}$$

Se para todo  $p_k \geq N(\epsilon)$  existir um  $x$  como descrito acima tal que  $f^{+n_1+p_1+\dots+n_{k-1}+p_{k-1}+p_k}(x) = x$ , dizemos que  $f$  satisfaz a propriedade de especificação periódica.

De maneira análoga definimos especificação para semifluxos.

**Definição 1.43.** Seja  $(X_t)_{t \geq 0}$  um semifluxo sobre um espaço métrico separável  $M$ . Dizemos que  $(X_t)_t$  tem a propriedade de especificação se dado  $\epsilon > 0$ , Existe  $T(\epsilon) > 0$ , que só depende de  $\epsilon$ , tal que para quaisquer pontos  $x_1, x_2, \dots, x_k \in M$  e tempos  $t_1, t_2, \dots, t_k \geq 0$  e para todos  $p_1, p_2, \dots, p_{k-1} \geq T(\epsilon)$  existe um ponto  $x \in M$  tais que:

$$d(X_t(x), X_t(x_1)) \leq \epsilon, \forall t \in [0, t_1]$$

e, se  $\bar{x}_i = X_{\sum_{j=0}^{i-1}(p_j+t_j)}(x) \in M$  então

$$d(X_t(\bar{x}_i), X_t(x_i)) < \epsilon, \forall t \in [0, t_i]$$

para todo  $2 \leq i \leq k$ .

Se para todo  $p_k \geq T(\epsilon)$  existir  $x$  que satisfaz a propriedade acima e tal que  $X_{\sum_{j=0}^k(p_j+t_j)}(x) = x$ , dizemos que  $(X^t)$  satisfaz a propriedade de especificação periódica.

**Observação:**Originalmente, a noção de especificação dada por *Bowen* era de especificação periódica. Notemos que especificação é equivalente a que o pulo após o sombreamento pode ser escolhido o mesmo, independente da quantidade de órbitas e do tamanho das órbitas.

**Definição 1.44.** Dizemos que uma dinâmica  $f : M \rightarrow M$  é transitiva se existe  $x \in M$  tal que  $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$  é denso em  $M$ .

Usaremos o lema a seguir para caracterizar dinâmicas transitivas.

**Lema 1.45.** Suponha que  $M$  é um espaço de Baire com base enumerável de abertos. Então  $f : M \rightarrow M$  é transitiva se, e somente se para todo par de abertos  $U, V$  existe  $k(U, V) \geq 1$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  é transitiva e seja  $x \in M$  um ponto cuja órbita  $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$  é densa em  $M$ . Então existe  $m \geq 1$  tal que  $f^m(x) \in U$  e (usando que  $\{f^i(x) : i > m\}$  também é denso) existe, digamos  $n > m$  tal que  $f^n(x) \in V$ . Tome  $k = n - m$ . Então  $f^m(x) \in f^k(U) \cap V$ . Isso prova que a condição é necessária.

prova-se agora que a condição é suficiente. Suponhamos que a condição de intersecção se verifica. Seja  $U_1, U_2, \dots$  uma base enumerável de conjuntos abertos de  $M$ . Assim para qualquer  $x \in M$  e qualquer conjunto aberto com  $x \in U \subset M$  existe  $n$  tal que  $x \in U_n \subset U$ . Para demonstrar a transitividade topológica é suficiente construir uma órbita que intersekte todos os conjuntos  $U_n$ . Por hipótese existe um natural  $N_1$  tal que  $f^{N_1}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ . Seja  $V_1$  um conjunto aberto não vazio tal que  $\bar{V}_1 \subset U_1 \cap f^{-N_1}(U_2)$ . Claramente  $\bar{V}_1$  é compacto. Existe um natural  $N_2$  tal que  $f^{N_2}(V_1) \cap U_3 \neq \emptyset$ . Novamente toma-se  $V_2$  aberto tal que  $\bar{V}_2 \subset V_1 \cap f^{-N_2}(U_3)$ . Por indução construímos uma sequência encaixante de conjuntos abertos  $V_n$  tais que  $\bar{V}_{n+1} \subset V_n \cap f^{-N_{n+1}}(U_{n+2})$ . A intersecção  $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{V}_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} V_n \neq \emptyset$  pois  $\bar{V}_n$  é compacto. Se  $x \in V$  então  $f^{N_{n-1}}(x) \in U_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Definição 1.46.** Dizemos que uma dinâmica  $f : M \rightarrow M$  é *mixing*, quando dados dois abertos  $U, V \subset M$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset, \forall m \geq n$ .

**Proposição 1.47.** Seja  $f : M \rightarrow M$  uma dinâmica com especificação sendo  $M$  espaço métrico compacto. Então  $f$  é *mixing*.

*Demonstração.* Dados abertos  $U, V \subset M$  tomamos dois pontos  $x_1 \in U, x_2 \in V$ , tomamos as bolas  $B_i(x_i, \epsilon)$ ,  $i = 1, 2$  de modo que  $B_1 \subset U$  e  $B_2 \subset V$ . aplicamos especificação com tempos  $n_1 = 0, n_2 = 0$  e erro  $\delta = \frac{\epsilon}{17}$ . Assim existe  $y \in B(x_1, \delta)$  e  $N(\delta) \geq 1$  tais que para todo  $n \geq N(\delta)$  temos  $f^n(y) \in B(x_2, \delta)$ . Assim,  $f^n(B(x_1, \epsilon)) \cap B(x_2, \epsilon) \neq \emptyset$ , para todo  $n \geq N(\delta)$ . Logo  $f$  é *mixing*.  $\square$

O próximo resultado nos diz que a propriedade de especificação é preservada por fatores topológicos, mais precisamente

**Proposição 1.48.** Seja  $f : M \rightarrow M$  com especificação e  $g : N \rightarrow N$  um fator topológico de  $f$ , com  $M, N$  espaços métricos compactos. Seja  $h : M \rightarrow N$  contínua sobrejetiva com  $g \circ h = h \circ f$ . Então  $g$  possui a propriedade de especificação. Ademais, se  $f$  tem especificação periódica então  $g$  tem especificação periódica.

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$ ,  $x_1, \dots, x_k \in N$  e  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  inteiros quaisquer, sejam  $\{y_i \in M, i = 1, \dots, k\}$  tais que  $h(y_i) = x_i$ . O ponto importante aqui é que como  $h$  é contínua num compacto ela é uniformemente contínua, logo existe  $\delta > 0$  tal que

$$d_M(z, w) < \delta \Rightarrow d_N(h(z), h(w)) < \epsilon \text{ para todo } z, w \in M$$

Como  $f$  possui a propriedade de especificação, existe  $N(\delta) \geq 1$  tal que para todos  $p_1, \dots, p_{k-1} \geq N(\delta)$  existe  $y \in M$  tais que

$$\begin{aligned} d_M(f^j(y), f^j(y_1)) &\leq \delta, 0 \leq j \leq n_1 \\ d_M(f^{j+n_1+p_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}}(y), f^j(y_i)) &\leq \delta, 2 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq n_i \end{aligned}$$

Logo tomando  $x = h(y)$  temos:

$$\begin{aligned} d_N(g^j(x), g^j(x_1)) &= d_N(g^j(h(y)), g^j(h(y_1))) \\ &= d_N(h(f^j(y)), h(f^j(y_1))) < \epsilon, \end{aligned}$$

para  $0 \leq j \leq n_1$ , e

$$d_N(g^{j+n_1+p_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}}(x), g^j(x_i)) = d_N(h(f^{j+n_1+p_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}}(y)), h(f^j(y_i))) \leq \epsilon$$

para  $2 \leq i \leq k$  e  $0 \leq j \leq n_i$ . Assim concluímos que  $g$  tem especificação.

Antes de mostrarmos a outra afirmação, observamos que se  $g \circ h = h \circ f$ , se supormos por indução que  $g^n \circ h = h \circ f^n$ , então

$$h \circ f^{n+1}(x) = h \circ f^n(f(x)) = g^n \circ h(f(x)) = g^n(g(h(x))) = g^{n+1}h(x).$$

Assim, por indução o resultado vale para todo  $n$ .

Suponhamos que  $f$  tem especificação periódica, mostremos que  $g$  também tem especificação periódica. De fato, suponhamos que para todo  $p_{k+1} \geq N(\epsilon)$ ,  $p_{k+1} \in \mathbb{N}$  podemos encontrar  $y \in M$  que realiza a propriedade de especificação e tal que  $f^{n_1+p_1+\dots+n_k+p_k+p_{k+1}}(y) = y$ . Logo

$$g^{n_1+p_1+\dots+n_k+p_k+p_{k+1}}(h(y)) = h(f^{n_1+p_1+\dots+n_k+p_k+p_{k+1}}(y)) = h(y).$$

□

As definições anteriores podem se aplicadas também para contexto de fluxos.

**Definição 1.49.** Dizemos que um fluxo  $X^t : M \rightarrow M$  é transitivo se existe  $x \in M$  tal que  $\{X^t(x) : t \in \mathbb{R}^+\}$  é denso em  $M$ .

**Definição 1.50.** Dizemos que um fluxo  $X^t : M \rightarrow M$  é mixing, quando dados dois abertos  $U, V \subset M$  existe  $T \in \mathbb{R}^+$  tais que  $X^s(U) \cap V \neq \emptyset, \forall s \geq T$ .

**Observação:** Resultados análogos aos anteriores também são válidos para fluxos.



**Proposição 1.51.** *Seja  $\phi^t : M \rightarrow M$  um fluxo contínuo com especificação e  $\varphi^t : N \rightarrow N$  um fluxo contínuo, com  $M, N$  espaços métricos compactos e tal que existe  $h : M \rightarrow N$  contínua sobrejetiva com  $\phi^t \circ h = h \circ \varphi^t$ . Então  $\varphi^t$  possui a propriedade de especificação. Ademais, se  $\phi^t$  tem especificação periódica então  $\varphi^t$  tem especificação periódica.*

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$ ,  $x_1, \dots, x_k \in N$  e  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}^+$  quaisquer, sejam  $\{y_i \in M, i = 1, \dots, k\}$  tais que  $h(y_i) = x_i$ . Como no caso discreto, usaremos o fato de que  $h$  uniformemente contínua, logo existe  $\delta > 0$  tais que

$$d_M(z, w) < \delta \Rightarrow d_N(h(z), h(w)) < \epsilon \text{ para todo } z, w \in M$$

Como  $\phi^t$  possui a propriedade de especificação, existe  $T(\delta) \geq 1$  tal que para todos  $p_1, \dots, p_{k-1} \geq T(\delta)$  existe  $y \in M$  tais que

$$\begin{aligned} d_M(\phi^t(y), \phi^t(y_1)) &\leq \delta, j \in [0, t_1] \\ d_M(\phi^{t+t_1+p_1+\dots+t_{i-1}+p_{i-1}}(y), \phi^t(y_i)) &\leq \delta, 2 \leq i \leq k, j \in [0, t_i] \end{aligned}$$

Logo tomando  $x = h(y)$  temos:

$$\begin{aligned} d_N(\varphi^t(x), \varphi^t(x_1)) &= d_N(\varphi^t(h(y)), \varphi^t(h(y_1))) \\ &= d_N(h(\phi^t(y)), h(\phi^t(y_1))) < \epsilon, \end{aligned}$$

para  $j \in [0, t_1]$ , e

$$d_N(\varphi^{t+t_1+p_1+\dots+t_{i-1}+p_{i-1}}(x), \varphi^t(x_i)) = d_N(h(\phi^{t+t_1+p_1+\dots+t_{i-1}+p_{i-1}}(y)), h(\varphi^t(y_i))) \leq \epsilon$$

para  $2 \leq i \leq k$  e  $j \in [0, t_i]$ .

Suponhamos agora que  $\varphi^t$  satisfaz a propriedade de especificação periódica. Afir-mamos que  $\phi$  também possui especificação periódica. De fato, suponhamos que para todo  $p_{k+1} \geq T(\epsilon)$ ,  $p_{k+1} \in \mathbb{R}^+$  exista  $y \in M$  que realiza a especificação de  $\varphi^t$  e tal que  $\phi^{t_1+p_1+\dots+t_k+p_k+p_{k+1}}(y) = y$ . Logo

$$\varphi^{t_1+p_1+\dots+t_k+p_k+p_{k+1}}(h(y)) = h(\phi^{t_1+p_1+\dots+t_k+p_k+p_{k+1}}(y)) = h(y).$$

□

**Observação:** A preservação por conjugação implica que especificação não depende da métrica definida, mas apenas da topologia, ou seja, se trocarmos a métrica por uma outra que gera a mesma topologia preservaremos especificação.

Já vimos que a propriedade de especificação implica em ser topologicamente mixing. Nos perguntamos então se a recíproca vale também no contexto geral. A resposta é não!

**Exemplo 1.52.** *Embora, para todo  $\beta > 1$  real, todos os mapas  $T_\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definidos por  $T_\beta(x) = \beta x \bmod 1$  são topologicamente mixing, o conjunto dos  $\beta > 1$  tais que os mapas  $T_\beta$  têm especificação é denso, mas tem medida de Lebesgue zero. Além disso genericamente  $T_\beta$  não tem especificação, isto é, o conjunto dos  $\beta > 1$  tais que  $T_\beta$  não tem especificação é um residual.*

*Demonstração.* Ver [Jb97],[Js97] □

A despeito disso, quando a dinâmica for definida no intervalo então vale:

**Teorema 1.53.** *Se  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é contínua e mixing então  $f$  possui a propriedade de especificação.*

*Demonstração.* Ver [Blo82] □

**Exemplo 1.54.** *Para cada parâmetro  $c > 0$  seja*

$$\begin{aligned} f_c : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 - cx^2 \end{aligned}$$

Esta é uma família de funções com fórmulas bastante simples, mas dinâmicas bastante ricas. Estudaremos as suas propriedades dinâmicas através do estudo de pontos críticos e pontos fixos. Temos então:

1. Pontos crítico:  $x = 0$
2. Pontos fixos:  $p^- = \frac{-1 - \sqrt{1+4c}}{2c}$  e  $p^+ = \frac{-1 + \sqrt{1+4c}}{2c}$

Vamos analisar dois casos,  $c > 2$  e  $c \in [0, 2]$ . Se  $c > 2$  então se  $|x| > p^+$  temos  $f_c(x) = 1 - cx^2 < x$ , então  $f_c(x) \rightarrow -\infty$ . Assim  $\Lambda_c = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}([-p^+, p^+])$  é o maximal invariante por  $f$  que tem as seguintes propriedades:

1.  $\Lambda_c$  é um conjunto de Cantor com volume zero.
2.  $\Lambda_c$  é um conjunto hiperbólico para  $f_c$ .

Em [KH99] é mostrado que nesse caso  $f_c|_{\Lambda_c}$  possui especificação periódica. Para  $c \in [0, 2]$  temos  $f_c([-p^+, p^+]) \subset [-p^+, p^+]$ , e é mostrado em [Ja81] e [BC85] que existe  $D \subset [0, 2]$  com medida de Lebesgue positiva tal que se  $c \in D$  então  $f_c : [-p^+, p^+] \rightarrow [-p^+, p^+]$  é mixing. Pelo teorema 1.53  $f_c$  tem especificação periódica para todo  $c \in D$ .

**Exemplo 1.55.** Consideramos o shift bilateral completo  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ . É fácil ver que  $\sigma$  possui a propriedade de especificação, pois como "estar próximo" no contexto de shift significa contar o número de símbolos que coincidem para direita e para esquerda, e que no shift completo todas as sequências são permitidas, é fácil construir uma sequência que satisfaz a propriedade de especificação. O mesmo vale para o shift unilateral completo.

**Exemplo 1.56.** Seja  $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  o subshift unilateral ou bilateral do tipo finito Mixing, que no caso de subshift é equivalente a dizer que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{i,j}^m \neq 0$ , para todo  $m \geq n$  onde  $a_{i,j}^m$  são as entradas da matriz  $A^m$  (ver[Ra09]). Provemos agora que  $\sigma_A$  possui especificação periódica.

*Demonstração.* Provaremos, primeiramente, a seguinte afirmação:

**Afirmação:** Dado  $\epsilon = \frac{1}{2^N} > 0$ , existe  $N(\epsilon) > 0$  tal que para qualquer  $i, j \in \mathcal{A}$  existem símbolos

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A} \text{ com } n \geq N(\epsilon) \text{ e} \\ a_{i,x_1} = 1, a_{x_1,x_2} = 1, \dots, a_{x_n,j} = 1 \end{aligned}$$

De fato, para cada  $i \in \mathcal{A}$  Seja  $w^i \in \Sigma_A$  tal que  $w_0^i = i$ . Sejam também  $C_i^0 = \{w \in \Sigma_A; w_0 = i\}$  e  $C_j^0 = \{w \in \Sigma_A; w_0 = j\}$  cilindros de comprimento 1. Por hipótese  $\sigma_A$  é mixing, logo existe  $m = N(\epsilon)$  tal que para todo  $n \geq m$  podemos encontrar  $(x^k) \in \sigma_A^{-n}(C_j^0) \cap C_i^0$ . Logo existem  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}$  tal que  $a_{i,x_1} = 1, a_{x_1,x_2} = 1, \dots, a_{x_n,j} = 1$ . Assim, a afirmação está provada. Procedamos então ao exemplo.

Dados  $x^1, \dots, x^k \in \Sigma_A$ ,  $\epsilon := \frac{1}{2^N}$  onde  $x^i = (\dots, x_{-m}^i, \dots, x_0^i, \dots, x_m^i, \dots)$  para  $i = 1, \dots, k$  e tempos  $n_1, \dots, n_k \geq 0$ , vamos agora construir um ponto  $y \in \Sigma_A$  que satisfaz a propriedade de especificação para  $\sigma_A$ . Como  $(y)$  deve estar na bola  $B((x^1), n_1, \frac{1}{N})$ , então devemos ter  $y_j = x_j^1$  para  $-N \leq j \leq N + n_1$ . Como  $\sigma_A$  é mixing, para todo  $p_1 \geq N(\epsilon)$  existem símbolos  $y_{(N+n_1+j)} \in \mathcal{A}, 0 \leq j \leq n_1, 2$  tal que

$$a_{y_{(N+n_1)}, y_{(N+n_1+1)}} = 1, \dots, a_{y_{(N+n_1+p_1)}, x_{(2,-N)}} = 1.$$

Como  $\sigma_A^{(N+n_1+p_1+N)}(y)$  deve estar na bola dinâmica  $B((x^2), n_2, \frac{1}{N})$  temos que

$$y_{(N+n_1+p_1+N+j)} = x_j^2 \text{ para } -N \leq j \leq N + n_2$$

e assim, prosseguindo indutivamente com esse argumento construímos a sequência finita

$$\begin{aligned} (\tilde{y}) = & (x_{-N}^1, x_{-N+1}^1, \dots, x_0^1, \dots, x_{N+n_1}^1, y_{(N+n_1+1)}, \\ & \dots, y_{(N+n_1+p_1)}, x_{-N}^2, \dots, x_{(N+n_2)}^2, \dots, x_{-N}^k, \dots, x_{(N+n_k)}^k) \end{aligned}$$

Mais uma vez, como  $\sigma_A$  é mixing, para todo  $p_k \geq N(\epsilon)$  existem símbolos  $y_{(z+n_k+j)} \in \mathcal{A}, 0 \leq j \leq p_k$ , onde denotamos  $z = \sum_{j=1}^{k-1} (N + n_j + p_j + N)$ , tal que

$$a_{y_{(z+n_k+N)}, y_{(z+n_k+N+1)}} = 1, \dots, a_{y_{(z+n_k+N+p_k)}, x_{(1,-N)}} = 1.$$

A sequência  $y \in \Sigma_A$  obtida de  $(\tilde{y})$  com a concatenação acima é periódica e satisfaz a propriedade de especificação periódica com tempos de pulos  $p_j + N \geq N(\epsilon) + N$  que depende apenas de  $\epsilon$ . Assim todo subshift bilateral do tipo finito mixing tem a propriedade de especificação periódica.  $\square$

**Observação:** O caso do subshift unilateral do tipo finito mixing é tratado semelhantemente ao caso anterior, com a diferença que neste contexto concatenamos os símbolos  $x_{\sum_{j=1}^{i-1}(N+p_i)}^i$  e  $x_{(0)}^{i+1}$  e os tempos de pulo serão  $p_i \geq N(\epsilon)$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

**Exemplo 1.57.** Consideremos a transformação expansora  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $f(x) = 2x \pmod{1}$ . Consideremos  $h : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $h(w_0, w_1, w_3, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_n}{2^n}$ . A função  $h$  é sobrejetiva contínua e claramente  $f \circ h = h \circ \sigma$ , onde  $\sigma$  é o deslocamento unilateral de dois símbolos. Como a propriedade de especificação é preservada por fatores topológicos,  $f$  possui especificação periódica.

**Exemplo 1.58.** Toda transformação  $f : M \rightarrow M$  expansora mixing cujos pontos periódicos são densos possui a propriedade de especificação periódica.

*Demonstração.* De fato, em ([Ru78]), ([Ru89]) e ([Ra09]) é mostrado que nesse caso  $f$  é semiconjugada a um subshift unilateral do tipo finito mixing. Pelo exemplo 1.53 e pelo fato de que especificação é preservada por semiconjugação, temos o resultado.  $\square$

**Exemplo 1.59.** A seguir temos um exemplo de dinâmicas Maneville-Poumeau que é uma dinâmica intermitente que está no bordo das dinâmicas expansoras. Para cada  $\alpha \in (0, 1)$  seja:

$$f_\alpha = \begin{cases} x(1 + 2^\alpha x^\alpha), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$f_\alpha$  é topologicamente conjugada a  $f := 2x \pmod{1}$  [KH99], logo possui especificação periódica.

**Exemplo 1.60.** Seja  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo Axioma A tal que  $f|_{\Omega(f)}$  é mixing. Então  $f|_{\Omega(f)}$  possui a propriedade de especificação periódica, ver [Bow75] e [KH99].

**Exemplo 1.61.** Todo fluxo  $X^t : M \rightarrow M$  numa variedade riemanniana compacta  $M$  Axioma A tal que  $X^t|_{\Omega(X^t)}$  é mixing possui a propriedade de especificação periódica. Basta ver que  $\Omega(X^t)$  é localmente maximal para  $X^t$  (ver [Sm67]), e aplicando o teorema da especificação periódica para fluxos, segue o resultado. (ver [KH99])

Antes de apresentarmos algumas propriedades de sistemas dinâmicos com a propriedade de especificação, precisamos definir a noção de expansividade para sistemas dinâmicos.

**Definição 1.62** (Dinâmica expansiva). *Uma transformação contínua  $f : M \rightarrow M$  num espaço métrico  $M$  é dita expansiva (ou positivamente expansiva) se existe  $\epsilon_0 > 0$  (chamada constante de expansividade) tal que, dados  $x, y \in M$  com  $x \neq y$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon_0$ . Ou seja, quaisquer duas órbitas distintas podem ser distinguidas de forma macroscópica em algum iterado. No caso em que  $f$  for invertível, dizemos que  $f$  expansiva se existe  $\epsilon_0 > 0$  (chamada constante de expansividade) tal que, dados  $x, y \in M$  com  $x \neq y$  existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon_0$ .*

**Exemplo 1.63.** *Toda transformação expansora  $C^1$  é expansiva Ver [OV03]. O exemplo 1.59 mostra que nem toda transformação expansiva é expansora.*

Para mostrar que toda expansora  $C^1$  é expansiva, provemos o seguinte lema:

**Lema 1.64.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo local numa variedade Riemanniana compacta e conexa e seja  $\sigma > 0$  um minorante para a conorma  $\|Df^{-1}\|^{-1}$  da derivada de  $f$ . Então existe  $k > 1$  tal que todo ponto  $y \in M$  tem exatamente  $k$  pré-imagens por  $f$ . Além disso, existe  $\rho > 0$  tal que para qualquer pré-imagem  $x$  de um ponto  $y \in M$ , existe uma aplicação  $h : B(y, \rho) \rightarrow M$  de classe  $C^1$  tal que  $f \circ h = I$ ,  $h(y) = x$  e*

$$d(h(y_1), h(y_2)) \leq \sigma^{-1}d(y_1, y_2) \text{ para todo } y_1, y_2 \in B(y, \rho)$$

*Demonstração.* Como a derivada é um isomorfismo em todo ponto, dado qualquer  $x \in M$  existe  $\rho > 0$  tal que  $f$  envia alguma vizinhança de  $V(x)$  de  $x$  difeomorficamente sobre a bola de raio  $\rho$  em torno de  $y = f(x)$ . Por compacidade, podemos tomar  $\rho$  independente de  $x$ , pois podemos cobrir  $M$  com bolas de raio  $\rho(x)$  e depois tomar uma subcobertura finita, e assim tomar  $\rho$  como o mínimo de todos os raios das bolas da subcobertura finita. Então o número de pré-imagens de qualquer  $y \in M$  deve ser limitado. Logo existe  $n \geq 1$  tal que

$$B_n = \{y \in M; \#f^{-1}(y) = n\}$$

é não vazio. Como este conjunto é aberto e fechado e  $M$  é conexo segue que  $B_n = M$ . Finalmente, seja  $h := (f|V(x))^{-1}$ . Então  $\|Dh(z)\| = \|Df(h(z))^{-1}\| \leq \sigma^{-1}$  para todo  $z$  no domínio de  $h$ . Basta agora usar a desigualdade do valor médio, e então a última condição é satisfeita.  $\square$

Provemos agora a afirmação do exemplo anterior. De fato, pelo lema anterior existe  $\rho > 0$  tal que para qualquer pré-imagem  $x$  de um ponto  $y \in M$ , existe uma aplicação  $h : B(y, \rho) \rightarrow M$  de classe  $C^1$  tal que  $f \circ h = I$ ,  $h(y) = x$  e

$$d(h(y_1), h(y_2)) \leq \sigma^{-1}d(y_1, y_2) \text{ para todo } y_1, y_2 \in B(y, \rho)$$

Assim, se  $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho$  para todo  $n \geq 0$  então

$$d(x, y) \leq \sigma^{-n} d(f^n(x), f^n(y)) \leq \sigma^{-n} \rho$$

o que implica que imediatamente que  $x = y$

**Exemplo 1.65.** *Todo shift bilateral ou unilateral completo  $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$  são transformações expansivas. No caso unilateral, por exemplo, se  $d((x_n), (y_n)) = \frac{1}{2^K}$ , onde  $K$  é o menor valor de  $n$  tal que  $x_n \neq y_n$ , com  $(x_n) \neq (y_n)$  então  $d(\sigma^K((x_n)), \sigma^K((y_n))) = 2^0 = 1$ . Logo  $\sigma$  é expansiva com constante de expansividade  $\epsilon_0 = 1$ . O caso bilateral é análogo, levando em conta o sentido invertível de expansividade.*

**Observação:** Todos os exemplos citados nesta seção são exemplos de dinâmicas expansivas.

Vejamos agora algumas propriedades topológicas e ergódicas de sistemas dinâmicos com a propriedade de especificação.

**Teorema 1.66.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  definida num espaço métrico compacto  $M$ .*

- (1)  *$f : M \rightarrow M$  com a propriedade de especificação, então  $h_{top}(f) > 0$  e  $h_{top}(f, \bar{U}) = h_{top}(f)$  para todo  $U \subset M$  aberto, ou seja, todo ponto é ponto de entropia;*
- (2)  *$f : M \rightarrow M$  com a propriedade de especificação periódica, então  $h_{top}(f) \leq \liminf_n \frac{1}{n} \log(\#Fix(f^n))$ ;*
- (3)  *$f : M \rightarrow M$  com a propriedade de especificação periódica e expansividade, então  $h_{top}(f) = \lim_n \frac{1}{n} \log(\#Fix(f^n))$ ;*

*Demonstração.* Ver [Bow71] □

Um resultado com as propriedades anteriores para o contexto de fluxos também é válido com uma noção apropriada de expansividade para fluxos.

## Capítulo 2

# Propriedade de colagem de órbitas

Alguns exemplos importantes de sistemas dinâmicos não possuem especificação, como por exemplo o fluxo de suspensão cuja dinâmica da base tenha especificação não tem necessariamente a propriedade de especificação. De fato, um fluxo de suspensão obtido por uma base que seja um difeomorfismo Anosov mixing e com altura constante nunca terá especificação, pois não será mixing. Então fez-se necessário introduzir uma propriedade mais fraca inspirada na propriedade de especificação. Em [BV15] foi introduzido o conceito de propriedade de colagem de órbita(G.O.P.) da seguinte forma:

**Definição 2.1.** Dizemos que uma aplicação  $f : M \rightarrow M$  sobre um espaço métrico compacto  $M$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas se dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N(\epsilon) \geq 1$ , que só depende de  $\epsilon$ , tal que para quaisquer pontos  $x_1, x_2, \dots, x_k \in M$  e tempos  $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0$  existem  $p_1, p_2, \dots, p_{k-1} \leq N(\epsilon)$  e um ponto  $x \in M$  tais que:

$$\begin{aligned} d(f^j(x), f^j(x_1)) &\leq \epsilon, 0 \leq j \leq n_1 \\ d(f^{j+n_1+p_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}}(x), f^j(x_i)) &\leq \epsilon, 2 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq n_i \end{aligned}$$

**Observação:** Se existe  $p_k \leq N(\epsilon)$  tal que  $f^{p_1+n_1+\dots+n_k+p_{k-1}+p_k}(x) = x$ , dizemos que  $f$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódica.

De forma análoga definimos propriedade de colagem de órbitas para semifluxos:

**Definição 2.2.** Seja  $(X_t)_{t \geq 0}$  um semifluxo sobre um espaço métrico separável  $M$ . Dizemos que  $(X_t)_t$  tem a propriedade de colagem de órbitas se dado  $\epsilon > 0$ , existe  $T(\epsilon) > 0$ , que só depende de  $\epsilon$ , tal que para quaisquer pontos  $x_1, x_2, \dots, x_k \in M$  e tempos  $t_1, t_2, \dots, t_k \geq 0$  existem  $p_1, p_2, \dots, p_{k-1} \leq T(\epsilon)$  e um ponto  $x \in M$  tais que:

$$d(X_t(x), X_t(x_1)) \leq \epsilon, \forall t \in [0, t_1]$$

e, se  $\bar{x}_i = X_{\sum_{j=0}^{i-1} (p_j + t_j)}(x) \in M$  então

$$d(X_t(\bar{x}_i), X_t(x_i)) < \epsilon, \forall t \in [0, t_i]$$

para todo  $2 \leq i \leq k$

**Observação:** Se existe  $p_k \leq T(\epsilon)$  tal que  $X^{p_1+n_1+\dots+n_k+p_{k-1}+p_k}(x) = x$ , dizemos que  $(X^t)_t$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódica.

Notemos também que especificação implica em G.O.P., basta na definição de especificação tomar todos os tempos de pulos iguais à constante  $N(\epsilon)$  no caso de tempo discreto e  $K(\epsilon)$  no caso de fluxos.

Note que diferentemente da propriedade de especificação, na G.O.P. os tempos de pulo entre dois pedaços de órbitas nem sempre podem ser tomados constantes, como no caso de especificação.

**Proposição 2.3.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  com a propriedade de colagem de órbitas. Então  $f$  é transitiva.*

*Demonstração.* Dados dois pontos  $x_1, x_2 \in M$ , tomamos as bolas  $B(x_i, \epsilon)$ ,  $i = 1, 2$  aplicamos a propriedade de colagem de órbita com tempos  $n_1 = 1, n_2 = 1$  e erro  $\delta = \frac{\epsilon}{17}$ . Assim existe  $y \in B(x_1, \delta)$  e  $N(\delta) \geq 1$  tais que para algum  $n \leq N(\delta)$  temos  $f^n(y) \in B(x_2, \delta)$ . Assim,  $f^n(B(x_1, \epsilon)) \cap B(x_2, \epsilon) \neq \emptyset$ , para algum  $n \leq N(\delta)$ . Logo  $f$  é transitiva.  $\square$

Um resultado similar é válido para fluxos:

**Proposição 2.4.** *Seja  $X^t : M \rightarrow M$  um fluxo contínuo num espaço métrico compacta  $M$  com a propriedade de colagem de órbitas. Então  $X^t$  é transitivo.*

*Demonstração.* Tomamos  $x_1, x_2 \in M$  e consideramos  $B(x_i, \epsilon)$ ,  $i = 1, 2$  as bolas centradas em  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente. Seja  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$  e tempos  $t_1 = 0, t_2 = 0$ , então pela propriedade de colagem de órbitas podemos encontrar  $K(\delta) > 0$ ,  $y \in M$  e  $t_0 \leq K(\delta)$  tais que  $d(x, y) < \delta$ , isto é,  $y \in B(x, \epsilon)$  e  $d(X^{t_0}(y), x_2) < \delta$ , isto é,  $X^{t_0}(y) \in B(x_2, \epsilon)$ . Logo temos  $X^{t_0}(B(x_1, \epsilon)) \cap B(x_2, \epsilon) \neq \emptyset$ , como queríamos.  $\square$

Assim como no caso de especificação, a propriedade de colagem de órbitas é preservada por semiconjugação topológica. Provaremos então este fato.

**Proposição 2.5.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  com a propriedade de colagem de órbitas e  $g : N \rightarrow N$ , com  $M, N$  espaços métricos compactos e tal que existe  $h : M \rightarrow N$  contínua sobrejetiva com  $g \circ h = h \circ f$ . Então  $g$  possui a propriedade de colagem de órbitas. Ademais, se  $f$  tem a propriedade de colagem de órbitas periódica então  $g$  tem a propriedade de colagem de órbitas periódica.*



*Demonstração.* A demonstração é muito similar ao caso de especificação. Dado  $\epsilon > 0$ ,  $x_1, \dots, x_k \in N$  e  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  inteiros quaisquer, sejam  $\{y_i \in M, i = 1, \dots, k\}$  tais que  $h(y_i) = x_i$ . O ponto importante aqui é que como  $h$  é contínua num compacto ela é uniformemente contínua, logo existe  $\delta > 0$  tal que

$$d_M(z, w) < \delta \Rightarrow d_N(h(z), h(w)) < \epsilon \text{ para todo } z, w \in M$$

Como  $f$  possui a propriedade de colagem de órbitas, existe  $N(\delta) \geq 1$  tal que existem  $p_1, \dots, p_{k-1} \leq N(\delta)$  e  $y \in M$  tais que

$$\begin{aligned} d_M(f^j(y), f^j(y_1)) &\leq \delta, 0 \leq j \leq n_1 \\ d_M(f^{j+n_1+p_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}}(y), f^j(y_i)) &\leq \delta, 2 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq n_i \end{aligned}$$

Logo tomando  $x = h(y)$  temos:

$$\begin{aligned} d_N(g^j(x), g^j(x_1)) &= d_N(g^j(h(y)), g^j(h(y_1))) \\ &= d_N(h(f^j(y)), h(f^j(y_1))) < \epsilon, \end{aligned}$$

para  $0 \leq j \leq n_1$ , e

$$d_N(g^{j+n_1+p_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}}(x), g^j(x_i)) = d_N(h(f^{j+n_1+p_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}}(y)), h(f^j(y_i))) \leq \epsilon$$

para  $2 \leq i \leq k$  e  $0 \leq j \leq n_i$ . Assim concluímos que  $g$  tem a propriedade de colagem de órbitas.

Suponhamos que  $f$  tem propriedade de colagem de órbitas periódica, mostremos que  $g$  também tem a propriedade de colagem de órbitas periódica. De fato, suponhamos que existe  $p_{k+1} \leq N(\epsilon)$ ,  $p_{k+1} \in \mathbb{N}$  tal que podemos encontrar  $y \in M$  que realiza a propriedade de colagem de órbitas de  $f$  e tal que  $f^{n_1+p_1+\dots+n_k+p_k+p_{k+1}}(y) = y$ . Logo

$$g^{n_1+p_1+\dots+n_k+p_k+p_{k+1}}(h(y)) = h(f^{n_1+p_1+\dots+n_k+p_k+p_{k+1}}(y)) = h(y).$$

□

É importante também mencionar que um resultado análogo vale para fluxos.

**Proposição 2.6.** *Seja  $\phi^t : M \rightarrow M$  um fluxo contínuo com a propriedade de colagem de órbitas e  $\varphi^t : N \rightarrow N$  um fluxo contínuo, com  $M, N$  espaços métricos compactos e tal que existe  $h : M \rightarrow N$  contínua sobrejetiva com  $\phi^t \circ h = h \circ \varphi^t$ . Então  $\varphi^t$  possui a propriedade de colagem de órbitas. Ademais, se  $\phi^t$  tem propriedade de colagem de órbitas periódica então  $\varphi^t$  tem propriedade de colagem de órbitas periódica.*

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$ ,  $x_1, \dots, x_k \in N$  e  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}^+$  quaisquer, sejam  $\{y_i \in M, i = 1, \dots, k\}$  tais que  $h(y_i) = x_i$ . Como no caso discreto, usaremos o fato de que  $h$  é uniformemente contínua, logo existe  $\delta > 0$  tais que

$$d_M(z, w) < \delta \Rightarrow d_N(h(z), h(w)) < \epsilon \text{ para todo } z, w \in M$$

Como  $\phi^t$  possui a propriedade de colagem de órbitas, existe  $T(\delta) \in \mathbb{R}^+$  tal que existem  $p_1, \dots, p_{k-1} \geq T(\delta)$  e  $y \in M$  tais que

$$\begin{aligned} d_M(\phi^t(y), \phi^t(y_1)) &\leq \delta, j \in [0, t_1] \\ d_M(\phi^{t+t_1+p_1+\dots+t_{i-1}+p_{i-1}}(y), \phi^t(y_i)) &\leq \delta, 2 \leq i \leq k, j \in [0, t_i] \end{aligned}$$

Logo tomando  $x = h(y)$  temos:

$$\begin{aligned} d_N(\varphi^t(x), \varphi^t(x_1)) &= d_N(\varphi^t(h(y)), \varphi^t(h(y_1))) \\ &= d_N(h(\phi^t(y)), h(\phi^t(y_1))) < \epsilon, \end{aligned}$$

para  $j \in [0, t_1]$ , e

$$d_N(\varphi^{t+t_1+p_1+\dots+t_{i-1}+p_{i-1}}(x), \varphi^t(x_i)) = d_N(h(\phi^{t+t_1+p_1+\dots+t_{i-1}+p_{i-1}}(y)), h(\phi^t(y_i))) \leq \epsilon$$

para  $2 \leq i \leq k$  e  $j \in [0, t_i]$ .

Suponhamos agora que  $\phi$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódica. Afrimamos que  $\varphi$  também possui propriedade de colagem de órbitas periódica. De fato, suponhamos que existe  $p_{k+1} \leq T(\epsilon)$ ,  $p_{k+1} \in \mathbb{R}^+$  e  $y \in M$  que realiza a propriedade de colagem de órbitas de  $\phi$  e tal que  $\phi^{t_1+p_1+\dots+t_k+p_k+p_{k+1}}(y) = y$ . Logo

$$\varphi^{t_1+p_1+\dots+t_k+p_k+p_{k+1}}(h(y)) = h(\phi^{t_1+p_1+\dots+t_k+p_k+p_{k+1}}(y)) = h(y).$$

□

## 2.1 Exemplos

### 2.1.1 Rotações e fluxos irracionais

Considere o círculo  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Para todo  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  denotamos por  $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  a rotação de um ângulo  $\alpha$  sobre o círculo dada por  $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ . Vamos mostrar que  $R_\alpha$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas e que todas as rotações irracionais no círculo têm entropia zero.

**Proposição 2.7.** *Se  $\alpha$  é irracional, então a órbita de todo ponto é um subconjunto denso de  $\mathbb{S}^1$  pela rotação  $R_\alpha$ .*

*Demonstração.* Seja  $A \subset \mathbb{S}^1$  o fecho de uma órbita. Se a órbita não é densa, o complementar  $\mathbb{S}^1/A$  é um conjunto aberto não vazio constituído por intervalos disjuntos. Seja  $I$  o maior desses intervalos, ou pelo menos um dos maiores. Afirmamos que os iterados  $R_\alpha^n(I)$  não se intersectam. De fato, caso contrário, do fato que as rotações preservam o comprimento dos intervalos,  $\mathbb{S}^1/A$  teria um intervalo maior do que  $I$ , o que não pode acontecer. Observamos também que nenhum iterado de  $I$  pode coincidir, caso contrário um extremo  $x$  de algum iterado poderia repetir-se e teríamos  $x + k\alpha = x \pmod{1}$  com  $k\alpha = l$  inteiro, ou seja,  $\alpha$  seria racional. Assim os intervalos  $R_\alpha^n$  são todos disjuntos e de igual comprimento, mas isso não pode acontecer, pois a circunferência tem comprimento finito e a soma das medidas dos intervalos não podem exceder o comprimento da circunferência.  $\square$

**Proposição 2.8.**  $R_\alpha$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas.

*Demonstração.* Do fato de que  $R_\alpha$  é uma isometria, a bola dinâmica  $B(x, n, \epsilon)$  coincide com a bola  $B(x, \epsilon)$  e  $R_\alpha^j(B(x, n, \epsilon)) = B(R_\alpha^j(x), \epsilon), \forall j \in \mathbb{Z}$ . Para chegarmos ao nosso objetivo, é suficiente provar a afirmação seguinte :

**Afirmação:**  $\forall \epsilon > 0$  existe  $N(\epsilon) > 0$  tal que para todo  $z, w \in \mathbb{S}^1$  existe  $p \leq N(\epsilon)$  tal que  $R_\alpha^p(z) \in B(w, \epsilon)$ .

De fato, assumindo a afirmação, dados  $x_1, \dots, x_K \in \mathbb{S}^1$ ,  $n_1, \dots, n_k \geq 0$  e  $\epsilon > 0$ , escolhemos  $y = x_1$ . Assim  $y \in B(x_1, n_1, \epsilon)$ . Tomando agora  $z = f_\alpha^{n_1}(y)$  e  $w = x_2$ , pela afirmação existe  $p_1 \leq N(\epsilon)$  tal que  $R_\alpha^{p_1+n_1}(y) \in B(x_2, n_2, \epsilon)$ . Usando mais uma vez a afirmação para  $z = R_\alpha^{n_2+p_1+n_1}(y)$  e  $w = x_3$ , existe  $p_2 \leq N(\epsilon)$  tal que  $R_\alpha^{p_1+n_1+n_2+p_2}(y) \in B(x_3, n_3, \epsilon)$ . Suponhamos agora que o resultado vale para um certo  $i$ , isto é, existe  $p_{i-1} \leq N(\epsilon)$  tal que  $R_\alpha^{p_1+n_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}}(y) \in B(x_i, n_i, \epsilon)$ . Assim, tomando  $z = R_\alpha^{p_1+n_1+\dots+p_{i-1}+n_{i-1}+n_i}$  e  $w = x_{i+1}$ , pela afirmação existe  $p_i \leq N(\epsilon)$  tal que  $R_\alpha^{p_1+n_1+\dots+p_{i-1}+n_{i-1}+n_i+p_i}(y) \in B(x_{i+1}, n_{i+1}, \epsilon)$ . Logo, por indução e pelo fato de que  $R_\alpha$  é uma isometria e preserva ordem,  $R_\alpha$  possui a propriedade de colagem de órbita.

Resta-nos então provar a afirmação. Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $n$  o único inteiro determinado por  $n\frac{\epsilon}{2} \leq 1 < (n+1)\frac{\epsilon}{2}$ . Então as bolas fechadas de raio  $\frac{\epsilon}{2}$  centradas nos pontos  $x_i = i\frac{\epsilon}{2}, i = 0, \dots, n$  cobrem todo o círculo  $\mathbb{S}^1$ . Por transitividade para todo  $0 \leq i \leq n$  existe  $n_i \geq 0$  com  $R_\alpha^{n_i}(0) \in B(i\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$ . Uma vez que  $B(R_\alpha^{n_i}(0), \epsilon) \supset \overline{B(i\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})}$  e  $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{i=0}^n \overline{B(i\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})}$ , temos que  $\bigcup_{j=0}^{N(\epsilon)} B(R_\alpha^j(0), \epsilon) = \mathbb{S}^1$ , onde  $N(\epsilon) := \max_{0 \leq i \leq n} \{n_i\}$ . Uma vez que  $R_\alpha$  é uma isometria podemos afirmar que  $\bigcup_{j=0}^{N(\epsilon)} B(R_\alpha^j(x), \epsilon) = \mathbb{S}^1, \forall x \in \mathbb{S}^1$ . Com isso a afirmação está provada.  $\square$

**Observação:** Toda isometria contínua possui entropia zero. Para provar que as rotações irracionais no círculo têm entropia zero, notamos que  $R_\alpha$  é uma isometria, ou seja,  $d(R_\alpha(x), R_\alpha(y)) = d(x, y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{S}^1$ . Essa observação implica que a bola dinâmica  $B(x, n, \epsilon) = B(x, \epsilon)$  para todo  $n \geq 1$ . Logo um conjunto  $\mathcal{E}$  é  $(n, \epsilon)$ -separado se, e somente se, ele é  $(1, \epsilon)$ -separado. Em particular a sequência  $s_n(R_\alpha, \epsilon, \mathbb{S}^1)$  não depende de  $n$ . Logo  $s(R_\alpha, \epsilon, \mathbb{S}^1) = 0$ . Fazendo agora  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos  $h_{top}(R_\alpha) = 0$  como queríamos demonstrar.

O exemplo das rotações irracionais evidencia uma diferença entre a propriedade de especificação e a propriedade de colagem de órbitas. Enquanto especificação implica que a entropia topológica é positiva este exemplo nos mostra que não necessariamente propriedade de colagem de órbitas implica em entropia positiva.

Considere o 2-toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  com a topologia e a métrica induzida pela topologia e a métrica de  $\mathbb{R}^2$ . Fixado  $\alpha \in \mathbb{R}$  irracional, definimos o fluxo linear irracional  $\phi_\alpha^t : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  por:

$$\phi_\alpha^t(x, y) = (x + \alpha t \pmod{1}, y + t \pmod{1}) = (x, y) + t(\alpha, 1) \pmod{1}$$

**Proposição 2.9.**  $\phi^t$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas.

*Demonstração.* Como a propriedade de colagem de órbitas é preservada por conjugações, basta então mostrar que a suspensão de uma rotação irracional no círculo com função teto  $f := 1$  possui a propriedade de colagem de órbitas. Definimos o domínio da suspensão,

$$D_{\mathbb{S}^1, f} := \{(x, s) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}; 0 \leq s \leq f(x)\}$$

com a relação de equivalência  $(x, f(x)) \sim (R_\alpha(x), 0)$ .  $\phi_\alpha^t$  é conjugada a uma suspensão de uma rotação irracional  $R_\alpha$  com função teto  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{S}^1$  (ver [Fa01]). Sejam  $\{(x_i, s_i) \in D_{\mathbb{S}^1, f}, i = 1, \dots, k\}$  e tempos  $t_i, i = 1, \dots, k$ . Já mostramos, no exemplo anterior, que as rotações irracionais  $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  possuem a propriedade de colagem de órbita. Logo tomando os pontos  $\tilde{x}_i = x_i, i = 1, \dots, k$  e tempos  $n_i = \lfloor t_i \rfloor + 1, i = 1, \dots, k$  e  $\epsilon > 0$  podemos encontrar inteiros  $N(\epsilon)$  e  $p_1, \dots, p_k \leq N(\epsilon)$  e um ponto  $x \in \mathbb{S}^1$  tais que:

$$d(R_\alpha^j(x), R_\alpha^j(x_1)) < \epsilon, 0 \leq j \leq n_1 \tag{2.1}$$

$$d(R_\alpha^{j+n_1+p_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}}(x), R_\alpha^j(x_i)) < \epsilon, 0 \leq j \leq n_i, 2 \leq i \leq k \tag{2.2}$$

Observamos agora que sempre que os pontos da base estiverem próximos, os respectivos pontos do fluxo permanecerão próximos até a altura máxima, pois apenas serão deslocados verticalmente. Desse fato e por (2.1) e (2.2) temos:

$$d(\phi_t(y, s), \phi_t(x_1, s_1)) < \epsilon, t \in [0, t_1]$$

$$d(\phi_{(t+\sum_{i=1}^{i-1}(t_i+p_k))}(y, s), \phi_t(x_i, s_i)) < \epsilon, t \in [0, t_i], i = 2, \dots, k$$

onde tomamos para o fluxo  $\phi$  os “tempos de pulo”  $P_i = s_{i+1} + p_i + 1 - s_i \leq N(\epsilon) + 2, i = 1, \dots, k$  e o ponto de sombreamento  $(y, s) = (x_1, s_1)$ . Desse modo a proposição está provada.  $\square$

A entropia do fluxo irracional do exemplo anterior é zero (Fórmula de Abramov) Ver [Ab59]. O exemplo acima evidencia mais uma diferença da propriedade de especificação e propriedade de colagem de órbitas, agora também no contexto de fluxos.

## 2.1.2 Dinâmicas do intervalo

Já vimos que na dinâmica do intervalo temos que toda dinâmica contínua mixing possui especificação. Vamos mostrar agora que no contexto de propriedade de colagem de órbitas toda dinâmica contínua transitiva possui a propriedade de colagem de órbitas. Isso é uma generalização do teorema de Blokh para o contexto transitivo conforme comentamos na introdução.

Antes da prova do referido resultado apresentamos um lema auxiliar que usaremos na prova.

**Lema 2.10.** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma função contínua transitiva. Então uma das possibilidades acontece:*

(1)  *$f$  é mixing.*

(2)  *$f$  não é mixing, mas existe um ponto fixo  $a \in (0, 1)$  tal que  $f([0, a]) = [a, 1]$ ,  $f([a, 1]) = [0, a]$ , e que  $f^2|_{[0, a]}$  e  $f^2|_{[a, 1]}$  são mixing.*

*Demonstração.* [Blo83]  $\square$

**Teorema 2.11.** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma função contínua transitiva. Então  $f$  possui a propriedade de colagem de órbita periódica.*

*Demonstração.* Se  $f$  satisfaz o item (1) do Lema 2.10, então pelo Teorema 1.53  $f$  satisfaz a propriedade de especificação periódica, então  $f$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódica (basta tomar todos os tempos de pulos iguais à constante  $N(\epsilon)$  da definição de especificação).

Mostremos que se  $f$  satisfaz o item (2) do Lema 2.10 então  $f$  possui a propriedade de colagem de órbita. De fato, sejam  $x_1, x_2, \dots, x_k \in [0, 1]$ ,  $\epsilon > 0$  fixado e  $n_1, n_2, \dots, n_k$  inteiros positivos quaisquer. Como  $f$  e  $f^2$  são contínuas num intervalo compacto, então são uniformemente contínuas, logo:

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $0 < \delta_j < \epsilon$  tais que se  $d(x, x_i) < \delta_j \Rightarrow d(f^j(x), f^j(x_i)) \leq \epsilon, j = 1, 2$ .

Notemos também que  $f$  é sobrejetiva. De fato como  $f$  é transitiva então  $f([0, 1])$  é denso em  $[0, 1]$ , pois dado qualquer intervalo  $I$  aberto de  $[0, 1]$  tomamos  $x \in [0, 1]$  cuja órbita seja densa, e então, por transitividade, existe  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $f^n(x) \in f([0, 1])$  e existe  $k$  tal que  $f^{n+k}(x) \in I$ . Como  $f([0, 1])$  é compacto, temos o resultado.

Vamos usar o fato de que  $f^2|_{[0,a]}$  é mixing e o Teorema 1.53 para mostrar que  $f$  possui a propriedade de colagem de órbitas. Para isso precisamos que todos os pontos estejam no intervalo  $[0, a]$ , definimos então:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{se } x_i \in [0, a] \\ y_i \in f^{-1}(x_i), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Como os pontos  $\tilde{x}_i$  estão no intervalo  $[0, a]$ , podemos aplicar a segunda parte do Lema 2.10 e o Teorema 1.53 com tempos de sombreamento  $\hat{n}_i = \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor + 1, i = 1, \dots, k$ . A razão de escolhermos tais tempos de sombreamento é porque estamos contando a quantidade de múltiplos de 2 entre 0 e  $n_i$  que serão sombreados, em que eventualmente o iterado  $n_i$  pode não ser um deles, assim somamos uma unidade.

A ideia da demonstração é que sombreado os iterados pares possamos usar continuidade uniforme de  $f^j, j = 1, 2$  para sombrar iterados ímpares. Procedemos então com a demonstração.

Seja  $\delta := \min_j \{\delta_j\} > 0$ . Pelo Lema 2.10  $f^2|_{[0,a]}$  é mixing e portanto possui especificação, logo existem  $N(\delta)$ , que depende apenas de  $\delta$ , inteiros positivos  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_k = N(\delta)$  e um ponto  $x \in [0, a]$  tais que:

$$d(f^{2j}(x), f^{2j}(\tilde{x}_1)) \leq \delta, 0 \leq j \leq \hat{n}_1 \quad (2.3)$$

$$d(f^{2(j+\hat{n}_1+\hat{p}_1+\dots+\hat{n}_{i-1}+\hat{p}_{i-1})}(x), f^{2j}(\tilde{x}_i)) \leq \delta, 2 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq \hat{n}_i \quad (2.4)$$

$$f^{2(\hat{n}_1+\hat{p}_1+\dots+\hat{n}_{i-1}+\hat{p}_{i-1}+\dots+\hat{p}_k)}(x) = x \quad (2.5)$$

mas pela continuidade uniforme,

$$d(f^{2j+1}(x), f^{2j+1}(\tilde{x}_1)) \leq \epsilon, 0 \leq j \leq \hat{n}_1 \quad (2.6)$$

$$d(f^{2(j+\hat{n}_1+\hat{p}_1+\dots+\hat{n}_{i-1}+\hat{p}_{i-1})+1}(x), f^{2j+1}(\tilde{x}_i)) \leq \epsilon, 2 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq \hat{n}_i \quad (2.7)$$

e juntando (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) e (2.7), temos:

$$d(f^j(x), f^j(x_1)) \leq \epsilon, 0 \leq j \leq n_1$$

$$d(f^{(j+n_1+p_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1})}(f(x)), f^j(x_i)) \leq \epsilon, 2 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq n_i$$

$$f^{n_1+p_1+n_1+1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}+\dots+p_k}(x) = x$$

onde os  $p'_i \leq N(\delta) + 3$  e cada  $N(\delta) + 3$  só depende de  $\epsilon$ .

Se  $x_1 \notin [0, a]$  então escolhemos  $f(x)$  como o ponto de sombreamento, caso contrário escolhemos o próprio  $x$ .  $\square$

### 2.1.3 Produto de dinâmicas

Seja  $f_\alpha$  uma rotação irracional no círculo  $\mathbb{S}^1$ . Consideramos o difeomorfismo no toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  dado por  $F(x, y) = (f_\alpha(x), f_\alpha(y))$ . Uma vez que  $f_\alpha$  é uma isometria, o conjunto  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : |x - y| \leq \epsilon\}$  é invariante para todo  $\epsilon > 0$ , logo  $F$  não possui a propriedade de colagem de órbita, pois  $F$  possui conjuntos abertos disjuntos  $F$ -invariantes, e assim não será transitiva.

Este exemplo ilustra que o produto de dinâmicas com a propriedade de colagem de órbitas não precisa ter a propriedade de colagem de órbitas.

A despeito disso, sejam  $(M, d_M)$  e  $(N, d_N)$  espaços métricos compactos e  $f : M \rightarrow M$  e  $g : N \rightarrow N$  dinâmicas contínuas tais que  $f$  possui especificação e  $g$  possui a propriedade de colagem de órbita. Afirmamos que  $F : M \times N \rightarrow M \times N$  dada por  $F(x, y) = (f(x), g(y))$  possui a propriedade de colagem de órbita. De fato, dado  $\epsilon > 0$  seja  $L(\epsilon) \geq 1$  dado pela propriedade de especificação de  $f$  e  $K(\epsilon) \geq 1$  dado pela propriedade de colagem de órbita de  $g$ . Tomamos  $T = T(\epsilon) = L + K \geq 1$ . dados  $\{(x_i, y_i) \in M \times N, i = 1, \dots, k\}$  e  $n_1, \dots, n_k \geq 0$ , como  $g$  possui a propriedade de colagem de órbita Existem  $y \in N$  e tempos  $p_1, \dots, p_k \leq K(\epsilon)$  tais que:

$$d_N(g^j(y), g^j(y_1)) < \epsilon, \quad 0 \leq j \leq n_1 + L \quad (2.8)$$

$$d_N(g^{j+n_1+p_1+\dots+n_{i-1}+p_{i-1}}(y), g^j(y_i)) < \epsilon, \quad 0 \leq j \leq n_i + L, \quad 2 \leq i \leq k \quad (2.9)$$

o elemento  $y$  sombreia pedaços de órbitas de comprimento  $n_i + L$  para o ponto  $y_i$ . Pela propriedade de especificação de  $f$  com “tempo de pulos” de tamanho  $(L + p_i)_{i=1, \dots, k}$ , existe  $x \in M$  tal que:

$$d(f^j(x), f^j(x_1)) < \epsilon, \quad 0 \leq j \leq n_1 \quad (2.10)$$

$$d(f^{j+L+p_1+\dots+L+p_{i-1}}(x), f^j(x_i)) < \epsilon, \quad 0 \leq j \leq n_i \quad \text{e} \quad 2 \leq i \leq k \quad (2.11)$$

das expressões (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11), temos:

$$d(F^j(x, y), F^j(x_1, y_1)) < \epsilon, \quad 0 \leq j \leq n_1$$

$$d(F^{j+L+p_1+n_1+\dots+L+n_{i-1}+p_{i-1}}(x, y), F^j(x_i, y_i)) < \epsilon, \quad 0 \leq j \leq n_i \quad \text{e} \quad 2 \leq i \leq k$$

onde consideramos  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_M(x_1, x_2), d_N(y_1, y_2)\}$ . Uma vez que  $L + p_i \leq L + K(\epsilon)$ , e apenas depende de  $\epsilon$ , concluímos que o mapa produto  $F$  satisfaz a propriedade de colagem de órbita.

**Observação:** Com uma pequena modificação na demonstração anterior, é possível provar que o produto de dinâmicas com especificação possui especificação. Esse resultado evidencia mais uma vez as diferenças entre propriedade de colagem de órbitas e propriedade de especificação.

#### 2.1.4 G.O.P. Vs entropia positiva

Já vimos que propriedade de colagem de órbitas não implica entropia positiva, mas uma questão que podemos considerar até aqui é se uma dinâmica com a propriedade de colagem de órbitas com entropia positiva satisfaz a propriedade de especificação. Esse não é o caso como mostramos no exemplo a seguir.

Consideramos o toro  $\mathbb{T}^3 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Seja  $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  o difeomorfismo linear Anosov induzido pela matriz  $A$  via projeção sobre o toro  $\mathbb{T}^2$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação é de fato invertível pois a matriz  $A$  tem determinante 1. Os autovalores de  $A$  são

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ e } \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$$

assim  $f_A$  é de fato um difeomorfismo de Anosov. O difeomorfismo  $f_A$  é topologicamente mixing ([KH99]). Seja também  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . consideremos o difeomorfismo  $C^1 F : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  dado por  $F(x, y, z) = ((2x + y, x + y) \bmod 1, z + \alpha \bmod 1)$ . Uma vez que o difeomorfismo Anosov linear é mixing, satisfaz a propriedade de especificação periódica (teorema da especificação [KH99]) e a rotação irracional tem a propriedade de colagem de órbitas, pelo critério dado pelo exemplo anterior, temos que  $F$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas não-periódica pois as rotações irracionais não possuem pontos periódicos, assim a última coordenada é aperiódica. Além disso,  $h_{top}(F) = \log(2) > 0$  (a entropia é a soma das entropias de cada parcela). É importante mencionar que esse exemplo não possui especificação, já que não é mixing, pois tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeno, e tomando os abertos  $V = \mathbb{T}^2 \times (z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon)$  e  $U = \mathbb{T}^2 \times (z_1 - \epsilon, z_1 + \epsilon)$  com  $z_1 \neq z_0 \in \mathbb{S}^1$  não existe  $n_0$  tal que  $F^m(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $m \geq n_0$ , pelo fato de que a última coordenada de  $F$  é uma isometria.



### 2.1.5 Subshift do tipo finito

Vamos agora provar que qualquer subshift do tipo finito transitivo possui a propriedade de colagem de órbitas. Seja  $\mathcal{A} = \{1, \dots, k\}$  e  $A = (a_{i,j}), i, j \in \mathcal{A}$ .

**Proposição 2.12.** *Seja  $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  um subshift bilateral (unilateral) do tipo finito transitivo. Então  $\sigma_A$  possui a propriedade de colagem de órbitas periódica.*

*Demonstração.* Provaremos primeiramente o seguinte fato:

**Afirmção:** Dado  $\epsilon = \frac{1}{2^N} > 0$ , existe  $N(\epsilon) > 0$  tal que para qualquer  $i, j \in \mathcal{A}$  existem

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_{n_{i,j}} &\in \mathcal{A} \text{ com } n_{i,j} \leq N(\epsilon) \text{ e} \\ a_{i,x_1} = 1, a_{x_1,x_2} = 1, \dots, a_{x_{n_{i,j}},j} &= 1 \end{aligned}$$

De fato, para cada  $i \in \mathcal{A}$  Seja  $w^i \in \Sigma_A$  tal que  $w_0^i = i$ . Sejam também  $C_i^0 = \{w \in \Sigma_A; w_0 = i\}$  e  $C_j^0 = \{w \in \Sigma_A; w_0 = j\}$  cilindros de comprimento 1. Por hipótese  $\sigma_A$  é transitivo, logo existe  $n_{i,j} \in \mathbb{N}$  tal que podemos encontrar  $(x^k) \in \sigma_A^{-n_{i,j}}(C_j^0) \cap C_i^0$ . Logo existem  $x_1, \dots, x_{n_{i,j}} \in \mathcal{A}$  tal que  $a_{i,x_1} = 1, a_{x_1,x_2} = 1, \dots, a_{x_{n_{i,j}},j} = 1$ . Basta agora tomar  $N(\epsilon) := \max\{n_{i,j} : i, j \in \mathcal{A}\}$ . Assim a afirmação está provada.

Provemos primeiramente que o subshift bilateral do tipo finito transitivo possui a propriedade de colagem de órbitas periódica.

Dados  $x^1, \dots, x^k \in \Sigma_A$ ,  $\epsilon := \frac{1}{2^N}$  onde  $x^i = (\dots, x_{-m}^i, \dots, x_0^i, \dots, x_m^i, \dots)$  para  $i = 1, \dots, k$  e tempos  $n_1, \dots, n_k \geq 0$ , vamos agora construir um ponto  $y \in \Sigma_A$  que satisfaz a propriedade de colagem de órbita para  $\sigma_A$ . Como  $(y)$  deve estar na bola  $B((x^1), n_1, \frac{1}{N})$ , então devemos ter  $y_j = x_j^1$  para  $-N \leq j \leq N + n_1$ . Pela afirmação, existe  $n_{1,2} \leq N(\epsilon)$  e símbolos  $y_{(N+n_1+j)} \in \mathcal{A}, 0 \leq j \leq n_{1,2}$  tal que

$$a_{y_{(N+n_1)}, y_{(N+n_1+1)}} = 1, \dots, a_{y_{(N+n_1+n_{1,2})}, x_{(2,-N)}} = 1.$$

Como  $\sigma_A^{N+n_1+n_{1,2}+N}(y)$  deve estar na bola dinâmica  $B((x^2), n_2, \frac{1}{N})$  temos que  $y_{(N+n_1+n_{1,2}+N+j)} = x_j^2$  para  $-N \leq j \leq N + n_2$ , e assim, construímos indutivamente a sequência finita

$$\begin{aligned} (\tilde{y}) = &(x_{-N}^1, x_{-N+1}^1, \dots, x_0^1, \dots, x_{N+n_1}^1, y_{(N+n_1+1)}, \\ &\dots, y_{(N+n_1+n_{1,2})}, x_{-N}^2, \dots, x_{(N+n_2)}^2, \dots, x_{-N}^k, \dots, x_{(N+n_k)}^k) \end{aligned}$$

A sequência  $y \in \Sigma_A$  obtida pela repetição dos símbolos da sequência finita  $(\tilde{y})$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódicas com tempos de pulos  $n_{i,j} + N \leq N(\epsilon) + N$  que depende apenas de  $\epsilon$ . Assim todo subshift bilateral do tipo finito transitivo tem a propriedade de colagem de órbitas periódica.

O caso unilateral segue as linhas de demonstração do caso anterior, mas agora apenas nos preocupamos com os iterados para frente. A diferença é que iremos concatenar o símbolo  $y_{\sum_{j=0}^{i-1}(N+n_j)}$  com o símbolo  $x_0^{i+1}$  para  $i = 1, \dots, k - 1$ , e conseqüentemente o tempo de pulo será apenas  $n_{i,j}$  ao invés de  $n_{i,j} + N$ .

Assim concluímos que todo subshift bilateral ou unilateral do tipo finito transitivo possui a propriedade de colagem de órbitas periódica.  $\square$

## 2.1.6 Difeomorfismos hiperbólicos

Nosso objetivo agora é mostrar que todo difeomorfismo hiperbólico transitivo possui a propriedade de colagem de órbitas periódica. Antes disso precisamos revisar alguns resultados clássicos da teoria de dinâmicas hiperbólicas.

As partições de Markov são uma ferramenta importante em sistemas dinâmicos para determinarmos conjugações entre determinadas dinâmicas com uma estrutura complicada com uma dinâmica simbólica que é mais simples de ser estudada.

**Teorema 2.13** (Partição de Markov). *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo  $C^1$  e  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico localmente maximal tal que  $f|_{\Lambda}$  é transitivo. Então  $f|_{\Lambda}$  é um fator topológico de um subshift bilateral do tipo finito transitivo.*

*Demonstração.* Ver [KH99]  $\square$

Procedemos agora ao estudo da recorrência de órbitas em conjuntos hiperbólicos localmente maximais. O teorema da decomposição espectral mostra que o conjunto não-errantes para um difeomorfismo  $f$  Axioma A se divide em um número finito de componentes permutadas por  $f$  tal que em cada uma dessas componentes um iterado apropriado de  $f$  é topologicamente mixing.

**Teorema 2.14** (Decomposição espectral de Smale). *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo Axioma A  $C^1$  definido numa variedade diferenciável compacta  $M$ . Então existem subconjuntos invariantes fechados disjuntos  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$  tais que  $\Omega(f) = \bigsqcup_{i=1}^n \Lambda_i$  e*

1.  $f : \Lambda_i \rightarrow \Lambda_i$  é topologicamente transitivo;
2. Cada  $\Lambda_i$  pode ser decomposto em  $\Lambda_i = \bigsqcup_{j=1}^{n_i} \Lambda_{i,j}$ , onde:  $\Lambda_{i,j}$  são fechados, disjuntos,  $f(\Lambda_{i,j}) = \Lambda_{i,j+1}$ ,  $f(\Lambda_{i,n_i}) = \Lambda_{i,1}$  e  $f^{n_i} : \Lambda_{i,j} \rightarrow \Lambda_{i,j}$  é topologicamente mixing.

*Demonstração.* Ver [KH99]  $\square$

**Observação:** Cada  $\Lambda_i$  que aparece no teorema anterior é chamado de *peça básica*, além disso decorre da prova do referido teorema que cada peça básica é um conjunto hiperbólico localmente maximal.

**Teorema 2.15** (Teorema da especificação). *Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico compacto localmente maximal e topologicamente mixing para um difeomorfismo  $f$ . Então  $f|_\Lambda$  possui a propriedade de especificação periódica.*

*Demonstração.* Ver [KH99] □

Com os resultados anteriores estamos aptos a provar a nossa afirmação do começo desta seção.

**Proposição 2.16.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico localmente maximal tal que  $f|_\Lambda$  é transitivo. Então  $f|_\Lambda$  possui a propriedade de colagem de órbitas periódica.*

*Demonstração.* Pelo teorema da Partição de Markov,  $f|_\Lambda$  é semiconjugada a um subshift bilateral do tipo finito  $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  transitivo. Como a propriedade de colagem de órbitas periódica é preservada por fatores, basta mostrar que todo subshift bilateral do tipo finito transitivo possui a propriedade de colagem de órbitas periódica, e assim  $f|_\Lambda$  terá a propriedade de colagem de órbita. Isso já foi mostrado na proposição (2.12). □

**Corolário 2.17.** *Se  $f : M \rightarrow M$  é um difeomorfismo Axioma A então  $f$  restrito a cada peça básica possui a propriedade de colagem de órbitas periódica. Em particular, todo Anosov transitivo possui a propriedade de colagem de órbitas periódica.*

*Demonstração.* Esse corolário decorre diretamente do resultado anterior após a observação que cada peça básica é localmente maximal. Apesar disso, daremos uma outra prova inspirada na versão transitiva do teorema de Blokh (2.10), sem fazer uso do resultado anterior.

Fixemos  $\Lambda$  como peça básica de  $f$ . Sejam  $x_1, \dots, x_k \in \Lambda$  e inteiros positivos  $n_1, \dots, n_k$ . Escrevemos então:  $\Lambda = \bigsqcup_{i=1}^n W_i$ , união disjunta. Pelo teorema da decomposição espectral de Smale  $f(W_i) = W_{i+1}$ ,  $f(W_n) = W_1$  e  $f^n|_{W_i}$  é mixing.

**Afirmção:**  $W_1$  é hiperbólico e localmente maximal para  $f^n$ .

*Demonstração.* De fato,  $W_1$  é hiperbólico sendo um subconjunto de um conjunto hiperbólico. Uma vez que  $\Lambda$  é localmente maximal para  $f$  e os  $W_i$  são compactos e dois a dois disjuntos, podemos tomar vizinhanças abertas duas a duas disjuntas  $W_i \subset U_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , com  $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^k(\bigcup_{i=1}^n U_i) = \Lambda = \bigcup_{i=1}^n W_i$ . Podemos tomar também, por continuidade,  $W_1 \subset \hat{U}_1 \subset U_1$  tais que  $f^{i-1}(\hat{U}_1) \subset U_i, 1 \leq i \leq n$ . Por um lado, se

$x \in W_1$  então  $f^n(x) \in W_1 \subset \hat{U}_1 \Rightarrow x \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{nk}(\hat{U}_1)$ , logo  $W_1 \subset \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{nk}(\hat{U}_1)$ . Por outro lado se  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{nk}(\hat{U}_1)$  então  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{nk-i}(U_i)$ , pela escolha de  $\hat{U}_1$ . Logo  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^k(\bigcup_{i=1}^n U_i) = \bigcup_{i=1}^n W_i$ , mas  $x \in \hat{U}_1$ , pois como  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{nk}(\hat{U}_1)$ , tomando, em particular,  $k = 0$  temos  $x \in \hat{U}_1$  e como os  $U_i$  são disjuntos, temos  $x \in W_1$ .  $\square$

Da mesma forma que fizemos para o caso da dinâmica do intervalo, vamos usar a continuidade uniforme de  $f^i, i = 1, \dots, n$  para podermos sombrear os ponto cujos iterados não são múltiplos de  $n$ . Prosseguimos então com a prova.

Como  $f^i$  é contínua num conjunto compacto, então  $f^i$  é uniformemente contínua, logo:

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $0 < \delta_i < \epsilon$  tais que se  $d(x, y) < \delta_i \Rightarrow d(f^i(x), f^i(y)) \leq \epsilon, i = 1, \dots, n$ .

Seja  $\delta = \min\{\delta_i, i = 1, \dots, n\}$ . Para cada  $j = 1, \dots, k$  podemos encontrar índices  $2 \leq l \leq n$  tal que:

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j, & \text{se } x_j \in W_1 \\ f^{-l}(x_j) \in W_1, & \text{se } x_j \notin W_1 \end{cases}$$

Pela teorema da decomposição espectral (2.14)  $f^n|_{W_1}$  é mixing, e pela afirmação juntamente com o teorema da especificação (2.15), podemos aplicar a propriedade de especificação periódica em  $f^n|_{W_1}$  com os pontos  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$  com tempos  $\hat{n}_1 = \lfloor \frac{n_1}{n} \rfloor + 1, \dots, \hat{n}_{k-1} = \lfloor \frac{n_k}{n} \rfloor + 1$  e com erro  $0 < \delta \leq \epsilon$ . Logo existem  $N(\delta), y \in W_1$  e tempos  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_k = N(\delta)$  tais que:

$$d(f^{n_i}(y), f^{n_i}(\hat{x}_1)) \leq \delta, 0 \leq i \leq \hat{n}_1 \quad (2.12)$$

$$d(f^{n(\hat{n}_1 + \hat{p}_1 + \dots + \hat{n}_{j-1} + \hat{p}_{j-1} + i)}(y), f^{n_i}(\hat{x}_j)) \leq \delta, 0 \leq i \leq \hat{n}_j, 2 \leq j \leq k - 1 \quad (2.13)$$

$$f^{n(\hat{n}_1 + \hat{p}_1 + \dots + \hat{n}_{j-1} + \hat{p}_{j-1} + \hat{p}_k)}(y) = y \quad (2.14)$$

Pela continuidade uniforme de  $f^l$  também temos:

$$d(f^{n_i+l}(y), f^{n_i+l}(\hat{x}_1)) \leq \delta, 0 \leq i \leq \hat{n}_1 \quad (2.15)$$

$$d(f^{n(\hat{n}_1 + \hat{p}_1 + \dots + \hat{n}_{j-1} + \hat{p}_{j-1} + i)+l}(y), f^{n_i+l}(\hat{x}_j)) \leq \delta, 0 \leq i \leq \hat{n}_j, 2 \leq j \leq k - 1 \quad (2.16)$$

Para analisarmos os tempos de pulos, notemos que quando tomamos  $\lfloor \frac{n_i}{n} \rfloor + 1$  estamos sombreando todos os iterados múltiplos de  $n$  menores ou iguais a  $n_i$  e alguns iterados que eventualmente aparecem quando  $n_i$  não é um múltiplo de  $n$ , assim o número de iterados a mais que serão sombreados será menor ou igual a  $n - 1$ .

Dessa forma, existem  $p_j \leq \hat{p}_j + 2n - 1 \leq N(\delta) + 2n - 1$  que satisfazem a definição de

propriedade de colagem de órbitas, e os  $p_j$  são majorados por uma constante que depende apenas de  $\delta$ , temos por (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16)

$$\begin{aligned} d(y, x_1) &= d(f^i(y), f^i(x_1)) < \delta < \epsilon, 0 \leq i \leq n_1 \\ d(f^{n_1+p_1+\dots+n_{j-1}+p_{j-1}+i}(y), f^i(x_j)) &\leq \delta, 0 \leq i \leq n_j, 2 \leq j \leq k-1 \\ f^{(n_1+p_1+\dots+n_{j-1}+p_{j-1}+p_k)}(y) &= y \end{aligned}$$

Se  $x_1 \in W_1$  então escolhemos  $y$  como ponto de sobreamento, mas se por acaso  $x_1 \in W_{l+1}$  então escolhemos  $f^l(y)$  como ponto de sobreamento. Em todos os casos o ponto escolhido satisfaz a propriedade de colagem de órbitas.

Assim temos que  $f|_\Lambda$  possui a propriedade de colagem de órbitas periódica como queríamos.  $\square$

Também poderíamos enunciar um resultado análogo ao anterior para dinâmicas expansoras transitivas.

**Proposição 2.18.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  expansora definida numa espaço métrico compacto  $M$  tal que o conjunto dos pontos periódicos é denso e tal que  $f$  é transitiva. Então  $f$  possui a propriedade de colagem de órbitas periódica.*

*Demonstração.* Em ([Ru78]), ([Ru89]) e ([Ra09]) é mostrado que  $f$  é semiconjugada a um subshift unilateral do tipo finito transitivo. Mostramos na proposição (2.12) que todo subshift unilateral do tipo finito transitivo tem a propriedade de colagem de órbitas periódica, e como a propriedade de colagem de órbitas periódica é preservado por semi-conjugação, então  $f$  possui a propriedade de colagem de órbitas periódica.  $\square$

Também é possível dar uma outra prova do exemplo anterior utilizando o respectivo teorema da decomposição espectral para expansoras (Teorema da decomposição dinâmica, Ver [OV03])

## 2.2 Propriedade de colagem de órbitas reparametrizadas

Em [BTV16] é obtido resultados de genericidade de transitividade forte, na topologia  $C^0$ . Para tal, foi introduzido um novo conceito de propriedade de colagem de órbitas para fluxos ainda mais fraca que a propriedade introduzida em [BV15], onde agora são permitidas reparametrizações do tempo de evolução do sistema. Uma maneira de destruir a propriedade de colagem de órbitas é fazendo perturbações no fluxo de modo que

os pontos podem começar “próximos”, mas ao longo do tempo eles podem afastar-se um do outro pelo fato de que um está “caminhando mais rápido”. A próxima noção de propriedade de colagem de órbitas é uma maneira de “empurrar” o ponto que está mais lento, e assim ficar suficientemente próximo nos iterados desejados.

Por  $\text{Rep}$  nós denotamos ao conjunto de todos os homeomorfismos crescentes  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (reparametrizações) satisfazendo  $\tau(0) = 0$ . Fixado  $\epsilon > 0$ , definimos o conjunto

$$\text{Rep}(\epsilon) := \{\tau \in \text{Rep} : |\frac{\tau(t) - \tau(s)}{t - s} - 1| < \epsilon, s, t \in \mathbb{R}\}$$

Essa condição implica que toda vez que  $\tau$  for diferenciável, sua derivada estará próximo da identidade.

**Definição 2.19.** *Seja  $(X_t)_t$  um fluxo contínuo sobre um espaço métrico compacto  $(M, d)$ . Dizemos que  $(X_t)_t$  satisfaz a propriedade de colagem de órbita reparametrizada se dado  $\epsilon > 0$  existe  $K(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$  tal que para quaisquer pontos  $x_0, \dots, x_k \in M$  e tempos  $t_0, \dots, t_k \geq 0$  existem  $p_0, \dots, p_k \leq K(\epsilon)$ , uma reparametrização  $\tau \in (\text{Rep}(\epsilon))$  e um ponto  $y \in M$  tais que*

$$d(X^{\tau(t)}(y), X^t(x_0)) < \epsilon \text{ para todo } t \in [0, t_0]$$

e

$$d(X^{\tau(t + \sum_{j=0}^{i-1} (p_j + t_j))}(y), X^t(x_i)) < \epsilon \text{ para todo } t \in [0, t_i]$$

para todo  $1 \leq i \leq k$ . Se, adicionalmente, o ponto  $y$  poder ser tomado periódico (isto é,  $X^{\tau(\sum_{j=0}^k (p_j + t_j))}(y) = y$  para algum  $p_k \leq K(\epsilon)$ ) dizemos que  $(X_t)_t$  satisfaz a propriedade de colagem de órbita reparametrizada periódica.

**Observação:** *Pela escolha da classe de reparametrização  $(\text{Rep}(\epsilon))$  temos a seguinte propriedade:  $\tau(t + p_1) - \tau(t) \leq (1 + \epsilon)p_1 \leq (1 + \epsilon)K(\epsilon)$ .*

É importante observar que o tempo de pulo real não será  $p_i$ , mas algum tempo majorado usando a observação acima. Mais ainda, a reparametrização depende dos pontos considerados.

Em [BTV16] é provado resultados de  $C^0$ -genericidade dos fluxos satisfazendo a propriedade de colagem de órbitas reparametrizada periódica em certos conjuntos específicos. Além disso, é importante mencionar que no caso discreto os resultados de  $C^0$ -genericidade são para homeomorfismos satisfazendo a propriedade de colagem de órbitas periódica.

# Capítulo 3

## Fluxos de suspensão

Antes de provar um resultado que nos fornece um critério para a construção de fluxos com a propriedade de colagem de órbita, vamos introduzir a distância *Bowen-Walters* para semifluxos de suspensão. Essa distância é definida como o ínfimo de caminhos caminhos que são concatenações de caminhos horizontais e verticais. Assumimos que  $(M, d)$  é um espaço métrico,  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação contínua,  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  é uma função teto contínua e  $(X_t)_{t \geq 0}$  é o semifluxo de suspensão sobre  $f$  agindo sobre o espaço  $M_\rho + \{(x, t) \in M \times \mathbb{R}^+; 0 \leq t \leq \rho(x)\}$ . Se  $\rho \equiv 1$  é constante igual a 1 então definimos a *distância horizontal* para pontos em  $M \times \{t\}$  por

$$d_h((x, t), (y, t)) = (1 - t)d(x, y) + td(f(x), f(y))$$

e definimos a *distância vertical* para pontos  $(x, t)$  na órbita de  $(y, s)$  por

$$d((x, t), (y, s)) = \inf\{|r| : X_r(x, t) = (y, s)\}$$

Então a *distância de Bowen-Walters*  $d_1((x, t), (y, s))$  é definida como como o ínfimo da soma das medidas dos caminhos horizontais e verticais conectando  $(x, t)$  e  $(y, s)$ . Para uma função teto  $\rho$  contínua arbitrária a *distância de Bowen-Walters* é definida, para quaisquer pontos  $(x, t), (y, s) \in M$  como

$$d_\rho((x, t), (y, s)) := d_1((x, \frac{t}{\rho(x)}), (y, \frac{s}{\rho(y)}))$$

**Observação:** A distância de Bowen-Walters gera a mesma topologia que a métrica induzida no fluxo de suspensão pela dinâmica da base, Ver [BB00] e [BW72].

O próximo teorema foi originalmente provado em ([BV15])

**Teorema 3.1.** *Seja  $M$  um espaço métrico e  $f : M \rightarrow M$  satisfazendo a propriedade de colagem de órbitas. Assuma que a função altura  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  é limitada superiormente e afastada do zero, é uniformemente contínua e as constantes*

$$C_\xi := \sup_{n \geq 1} \sup_{y \in B(x, n, \xi)} |S_n \rho(x) - S_n \rho(y)| < \infty, \quad \text{verificam} \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} C_\xi = 0 \quad (3.1)$$

onde  $S_n\rho = \sum_{j=0}^{n-1} \rho \circ f^j$ . Então o fluxo de suspensão obtido pela base  $f$  e altura  $\rho$  tem a propriedade de colagem de órbita. Além disso, se  $f$  satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódica, então a suspensão satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódica.

*Demonstração.* Assumimos que  $f : M \rightarrow M$  satisfaz a propriedade de colagem de órbita e que a função altura  $\rho$  é limitada inferiormente e superiormente. Dado  $\epsilon > 0$  arbitrário e fixado, tomamos pontos  $\{(x_i, s_i) \in M_\rho, i = 1, \dots, k\}$  e tempos  $\{t_i, i = 1, \dots, k\}$  arbitrários. Para todo  $1 \leq i \leq k$ , seja  $n_i = n_i(x_i, s_i, t_i) \in \mathbb{N}_0$  determinado pela equação

$$\sum_{j=1}^{n_i-1} \rho(f^j(x_i)) \leq s_i + t_i < \sum_{j=1}^{n_i} \rho(f^j(x_i))$$

Usando que  $\rho$  é uniformemente contínua e satisfaz a condição 3.1, existe  $0 < \xi < \frac{\epsilon}{3}$  suficientemente pequeno tal que  $\xi + C_\xi < \frac{\epsilon}{3}$ , que  $C_\xi < \frac{\epsilon}{3} \inf_{x \in M} \{\rho(x)\}$  e  $|\rho(z) - \rho(w)| < \frac{\epsilon(\inf\{\rho\})^2}{3\sup\{\rho\}}$  para todo  $z, w \in M$  com  $d(z, w) < \xi$ .

Usaremos, então, a propriedade de colagem de órbita de  $f$  com erro  $\xi$ . Mais precisamente, se  $N(\xi)$  é dado pela propriedade de colagem de órbita de  $f$ , existe  $x \in M$  que sombreia os pedaços de órbitas dos pontos  $x_i$  durante  $n_i + 1$  iterados com “tempos de pulos” no máximo  $N(\xi)$  iterados, isto é, existem  $\{\tilde{p}_i \leq N(\xi), 1 \leq i \leq k\}$ , e  $x \in M$  tal que:

$$\begin{aligned} d(f^j(x), f^j(x_1)) &\leq \xi, \quad 0 \leq j \leq n_1 + 1 \\ d(f^{j+\tilde{p}_1+n_1+\dots+\tilde{p}_{i-1}+n_{i-1}+(i-1)}(x), f^j(x_i)) &\leq \xi, \quad 0 \leq l \leq n_i + 1, \quad 2 \leq i \leq k \end{aligned}$$

Tomamos  $T(\epsilon) = T(\xi) := (N(\xi) + 2) \sup \rho$ . Observamos que  $T(\xi)$  depende apenas de  $\xi$ , e portanto depende apenas de  $\epsilon$ , e do supremo da função altura  $\rho$ . Tomamos então  $s = s_1$ .

Antes de demonstrar o teorema faremos alguns comentários sobre as dificuldades envolvidas na demonstração. Nosso objetivo é mostrar que a trajetória do ponto  $(x, s)$  sob a ação do fluxo de suspensão segue suficientemente próximo dos pedaços de órbitas gerados pelos pontos  $(x_i, s_i)$  com um controle no tempo entre os pedaços de órbitas. Em cada momento do processo de sombreamento, precisamos de um controle no número de pulos envolvidos tanto do ponto  $x$  quanto dos pontos  $x_i$ . Demonstraremos apenas o caso  $k = 2$  que abrange todas as dificuldades envolvidas no caso geral e onde a notação é significativamente simplificada. O caso geral pode ser demonstrado semelhantemente a este. Como a propriedade de colagem de órbitas não depende da métrica, e sim da topologia, vamos utilizar a distância de Bowen-Walters para fazer as estimativas. Procedemos então com a seguinte afirmação:

**Afirmação:**  $d_\rho(X_t(x, s), X_t(x_1, s_1)) \leq \epsilon, t \in [0, t_1]$  e existe  $p_1 \leq T(\epsilon)$  tal que  $d_\rho(X_{t+t_1+p_1}(x, s), X_t(x_2, s_2)) \leq \epsilon \forall t \in [0, t_2]$ .



*Demonstração.* Uma vez que  $s = s_1$  podemos escrever:

$$X_t(x, s_1) = (f^j(x), t + s_1 - \sum_{l=0}^{j-1} (\rho(f^l(x))))$$

e,

$$X_t(x_1, s_1) = (f^{j_1}(x_1), t + s_1 - \sum_{l=0}^{j_1-1} (\rho(f^l(x_1))))$$

onde

$j = j(x, s_1, t) \in \mathbb{N}_0$  e  $j_1 = j_1(x_1, s_1, t) \in \mathbb{N}_0$  são unicamente determinados por:

$$\sum_{l=1}^{j-1} \rho(f^l(x)) \leq s + t < \sum_{l=1}^j \rho(f^l(x_i)), \sum_{l=1}^{j_1-1} \rho(f^l(x_1)) \leq s_1 + t < \sum_{l=1}^{j_1} \rho(f^l(x_1)) \quad (3.2)$$

Pela escolha de  $\xi$  temos  $C_\xi \ll \inf_{x \in M} \rho(x)$  e então  $|j(x, s_1, t) - j_1(x_1, s_1, t)| \leq 1$  para todo  $t \in [0, t_1]$ . Podemos agora estimar a distância de Bowen-Walters,  $d_\rho$  de acordo com os seguintes três casos:

(i) se  $j = j(x, s_1, t) = j_1(x_1, s_1, t)$  podemos estimar a distância acima naturalmente pelos segmentos vertical e horizontal. Segue-se então que

$$\begin{aligned} & d_\rho(X_t(x, s_1), X_t(x_1, s_1)) \\ &= d_1\left(\left(f^j(x), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^i(x))}{\rho(f^j(x))}\right), \left(f^{j_1}(x_1), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x_1))}\right)\right) \\ &\leq d_1\left(\left(f^j(x), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^i(x))}{\rho(f^j(x))}\right), \left(f^j(x_1), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^j(x_1))}\right)\right) \quad (A_1) \\ &+ d_1\left(\left(f^j(x_1), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^j(x_1))}\right), \left(f^{j_1}(x_1), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x_1))}\right)\right) \quad (A_2) \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} d_\rho(X_t(x, s_1), X_t(x_1, s_1)) &\leq \left(1 - \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^i(x))}{\rho(f^j(x))}\right) d(f^j(x), f^j(x_1)) \\ &+ \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^i(x))}{\rho(f^j(x))} d(f^{j+1}(x), f^{j+1}(x_1)) \\ &+ \left| \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x_1))} - \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^j(x_1))} \right| \end{aligned}$$

Uma vez que os pontos numa mesma bola dinâmica sempre estão a uma distância  $\xi$  ao longo de um determinado pedaço de órbita a soma dos dois primeiros termos no lado direito acima é menor que  $\xi$ . Quanto ao terceiro termo do lado direito acima, que denotamos por (\*\*), pela escolha de  $\xi$  e pela continuidade uniforme da função  $\rho$ , deduzimos usando a desigualdade triangular que:

$$\begin{aligned}
 (**) &\leq \left| \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x) - s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1)))}{\rho(f^{j_1}(x))} \right| \\
 &\quad + \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x))\rho(f^{j_1}(x_1))} |\rho(f^{j_1}(x)) - \rho(f^{j_1}(x_1))| \\
 &\leq \frac{C_\xi}{\inf \rho} + \frac{C_\xi}{\inf \rho}
 \end{aligned}$$

Pela escolha de  $\xi$  temos  $d_\rho(X_t(x, s_1), X_t(x_1, s_1)) < \epsilon$  como queríamos mostrar.

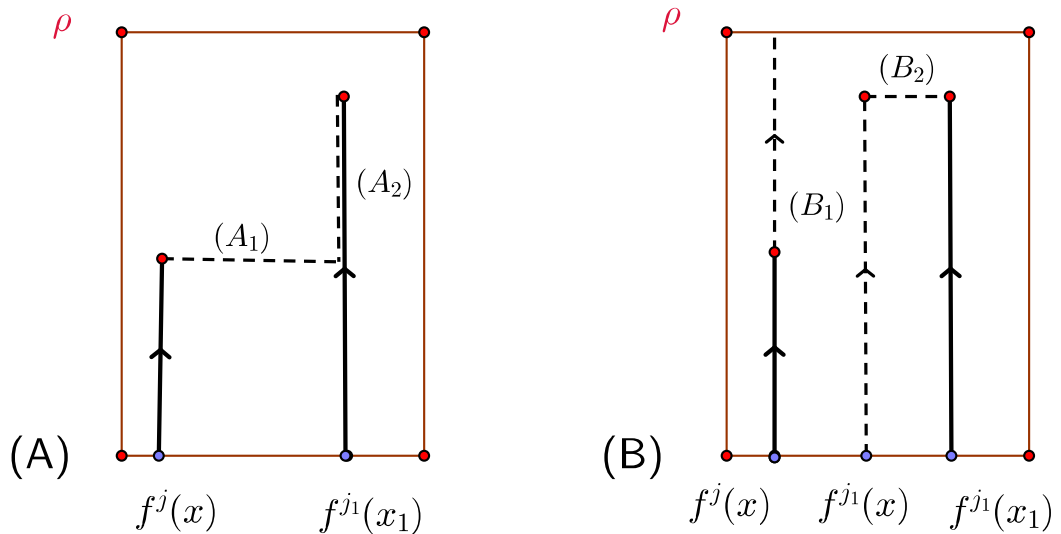


Figura 3.1: Descrição esquemática dos segmentos vertical e horizontal usados para estimar a distância de Bowen-Walters: (A) corresponde ao caso (i) acima; (B) corresponde ao caso (iii) abaixo e que podemos utilizar para ilustrar também o caso (ii) que possui prova semelhante ao caso (iii). Figura encontrada originalmente em [BV15]

(ii) O segundo caso a considerar é  $j = j(x, s_1, t) = j_1(x_1, s_1, t) + 1$ . Notando que

$f^j(x)$  e  $f^{j_1}(x)$  são elementos consecutivos da mesma órbita, temos

$$\begin{aligned} & d_\rho(X_t(x, s_1), X_t(x_1, s_1)) \\ &= d_1\left(\left(f^j(x), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^i(x))}{\rho(f^j(x))}\right), \left(f^{j_1}(x_1), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x_1))}\right)\right) \\ &\leq d_1\left(\left(f^{j_1}(x_1), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x_1))}\right), \left(f^{j_1}(x), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x_1))}\right)\right) \quad (B_1) \end{aligned}$$

$$+ d_1\left(\left(f^{j_1}(x), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x_1))}\right), \left(f^j(x), \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^i(x))}{\rho(f^j(x))}\right)\right) \quad (B_2)$$

$$\leq \left(1 - \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x_1))}\right) d(f^{j_1}(x_1), f^{j_1}(x))$$

$$+ \frac{s_1 + t - \sum_{i=1}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x_1))} d(f^{j_1+1}(x_1), f^{j_1+1}(x))$$

$$+ \left| \left(1 - \frac{s_1 + t - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x_1))}\right) + \frac{s_1 + t - \sum_{i=1}^{j-1} \rho(f^i(x))}{\rho(f^j(x))} \right|$$

Uma vez que  $x$  foi escolhido previamente pela propriedade de colagem de órbitas da base  $f$  de tal forma que sua órbita esteja próxima da órbita de  $x_1$  durante os primeiros  $j_1 + 1$  iterados então a soma dos primeiros dois termos é menor que  $\xi$ . Quanto aos dois termos envolvidos no valor absoluto, que denotamos por  $\phi$ , são positivos e  $j(x, s_1, t) = j_1(x_1, s_1, t) + 1$  segue-se da relação (3.2) que

$$\phi = \frac{-s_1 - t + \sum_{i=1}^{j_1} \rho(f^i(x_1))}{\rho(f^{j_1}(x_1))} + \frac{s_1 + t - \sum_{i=1}^{j-1} \rho(f^i(x))}{\rho(f^j(x))} \leq \frac{C_\xi}{\inf \rho} + \frac{C_\xi}{\inf \rho}$$

Portanto, obtemos  $d_\rho(X_t(x, s_1), X_t(x_1, s_1)) < \epsilon$ .

(iii) Se  $j(x, s_1, t) = j_1(x_1, s_1, t) - 1$  as contas são completamente análogas ao item (ii) permutando os papéis de  $x_1$  e  $x$ .

Após a escolha do ponto  $(x, s)$  parcialmente determinado pela propriedade de colagem de órbita e tomando  $s = s_1$ , afirmamos que a segunda parte da afirmação também é satisfeita. Para cada uma das situações (i)-(iii) acima com tempo  $t_1$  vamos subdividir a prova em mais três subcasos adicionais, correspondendo às posições relativas no número de pulos de  $x$  e de  $x_1$ .

Assumimos, primeiramente, o caso (i), isto é,  $j_1 = j(x, s_1, t_1) = j_1(x_1, s_1, t_1)$  (ver figura 3.2 abaixo). Em outras palavras

$$X_{t_1}(x, s) = \left(f^{j_1}(x), s_1 + t_1 - \sum_{i=1}^{j_1-1} \rho(f^i(x))\right), X_{t_1}(x_1, s_1) = \left(f^{j_1}(x_1), s_1 + t_1 - \sum_{i=1}^{j_1-1} \rho(f^i(x_1))\right)$$

onde

$$\sum_{l=0}^{j_1-1} \rho(f^l(x)) \leq s + t < \sum_{l=0}^{j_1} \rho(f^l(x)), \sum_{l=0}^{j_1-1} \rho(f^l(x_1)) \leq s_1 + t < \sum_{l=0}^{j_1} \rho(f^l(x_1))$$

Nesse caso tomamos então:

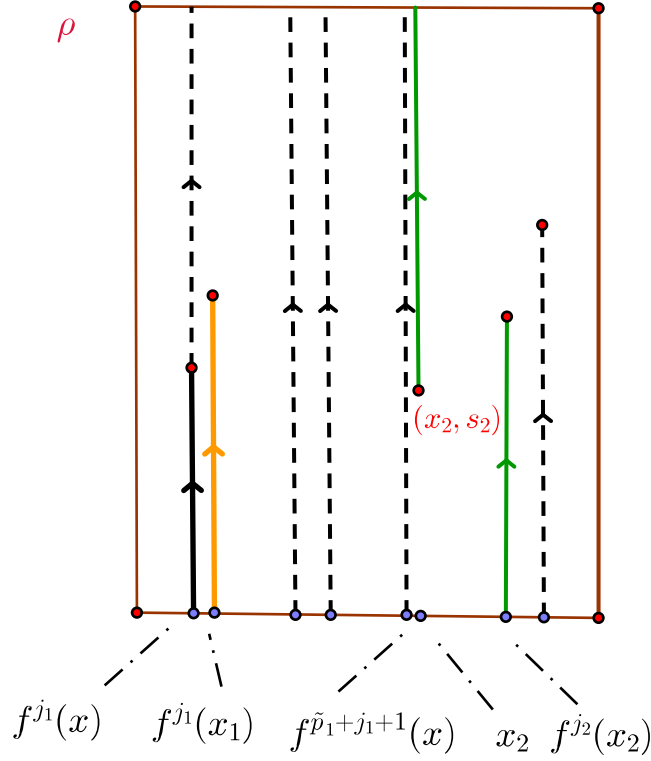


Figura 3.2: A linha pontilhada representa o pedaço da trajetória de  $x$  sombreando o pedaço da trajetória  $X_t(f^{j_1}(x_1), 0)$  para  $t \in [0, s_1 + t_1 - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x))]$ , e após algum tempo  $p_1$ , sombreia o pedaço da trajetória  $X_t(x_2, s_2)$  para um tempo  $t \in [0, t_2]$ . Figura originalmente encontrada em [BV15]

$$p_1 = \begin{cases} s_2 + \sum_{i=0}^{\tilde{p}_1-1} \rho(f^{j_1+i}(x)) - [s_1 + t_1 - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x))], & \text{se } s_2 \leq \rho(f^{\tilde{p}_1+j_1}(x)) \\ (s_2 - C_\xi) + \sum_{i=0}^{\tilde{p}_1-1} \rho(f^{j_1+i}(x)) - [s_1 + t_1 - \sum_{i=0}^{j_1-1} \rho(f^i(x))], & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Em ambos os casos temos  $|p_1| \leq (\tilde{p}_1 + 2) \sup \rho \leq (N(\xi) + 2) \sup \rho = T(\epsilon)$ . Agora, pode-se estimar  $d_\rho(X_{t+p_1+t_1}(x, s_1), X_t(x_2, s_2))$  de acordo com a posição relativa do número de pulos.

Se  $s_2 \leq \rho(f^{\tilde{p}_1+j_1}(x))$  então  $X_{p_1+t_1}(x, s_1) = (f^{j_1+\tilde{p}_1}(x), s_2)$ . Para qualquer  $t \in [0, t_2]$ , definimos, com abuso de notação  $j(f^{j_1+\tilde{p}_1}(x), s_2, t) \in \mathbb{N}_0$  e  $j_2(x_2, s_2, t) \in \mathbb{N}_0$  que são unicamente determinandos por

$$\sum_{l=0}^{j-1} \rho(f^{l+j_1+\tilde{p}_1}(x)) \leq s_2 + t < \sum_{l=0}^j \rho(f^{l+j_1+\tilde{p}_1}(x)), \sum_{l=0}^{j_2-1} \rho(f^l(x_2)) \leq s_2 + t < \sum_{l=0}^{j_2} \rho(f^l(x_2)) \quad (3.3)$$

Estes números de pulos satisfazem  $|j(f^{j_1+\tilde{p}_1}(x), s_2, t) - j_2(x_2, s_2, t)| \leq 1$  para todo  $t \in [0, t_2]$ . Subdividindo, como anteriormente, em três casos, quando  $j = j_2$ ,  $j = j_2 - 1$  e  $j = j_2 + 1$  podemos deduzir similarmente com vimos casos anteriores que

$$d_\rho(X_{t+p_1+t_1}(x, s_1), X_t(x_2, s_2)) < \epsilon \text{ para todo } t \in [0, t_2]$$

Se  $s_2 > \rho(f^{j_1+\tilde{p}_1}(x))$  então  $X_{p_1+t_1}(x, s) = (f^{j_1+\tilde{p}_1}(x), s_2 - C_\xi)$ . Para qualquer  $t \in [0, t_2]$  definimos  $j = j(f^{\tilde{p}_1+j_1}(x), s_2 - C_\xi, t) \in \mathbb{N}_0$  determinado unicamente por

$$\sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x)) \leq (s_2 - C_\xi) + t < \sum_{i=0}^j \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x)) \quad (3.4)$$

e  $j_2 = j_2(x_2, s_2, t) \in \mathbb{N}_0$  determinado acima por (3.3).

(i) No caso que  $j = j_2$ ,

$$\begin{aligned} & d_\rho(X_{t+p_1+t_1}(x, s_1), X_t(x_2, s_2)) = \\ & d_1\left(\left(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x), \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x))}\right), \left(f^{j_2}(x_2), \frac{s_2 + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^i(x_2))}{\rho(f^{j_2}(x_2))}\right)\right) \\ & \leq d_1\left(\left(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x), \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x))}\right), \right. \\ & \left. \left(f^{j_2}(x_2), \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x))}{\rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x))}\right)\right) \\ & + d_1\left(\left(f^{j_2}(x_2), \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x))}\right), \left(f^{j_2}(x_2), \frac{s_2 + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^i(x_2))}{\rho(f^{j_2}(x_2))}\right)\right) \end{aligned}$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned} & d_\rho(X_{t+p_1+t_1}(x, s_1), X_t(x_2, s_2)) \\ & \leq \left(1 - \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j-1} (\rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x)))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x))}\right) d(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x), f^{j_2}(x_2)) \\ & + \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x))} d(f^{j+j_1+\tilde{p}_1+1}(x), f^{j_2+1}(x_2)) \\ & + \left| \left(1 - \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j-1} (\rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x)))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x))}\right) - \frac{s_2 + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^i(x_2))}{\rho(f^{j_2}(x_2))} \right| \end{aligned}$$

Uma vez que  $j = j_2$  e pontos numa mesma bola dinâmica estão sempre a uma distância meor que  $\xi$  ao longo dos pedaços de órbitas, a soma dos dois primeiros termos do lado direito acima é menor que  $\xi$ . Devemos majorar o terceiro somatório do lado direito acima, o qual denotaremos por  $(***)$ . pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} (***) &\leq \left| \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x)) - s_2 - t + \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^i(x_2))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x))} \right| \\ &\quad + \frac{(s_2 + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^i(x_2)))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x)) * \rho(f^{j_2}(x_2))} |\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x)) - \rho(f^{j_2}(x_2))| \\ &\leq \frac{2C_\xi}{\inf(\rho)} + \frac{C_\xi}{\inf(\rho)} \end{aligned}$$

As estimativas nos casos  $j = j_2 - 1$  e  $j = j_2 + 1$  são obitidas similarmente aos casos já vistos ((ii) e (iii)). Como consequência temos  $d_\rho(X_{t+p_1+t_1}(x, s_1), X_t(x_2, s_2)) < \epsilon$  para todo  $t \in [0, t_2]$

Asumimos agora (ii) como acima no tempo  $t_1$ , isto é,  $j(x, s, t_1) = j_1 + 1$  com  $j_1 = j_1(x_1, s_1, t_1)$  (Ver figura 3.3 abaixo). Nesse caso tomamos

$$p_1 = \begin{cases} s_2 + \sum_{i=0}^{\tilde{p}_1-1} \rho(f^{j_1+1+i}(x)) - [s_1 + t_1 - \sum_{i=0}^{j_1} \rho(f^i(x))], & \text{se } s_2 \leq \rho(f^{\tilde{p}+j_1+1}(x)) \\ (s_2 - C_\xi) + \sum_{i=0}^{\tilde{p}_1-1} \rho(f^{j_1+1+i}(x)) - [s_1 + t_1 - \sum_{i=0}^{j_1} \rho(f^i(x))], & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Da mesma forma que nos casos anteriores, temos  $|p_1| \leq (\tilde{p}_1 + 2) \sup \rho \leq ((N(\xi) + 2) \sup \rho) = T(\epsilon)$  em ambos os casos.

Se  $s_2 \leq \rho(f^{j_1+1+\tilde{p}_1}(x))$  as contas são idênticas ao caso (ii) acima, assim provamos que  $d_\rho(X_{t+p_1+t_1}(x, s_1), X_t(x_2, s_2)) < \epsilon$  para todo  $t \in [0, t_2]$ .

No caso  $s_2 > \rho(f^{j_1+\tilde{p}_1+1}(x))$ , segue-se que

$$\begin{aligned} &d_\rho(X_{t+p_1+t_1}(x, s_1), X_t(x_2, s_2)) \\ &= d_1\left(\left(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x), \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x))}\right), \left(f^{j_2}(x_2), \frac{s_2 + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^i(x_2))}{\rho(f^{j_1}(x_2))}\right)\right) \\ &\leq d_1\left(\left(f^{j_2}(x_2), \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^{j_2-1}(x))}{\rho(f^{j_2}(x_2))}\right), \left(f^{j_2+j_1+\tilde{p}_1}(x), \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^i(x_2))}{\rho(f^{j_2}(x_2))}\right)\right) \\ &\quad + d_1\left(\left(f^{j_2+j_1+\tilde{p}_1}(x), \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^i(x))}{\rho(f^{j_2}(x_2))}\right), \left(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x), \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x))}\right)\right) \\ &\leq \left(1 - \frac{s_2 + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^i(x))}{\rho(f^{j_2}(x))}\right) d(f^{j_2+j_1+\tilde{p}_1}(x), f^{j_2}(x_2)) \\ &\quad + \frac{s_2 + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^i(x_2))}{\rho(f^{j_2}(x_2))} d(f^{j_2+1}(x_2), f^{j_2+j_1+\tilde{p}_1+1}(x)) + (\star) \end{aligned}$$

onde  $(\star) := \left| \left(1 - \frac{s_2 + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^i(x_2))}{\rho(f^{j_2}(x))}\right) + \frac{s_2 - C_\xi + t - \sum_{i=0}^{j_2-1} \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x))} \right|$ . Pela escolha de  $x$  segue-se que a soma dos dois primeiros termos é menor que  $\xi$ . Uma vez que os dois termos

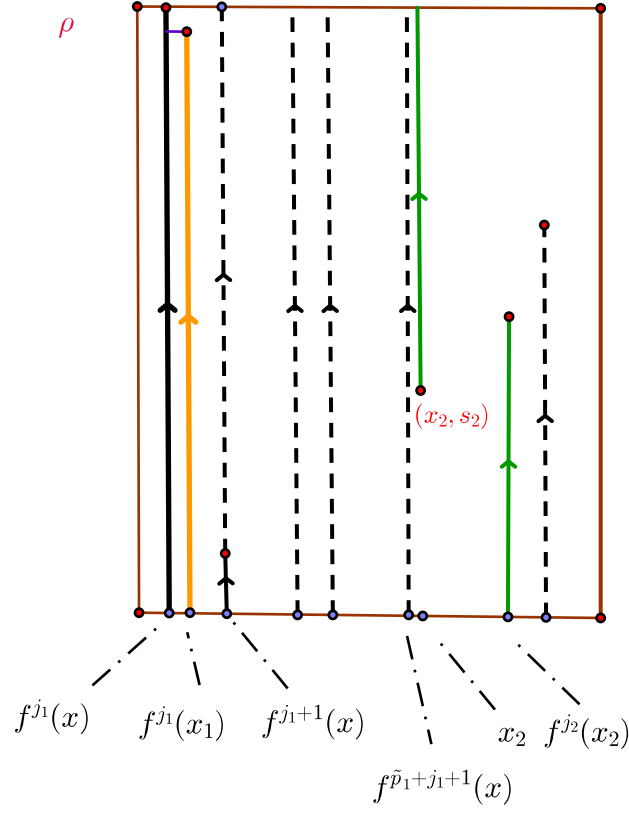


Figura 3.3: Figura esquemática onde a linha pontilhada representa o pedaço de trajetória de  $x$  sombreando o pedaço de trajetória  $X_t(f^{j_1+1}(x_1), 0)$  para  $t \in [0, s_1 + t_1 - \sum_{i=0}^{j_1} \rho(f^i(x))]$ , e depois de algum tempo  $p_1$ , sobrepõe o pedaço de trajetória  $X_t(x_2, s_2)$  para  $t \in [0, t_2]$ .

envolvidos no valor absoluto são positivos e  $j = j(f^{j_1+\tilde{p}_1}(x), s_2 - C_\xi, t) = j_2(x_2, s_2, t) + 1$  temos:

$$(\star) = \left| \left( -\frac{s_2+t-\sum_{i=0}^{j_2}(\rho(f^i(x_2)))}{\rho(f^{j_2}(x_2))} \right) + \frac{s_2-C_\xi+t-\sum_{i=0}^{j-1} \rho(f^{i+j_1+\tilde{p}_1}(x))}{\rho(f^{j+j_1+\tilde{p}_1}(x))} \right| \leq \frac{2C_\xi}{\inf(\rho)} + \frac{C_\xi}{\inf(\rho)}$$

Portanto obtemos  $d_\rho(X_{t+p_1+t_1}(x, s_1), X_t(x_2, s_2)) \leq \epsilon$

Se agora vale o caso (iii) com tempo  $t_1$ , isto é,  $j(x, s_1, t_1) = j_1(x_1, s_1, t_1) - 1$ , novamente as contas são análogas ao caso (ii) com a modificação na definição de  $p_1$  que deve ser mudada para

$$p_1 = \begin{cases} s_2 + \sum_{i=0}^{\tilde{p}_1-1} \rho(f^{j_1-1+i}(x)) - [s_1 + t_1 - \sum_{i=0}^{j_1-2} \rho(f^i(x))], & \text{se } s_2 \leq \rho(f^{\tilde{p}_1+j_1-1}(x)) \\ (s_2 - C_\xi) + \sum_{i=0}^{\tilde{p}_1-1} \rho(f^{j_1-1+i}(x)) - [s_1 + t_1 - \sum_{i=0}^{j_1-2} \rho(f^i(x))], & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como anteriormente, temos  $|p_1| \leq (\tilde{p}_1 + 2) \sup \rho \leq ((N(\xi) + 2) \sup \rho) = T(\epsilon)$  em ambos os casos.

Todas as estimativas restantes necessárias para provar a propriedade de colagem de órbitas são feitas completamente similares aos casos já vistos, e por essa razão omitiremos os detalhes.  $\square$

Provamos então a afirmação, e então como afirmamos acima o fluxo de suspensão possui a propriedade de colagem de órbita. Isso completa a prova do teorema  $\square$

Vamos agora ver como podemos aplicar o teorema anterior para criar exemplos importante de fluxos com a propriedade de colagem de órbitas.

Consideramos o subshift do tipo finito  $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ . Para  $\rho : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua positiva pode-se definir um fluxo de suspensão da seguinte forma:

Seja

$$Y := \{(x, s) : s \in [0, \rho(x)], x \in \Sigma_A\} \subset \Sigma_A \times \mathbb{R}$$

Identificamos os pontos  $(x, \rho(x))$  e  $(\sigma_A(x), 0)$  para todo  $x \in \Sigma_A$  para obter o espaço  $\Lambda_{A,\rho}$ . Então  $\Lambda_{A,\rho}$  é um espaço métrico e pode-se definir um fluxo  $g^t$  sobre  $\Lambda_{A,\rho}$  por

$$g^t(x, s) = (x, s + t), \forall s + t \in [0, \rho(x)]$$

e lembrando da identificação. mais precisamente, se  $z = \phi(x, s)$ , onde  $\phi : Y \rightarrow \Lambda_{A,\rho}$  é a aplicação quociente, então  $g^t(z) = (\sigma_A^k(x), t + s - \sum_{j=0}^{k-1} \rho(\sigma_A^j(x)))$  com  $k$  escolhido de tal forma que

$$t + s - \sum_{j=0}^{k-1} \rho(\sigma_A^j(x)) \in [0, \rho(\sigma_A^k(x))]$$

**Teorema 3.2.** *Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico localmente maximal para o fluxo  $X^t : M \rightarrow M$  tal que  $X^t|_\Lambda$  é transitivo. Então existem um subshift do tipo finito bilateral transitivo  $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ , uma função teto positiva  $\rho : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}^+$  Hölder e uma aplicação contínua sobrejetiva  $h : \Lambda_{A,\rho} \rightarrow \Lambda$  tal que se  $g^t : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  é uma suspensão de  $\sigma_A$ , temos:*

$$h \circ X^t|_\Lambda = g^t \circ h$$

e  $g^t$  é transitivo.

*Demonstração.* [Bow75]  $\square$



Como aplicação do teorema 3.1 mostraremos que todo um fluxo Axioma A restrito a cada peça básica satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódica.

**Corolário 3.3.** *Se  $(X^t) : M \rightarrow M$  é um fluxo Axioma A então  $(X^t)$  restrito a cada peça básica satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódica. Em particular, todo fluxo Anosov transitivo satisfaz a propriedade de colagem de órbitas periódica.*

*Demonstração.* Fixemos  $\Lambda$  uma peça básica. Pelo Teorema 3.2  $(X^t|_{\Lambda})$  é um fator topológico de uma suspensão de um subshift bilateral do tipo finito transitivo com altura Hölder. Assim, como fatores topológicos preservam a propriedade de colagem de órbitas, basta mostrar que toda suspensão de um subshift bilateral do tipo finito transitivo com altura Hölder possui a propriedade de colagem de órbitas. Já mostramos na Proposição (2.12) que todo subshift do tipo finito transitivo possui a propriedade de colagem de órbitas periódica, assim pelo Teorema 3.1 basta mostrar que toda função Hölder  $\rho : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaz a condição 3.1 do Teorema 3.1.

Seja  $(y_k) \in B((x_k), n, \epsilon)$  e  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^N} \leq \epsilon$ . Se  $(y_k) \in B((x_k), n, \frac{1}{2^N})$ , por definição de bola dinâmica devemos ter  $y_i = x_i, -N \leq i \leq N + n$ . Para  $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , a quantidade de símbolos à esquerda do iterado  $i$  de  $(x_k), (y_k)$  que coincidem são menores ou iguais à quantidade dos símbolos que coincidem à direita, logo devemos ter  $d(\sigma^i(x_k), \sigma^i(y_k)) \leq \frac{1}{2^{N+i}}, 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Para  $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , a quantidade de símbolos à direita do iterado  $i$  de  $(x_k), (y_k)$  que coincidem são menores ou iguais à quantidade dos símbolos que coincidem à esquerda. Logo devemos ter  $d(\sigma^i(x_k), \sigma^i(y_k)) \leq \frac{1}{2^{N+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}}, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i \leq n$ . Assim temos:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\sigma^i((x_k))) - \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\sigma^i((y_k))) \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\rho(\sigma^i((x_k))) - \rho(\sigma^i((y_k)))| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} C_{\alpha} (d(\sigma^i(x_k), \sigma^i(y_k)))^{\alpha} \\ &< \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{\alpha} \left( \frac{1}{2^{N+i}} \right)^{\alpha} + \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} C_{\alpha} \left( \frac{1}{2^{N+n-1-i}} \right)^{\alpha} \\ &\leq \frac{C_{\alpha}}{2^{N-1}} \frac{2^{\alpha} + 1}{2^{\alpha} - 1} \end{aligned}$$

e esta última expressão converge para zero quando  $N \rightarrow \infty$ .  $\square$

Agora mostraremos que a suspensão de dinâmicas expansoras com altura Hölder possui a propriedade de colagem de órbitas periódicas

**Corolário 3.4.** *Sejam  $f : M \rightarrow M$  uma dinâmica expansora transitiva, cujos pontos periódicos são densos, e  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  Hölder com constante  $\alpha$ . Então a suspensão de  $f$  com altura  $\rho$  possui a propriedade de colagem de órbitas periódica.*

*Demonstração.* Na Proposição 2.18 mostramos que toda aplicação expansora transitiva possui a propriedade de colagem de órbitas periódica. Assim, basta mostrar que toda função Hölder  $\rho$  satisfaz a condição 3.1 do Teorema 3.1. Seja  $\rho$  o raio da vizinhança local dado pela expansão e  $\lambda > 1$  a taxa de expansão local. Dado  $\epsilon < \rho$ , afirmamos que  $B(x, n, \epsilon) \subset B(x, \epsilon\lambda^{-n})$ . De fato, dado  $y \in B(x, n, \epsilon)$ , por definição temos  $d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ . Logo, por expansão,  $\epsilon \geq d(f^n(x), f^n(y)) \geq \lambda d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)) \geq \dots \geq \lambda^{n-2}d(f(x), f(y)) \geq \lambda^{n-1}d(x, y)$ . Logo  $d(x, y) \leq \epsilon\lambda^{-n+1}$ . Assim temos:

$$\begin{aligned} |S_n\rho(x) - S_n\rho(y)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\rho(f^i(x)) - \rho(f^i(y))| \\ &\leq C_\alpha \sum_{i=0}^{n-1} d(f^i(x), f^i(y))^\alpha \\ &\leq C_\alpha \epsilon^\alpha \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda^{-(n+i)\alpha}) \leq C_\alpha \epsilon^\alpha \frac{(\frac{1}{\lambda})^{\alpha n} - 1}{(\frac{1}{\lambda})^\alpha - 1} \\ &\leq C_\alpha \epsilon^\alpha \frac{1}{1 - (\frac{1}{\lambda})^\alpha} < \infty \end{aligned}$$

A última expressão acima converge para zero quando  $\epsilon$  vai para zero. □

# Capítulo 4

## Propriedades topológicas e ergódicas

Vamos agora introduzir algumas noções de transitividade e recorrência para fluxos contínuos a fim de estabelecer uma comparação com outras noções topológicas de caos.

**Definição 4.1.** *Seja  $(X_t)_t$  um fluxo contínuo num espaço métrico compacto  $M$ . Dizemos que*

- (1)  $(X_t)_t$  é topologicamente mixing, se para quaisquer conjuntos abertos  $U, V \subset M$  existe  $T > 0$  tal que  $X^{-t}(U) \cap V \neq \emptyset \forall t \geq T$ ;
- (2)  $(X_t)_t$  tem frequência inferior de visitas a bolas positiva se para todo  $\epsilon > 0$  e para quaisquer duas bolas  $B_1, B_2$  de raio  $\epsilon$ ;

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Leb}(s \in [0, t] : B_1 \cap X^{-s}(B_2) \neq \emptyset) > 0;$$

- (3)  $(X_t)_t$  tem taxa assintótica inferior de mistura assintótica na família  $\mathcal{B}$  das Bolas se para qualquer  $B_1(x_1, \epsilon), B_2(x_2, \epsilon) \in \mathcal{B}$  existe uma constante  $\tau = \tau(x_2, \epsilon) > 0$  tal que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Leb}(s \in [0, t] : B_1(x_1, \epsilon) \cap X^{-s}(B_2(x_2, \epsilon)) \neq \emptyset) \geq \tau(x_2, \epsilon) > 0;$$

- (4)  $(X_t)_t$  tem taxa de mistura assintótica inferior super linear na família  $\mathcal{B}$  de bolas se para qualquer centro  $x_2$  que é o centro de uma bola em  $\mathcal{B}$  existe  $C(x_2) > 0$  de tal maneira que  $\tau(x_2, \epsilon) \geq C(x_2)\epsilon$ ;

O teorema a seguir ilustra algumas características topológicas de sistemas dinâmicos com a propriedade de colagem de órbita. Esse resultado foi originalmente demonstrado em [BTV17]

**Teorema 4.2.** *Seja  $M$  uma variedade Riemmaniana compacta e conexa. Assumimos que  $(X^t)_t$  é a restrição a um conjunto invariante e compacto de um fluxo contínuo gerado por um campo de vetores lipschitz  $X : M \rightarrow TM$ . Se  $(X^t)_t$  satisfaz a propriedade de colagem de órbita reparametrizada, então:*

(1)  $(X^t)_t$  tem frequência inferior de visitas a bolas positiva

(2)  $(X^t)_t$  tem taxa inferior de mistura assintótica super linear na família de bolas  $\mathcal{B} := \{B(x, \epsilon); x \in \text{Per}((X^t)_t), \epsilon > 0\}$

Se o fluxo satisfaz a propriedade de colagem de órbita reparametrizada periódica, então:

(3)  $h_{\text{top}}((X^t)_t) \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log((\#\text{Per}(X^t)_t), T)$ , onde  $\text{Per}((X^t)_t, T)$  denota o número de órbitas periódicas de período menor ou igual a  $T$ .

(4) Se, adicionalmente, o fluxo  $(X^t)_t$  é Komuro expansivo, então:

(i)  $h_{\text{top}}((X^t)_t) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log((\#\text{Per}(X^t)_t), T)$

(ii) Todo ponto em  $M$  é um ponto de entropia para o fluxo  $(X^t)_t$ , isto é, calcular a entropia numa vizinhança de cada ponto é o mesmo que calcular a entropia de todo o sistema.

*Observação:* No item (4) o teorema ainda será válido se tomarmos  $\liminf$  ao invés de  $\limsup$ . O item (4) ainda será válido se no lugar de Komuro expansividade supormos que as órbitas periódicas são isoladas.

Antes de demonstrarmos o referido teorema precisamos fazer alguns comentários importantes. Na versão a tempo discreto do teorema acima para especificação usamos a noção de expansividade para dinâmicas a tempo discreto. No caso de fluxos precisamos primeiramente de uma noção adequada de expansividade para fluxos. Uma noção de expansividade para fluxos foi primeiramente introduzida por Rufus Bowen, mas em ([Ko84]) foi provado que os fluxos Bowen expansivos em variedades sem bordo não admitiam singularidades, por exemplo, o atrator de Lorenz não é Bowen expansivo pois apresenta uma singularidade que é acumulada por órbitas regulares do atrator. A noção que apresentaremos aqui é a noção introduzida por Komuro em que os fluxos komuro-expansivos podem ter singularidades.

**Definição 4.3.** *Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico compacto,  $(X_t)_t$  um fluxo contínuo sobre  $M$ . Dizemos que o fluxo  $(X_t)_t$  é Komuro expansivo se dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $x, y \in M$  e  $d(X^t(x), X^{h(t)}(y)) < \delta$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e algum homeomorfismo crescente  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  então existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $X^{h(t_0)}(y) \in X^{[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]}(x)$ , onde  $X^{[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]}(x) := \{X^t(x) : t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]\}$*

**Observação:** Vale a pena ressaltar que na prova do Teorema 4.2 que daremos só usaremos da definição de Komuro expansividade a reparametrização trivial  $h(t) = t$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Teorema 4.2.* Como se trata de uma análise local podemos supor no item (1) e no item (2) do Teorema, a menos de considerar as cartas locais, que  $M = \mathbb{R}^n$ . Uma vez que  $(X^t)_t$  é o fluxo obtido pela equação diferencial ordinária  $u' = X(u)$ , temos:

$$(X^t)'(x) = X(X^t(x)), X^0(x) = x$$

ou equivalentemente  $X^t(x) = x + \int_0^t X(X^s(x))ds$ . Seja  $L > 0$  a constante de lipschitz para  $X$ .

(1) Consideramos  $\epsilon > 0$  e  $0 < \lambda < \epsilon$ , e seja  $s(\lambda) = (1 + \lambda)K(\lambda)$  dado pela propriedade de colagem de órbita reparametrizada com erro  $\lambda$ . Consideramos as bolas  $B_i(x_i, \epsilon)$  com centro  $x_i \in M, i = 1, 2$ . Se existir  $T > 0$  tal que  $X^t(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$  para todo  $t \geq T$  então é evidente que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Leb}(\{s \in [0, t] : B(x_1, \epsilon) \cap X^{-s}(B(x_2, \epsilon)) \neq \emptyset\}) = 1$$

de outra maneira, existem seqüências  $(t_i)_i$  e  $(e_i)_i$  convergindo ao infinito tal que  $t_i < e_i < t_{i+1}$ , e  $X^{t_i}(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$  e  $X^{e_i}(B_1) \cap B_2 = \emptyset$  para todo  $i \geq 1$ . Pela propriedade de colagem de órbita reparametrizada podemos tomar a seqüência  $(t_i)$  tal que os “tempos de pulo”  $|t_{i+1} - t_i| \leq s(\lambda)$  para cada  $i \geq 1$ . Ainda mais, se  $y \in B(x_1, \lambda)$  então podemos usar que:

$$\|X^s(y) - x\| \leq \|x - y\| + \|X\|_\infty |s|$$

e assim deduzirmos que  $X^s(y) \in B(x_1, \epsilon)$  sempre que  $|s| \leq \frac{\epsilon - \lambda}{\|X\|_\infty}$ . Dado  $t > s(\lambda)$  seja  $n(t, \lambda)$  o único inteiro determinado por  $s(\lambda)n(t, \lambda) \leq t \leq s(\lambda)(n(t, \lambda) + 1)$ . Concluimos então que o conjunto

$$\{s \in [0, t] : B(x_1, \epsilon) \cap X^{-s}(B(x_2, \epsilon)) \neq \emptyset\}$$

contém pelo menos  $1 \leq n(t, \lambda) \leq \lfloor \frac{t}{s(\lambda)} \rfloor$  intervalos  $L_i$  tal que  $t_i \in L_i$  e  $\text{Leb}(L_i) \geq 2 \frac{\epsilon - \lambda}{\|X\|_\infty}$ . Assim temos que:

$$\text{Leb}(\{s \in [0, t] : B(x_1, \epsilon) \cap X^{-s}(B(x_2, \epsilon)) \neq \emptyset\}) \geq 2 \frac{\epsilon - \lambda}{\|X\|_\infty} n(t, \lambda)$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \text{Leb}(\{s \in [0, t] : B(x_1, \epsilon) \cap X^{-s}(B(x_2, \epsilon)) \neq \emptyset\}) \\ & \geq \frac{1}{(n(t, \lambda) + 1)s(\lambda)} \text{Leb}(\{s \in [0, s(\lambda)n(t, \lambda)] : B(x_1, \epsilon) \cap X^{-s}(B(x_2, \epsilon)) \neq \emptyset\}) \\ & \geq \frac{\epsilon - \lambda}{s(\lambda) \|X\|_\infty} \end{aligned}$$

Para todo  $t > s(\lambda)$ . Isso finaliza a prova de (1).

(2) Dado  $\epsilon > 0$  e  $0 < \lambda < \epsilon$  arbitrário e pontos  $x_1, x_2 \in M$  com órbitas periódicas. Assumimos que  $x_2$  não é uma singularidade. Se  $x_2$  for singularidade, seja  $s(\lambda)$  dado pela propriedade de colagem de órbitas reparametrizada. Assim para cada  $t > 0$  existe  $x_{1,t} \in B(x_1, \epsilon)$  e  $s_1(t) \leq s(\lambda)$  tal que  $X^{s+s_1}(x_{1,t}) \in B(X^s(x_2), \epsilon)$  para todo  $s \in [0, t]$ . Como  $x_2$  é uma singularidade, então temos

$$X^{-s_1-s}(B_2(X^s(x_2), \epsilon)) \cap B_1(x_1, \epsilon) \neq \emptyset \text{ para todo } s \in [0, t]$$

consequentemente,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Leb}(\{s \in [0, t] : B(x_1, \epsilon) \cap X^{-s}(B(x_2, \epsilon)) \neq \emptyset\}) = 1$$

Suponhamos que  $x_2$  não é singularidade, e fazemos  $\pi(x_2) > 0$  denotar o período de  $x_2$  e,  $0 < \lambda < \epsilon$ . Seja  $s(\lambda) := (1 + \lambda)K(\lambda)$  dado pela propriedade de colagem de órbitas reparametrizada para  $\lambda$ . Então para qualquer  $t > 0$  existe  $x_{1,t} \in B(x_1, \lambda)$  e  $0 \leq s_1 \leq s(\lambda)$  tal que  $X^{s+s_1}(x_{1,t}) \in B(x_2, \lambda)$  para todo  $s \in [0, t]$ . Assim,

$$X^{-s_1-k\pi(x_2)}(B_2(X^{k\pi(x_2)}(x_2), \epsilon)) \cap B_1(x_1, \epsilon) \neq \emptyset \text{ para todo } 0 \leq k \leq \lfloor \frac{t}{\pi(x_2)} \rfloor$$

Para todo  $\gamma > 0$  existe um  $t_\gamma \gg 1$  tal que  $\frac{t}{\pi(x_2)} - \lfloor \frac{t}{\pi(x_2)} \rfloor \leq 1 \leq \gamma t$  para todo  $t \geq t_\gamma$  (basta tomar  $t_\gamma := \lfloor \frac{1}{\gamma} \rfloor + 1$ ). Então com o argumento usado no caso (1) em cada intersecção as bolas continuam a intersectar-se durante um intervalo de tempo  $|t| \leq \frac{\epsilon - \lambda}{\|X\|_\infty}$ . Somado as medidas dos  $k$  intervalos dessa forma, e tomando  $\lambda = \frac{\epsilon}{2}$ , temos:

$$\begin{aligned} \text{Leb}(\{s \in [0, t] : B(x_1, \epsilon) \cap X^{-s}(B(x_2, \epsilon)) \neq \emptyset\}) &\geq 2 \frac{\epsilon - \lambda}{\|X\|_\infty} \lfloor \frac{t}{\pi(x_2)} \rfloor \\ &\geq \frac{\epsilon}{\|X\|_\infty} (\frac{1}{\pi(x_2)} - \gamma)t \end{aligned}$$

Uma vez que  $\gamma$  foi tomado arbitrário, provamos que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Leb}(\{s \in [0, t] : B(x_1, \epsilon) \cap X^{-s}(B(x_2, \epsilon)) \neq \emptyset\}) \geq \frac{\epsilon}{\|X\|_\infty \pi(x_2)}$$

uma vez que a expressão na direita é linear em  $\epsilon$ , então (2) está provado.

(3) Dado  $\epsilon > 0$  e  $K(\frac{\epsilon}{3})$  dado pela propriedade de colagem de órbita parametrizada periódica para  $\frac{\epsilon}{3}$ . Para cada  $T \geq 1$  tomamos  $\mathcal{E} \subset M$  um subconjunto  $(T, \epsilon)$  separado. Para cada  $x \in \mathcal{E}$  existe  $y(x) \in B(x, T, \frac{\epsilon}{3})$ ,  $p(x) \leq K(\frac{\epsilon}{3})$  e  $\tau \in \text{Rep}(\frac{\epsilon}{3})$  tal que  $X^{\tau(T+p(x))}(y(x)) = y(x)$ . Uma vez que  $\mathcal{E}$  é  $(T, \epsilon)$  separado, a aplicação  $\mathcal{E} \ni x \mapsto y(x)$  é injetiva, pois sejam  $x_1, x_2 \in \mathcal{E}$  com  $x_1 \neq x_2$ . Existe  $t_0 \leq T$  tal que

$$d(X^{t_0}(x_1), X^{t_0}(x_2)) > \epsilon$$

logo

$$\begin{aligned} d(X^{t_0}(y(x_1)), X^{t_0}(y(x_2))) &\geq d(X^{t_0}(x_1), X^{t_0}(x_2)) - d(X^{t_0}(x_1), X^{t_0}(y(x_1))) \\ &\quad - d(X^{t_0}(x_2), X^{t_0}(y(x_2))) \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

e assim temos  $y(x_1) \neq y(x_2)$  como afirmamos . Logo

$$\#P((X^t)_t, (1 + \frac{\epsilon}{2})(T + K(\frac{\epsilon}{2}))) \geq \#E$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log(s(T, \epsilon, M)) &\leq \limsup_T \frac{1}{T} \log(\#Fix(X^{T+K(\frac{\epsilon}{3})})) \\ &= \limsup_T \frac{1}{T + K(\frac{\epsilon}{3})} \log(\#Fix(X^{T+K(\frac{\epsilon}{3})})) \\ &= \limsup_T \frac{1}{T} \log(\#Fix(X^T)) \end{aligned}$$

logo,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log(\#Per((X^t)_t, T)) \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_T \log(s(T, \epsilon, M)) = h_{top}((X^t)_t).$$

(4)(i) Sejam  $\mathcal{O}(p)$ ,  $\mathcal{O}(q)$  órbitas periódicas distintas de período menor ou igual a  $T$ . Fixado  $\lambda > 0$  seja  $\delta_0 = \delta_0(\lambda)$  dado pela Komuro expansividade. Afirmamos que existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $d(X^t(p), X^t(q)) \geq \delta_0$ . De outra maneira  $d(X^t(p), X^t(q)) < \delta_0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e, pela Komuro expansividade (tomando a reparametrização  $\tau(t) = t$ ),  $p \in X^{[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]}(q)$  para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ , o que é uma contradição. Isso prova que o conjunto dos pontos periódicos  $Per((X^t)_t, T)$  é um conjunto  $(T, \epsilon)$  separado para todo  $0 < \epsilon \leq \delta_0$ . Em particular órbitas periódicas de período menor ou igual que  $T$  são isoladas, e portanto finitas. Assim  $h_{top}((X^t)_t) \geq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log(\#Per((X^t)_t, T))$ .

(4)(ii) Mostraremos que cada ponto de  $M$  é ponto de entropia para o fluxo  $((X^t)_t)$ . Uma vez que o resultado é imediato quando  $h_{top}((X^t)_t) = 0$ , podemos supor que  $h_{top}((X^t)_t) > 0$ .

Pelo item (i) a entropia pode ser calculada usando órbitas periódicas:  $h_{top}((X^t)_t) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log(\#Per((X^t)_t, T))$ . Logo para todo  $\gamma > 0$  suficientemente pequeno, podemos definir uma subsequência de números reais  $(T_k)_{k \geq 1}$  tendendo ao infinito dependendo de  $\gamma$  de tal maneira que

$$\#Per((X^t)_t, T_k) \geq e^{(h_{top} - 2\gamma)T_k} \quad (4.1)$$

Seja agora  $x \in M$  e  $U \subset M$  uma vizinhança de  $x$ . Obviamente,  $h_{top}((X^t)_t, \overline{U}) \leq h_{top}((X^t)_t)$ , logo basta apenas provar a desigualdade contrária. Fixado  $0 < \epsilon$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset U$  e tomamos a sequência  $(T_k)_k$  definida acima. Seja  $s(\epsilon) = (1 + \epsilon)K(\epsilon)$  dado pela propriedade de colagem de órbita reparametrizada periódica. Podemos assumir sem perda de generalidade que  $T_{k+1} > 2T_k$  para todo  $k \geq 1$ .

Seja  $t(\epsilon) > 0$  dado pela continuidade uniforme de tal maneira que

$$\max_{s \in [0, t(\epsilon)]} d_{c^0}(X^s, Id) < \frac{\epsilon}{4} \quad (4.2)$$

e para cada  $k \geq 1$  consideramos a decomposição (dependendo de  $k$ )

$$[0, T_k] := \bigcup_{j=0}^{N(\epsilon, k)-1} I_j \cup I_{N(\epsilon, k)} \quad (4.3)$$

onde  $N(\epsilon, k) = \lfloor \frac{T_k}{t(\epsilon)} \rfloor$ ,  $I_j := [jt(\epsilon), (j+1)t(\epsilon)[$ ,  $0 \leq j \leq N(\epsilon, k)$  e o último intervalo  $I_{N(\epsilon, k)} := [T_k - N(\epsilon, k)t(\epsilon), T_k]$  pode ser eventualmente vazio. Por construção, para todo  $\gamma$  temos  $\#P((X^t)_t, T_k) \geq e^{(h-2\gamma)T_k}$  para todo  $k \geq 1$  grande.

Fixado  $0 < \epsilon \ll \delta_0$  e  $k_0 \geq 1$  grande, dependendo de  $\epsilon$ , de tal forma que  $(1 + \epsilon)(T_k + 2K(\frac{\epsilon}{4})) < T_{k+1}$  para todo  $k \geq k_0$ . A propriedade de colagem de órbita parametrizada periódica nos assegura que para todo ponto periódico  $p$  de período  $\pi(p) \leq T_k$ , existe  $z = z(p) \in B(x, \frac{\epsilon}{4})$ , uma reparametrização  $\tau_p \in Rep(\frac{\epsilon}{4})$  e tempos de pulos  $0 < s_p, s'_p \leq K(\frac{\epsilon}{4})$  de tal forma que

$$d(X^{\tau_p(s_p+t)}(z(p)), X^t(p)) \leq \frac{\epsilon}{4}, \forall t \in [0, \pi(p)] \text{ e } X^{\tau_p(s_p+s'_p+\pi(p))} = z(p)$$

o ponto  $z(p)$  tem período  $\pi(z(p)) = \tau_p(\pi(p) + s_p + s'_p) \leq (1 + \epsilon)(T_k + 2K(\frac{\epsilon}{4})) < T_{k+1}$ . Ainda, pela propriedade da Komuro-expansividade, se  $p, q$  são pontos periódicos, existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $d(X^t(p), X^t(q)) \geq \delta_0$ . Pela decomposição (4.3), e pelo princípio da casa dos pombos existe  $0 \leq j \leq N(\epsilon, k)$  de tal forma que

$$\#\{z(p) \in B(x, \frac{\epsilon}{4}) : \pi(p) \in I_j\} \geq \frac{1}{N(\epsilon, k)+1} e^{(h-2\gamma)T_k}$$

**Afirmção:** O conjunto  $\{z(p) \in B(x, \frac{\epsilon}{4}) : \pi(p) \in I_j\}$  é  $(1 + \frac{\epsilon}{4})(T_k + 2K(\frac{\epsilon}{4}), \delta_0 - \epsilon)$  separado em  $U$ .



*Demonstração.* Sejam  $p, q \in P((X^t)_t, T_k)$  pontos periódicos e  $z(p), z(q) \in B(x, \frac{\epsilon}{4}) \subset U$  construídos como acima. Suponhamos que a  $d(X^t(z(p)), X^t(z(q))) < \delta_0 - \epsilon$  para todo  $t \in [0, T_k + s(\frac{\epsilon}{4})]$ , onde  $s(\frac{\epsilon}{4}) = (1 + \frac{\epsilon}{4})K(\frac{\epsilon}{4})$ . Por construção  $d(X^t(z(p)), X^t(p)) < \frac{\epsilon}{4}$  e  $d(X^t(z(q)), X^t(q)) < \frac{\epsilon}{4}$  para todo  $t \in [s(\frac{\epsilon}{4}), T_k + s(\frac{\epsilon}{4})]$ . Pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d(X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(p)), X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(q))) &\leq d(X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(p)), X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(z(p)))) \\ &\quad + d(X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(z(p))), X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(z(q)))) \\ &\quad + d(X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(z(q))), X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(q))) \\ &\leq d(X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(p)), X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(z(p)))) \\ &\quad + d(X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(z(p))), X^t(X^{s(\frac{\epsilon}{4})}(z(q)))) \\ &\quad + d(X^{t+s(\frac{\epsilon}{4})}(z(q)), X^{t+\delta}(p)) + d(X^{t+\delta}(q), X^t(q)) \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \delta_0 - \epsilon + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \delta_0 - \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T_k]$  e  $\delta \in [0, t(\epsilon)]$  e  $T_k + s(\frac{\epsilon}{4}) \leq T_k + (1 + \frac{\epsilon}{4})K(\frac{\epsilon}{4}) \leq (1 + \epsilon)(T_k + 2K(\frac{\epsilon}{4}))$ . Como os períodos de  $p$  e  $q$  diferem no máximo de  $t(\epsilon)$ , segue-se da escolha de  $t(\epsilon)$  que  $d(X^t(p), X^t(q)) < \delta_0 - \epsilon$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , contradizendo a propriedade de Komuro-expansividade.  $\square$

Então, como consequência

$$\begin{aligned} h_{top}((X^t)_t, \bar{U}) &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k + s(\frac{\epsilon}{4})} \log\left(\frac{1}{N(\epsilon, k) + 1} e^{(h_{top} - 2\gamma)(T_k)}\right) \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k + s(\frac{\epsilon}{4})} \log\left(\frac{1}{N(\epsilon, k) + 1}\right) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k + s(\frac{\epsilon}{4})} \log(e^{(h_{top} - 2\gamma)(T_k)}) \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k + s(\frac{\epsilon}{4})} \log\left(\frac{1}{N(\epsilon, k) + 1}\right) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k + s(\frac{\epsilon}{4})} \log(e^{(h_{top} - 2\gamma)T_k}) \\ &= (h_{top}((X^t)_t) - 2\gamma). \end{aligned}$$

resta mostrar que o primeiro limite da penúltima linha acima converge para zero:

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k + s(\frac{\epsilon}{4})} \log\left(\frac{1}{\lfloor \frac{T_k}{t(\epsilon)} \rfloor + 1}\right) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} (\log(1) - \log(\lfloor \frac{T_k}{t(\epsilon)} \rfloor + 1)) \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} -\frac{\log(\lfloor \frac{T_k}{t(\epsilon)} \rfloor + 1)}{T_k} \end{aligned}$$

Como  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(t)}{t} = 0$  (l'Hôpital), pois o logaritmo vai para o infinito muito mais lentamente que qualquer polinômio, então temos que a expressão acima converge para zero quando  $k \rightarrow \infty$ .

Pela arbitrariedade de  $\gamma$ , provamos finalmente o item (4)(ii). Com isso, o teorema está demonstrado.  $\square$

**Observação:** A conclusão do item (4)(ii) ainda será válida se substituirmos a propriedade de colagem de órbita parametrizada e komuro expansividade apenas pela hipótese de propriedade de colagem de órbita

*Demonstração.* Dado  $k$  grande, seja  $E_k = \{x_i\}_{i=1,\dots,r}$  um conjunto  $(T_k, \epsilon)$  separado maximal construído com cardinalidade maior ou igual a  $e^{(h-2\gamma)T_k}$ . A propriedade de colagem de órbita nos assegura que para cada  $i = 1, \dots, r$  existe  $z_i \in B(x, \frac{\epsilon}{4}) \subset U$  e tempos de pulos  $0 \leq s_i \leq K(\frac{\epsilon}{4})$  tal que

$$d(z_i, x) < \frac{\epsilon}{4} \text{ e } d(X^{t+s_i}(z_i), X^t(x_i)) < \frac{\epsilon}{4}$$

para qualquer  $t \in [0, T_k]$ . Como na prova anterior, dada a decomposição (4.3), o princípio da casa dos pombos nos garante que existe  $0 \leq j \leq N(\epsilon, k)$  tal que

$$\#\{1 \leq i \leq r : s_i \in I_j\} \geq \frac{1}{N(\epsilon)+1} e^{(h-2\gamma)T_k}$$

Afirmamos que o conjunto dos pontos  $(z_i)_{i \in J}$  é  $((T_k + (j+1)t(\epsilon), \frac{\epsilon}{4})$ -separado em  $U$ , onde  $J = \{1 \leq i \leq r : s_i \in I_j\}$ . De fato, sejam  $x_1, x_2 \in E_k$  e  $z_1, z_2$  construídos com acima e seja  $i \in [0, T_k]$  tal que  $d(X^i(x_1), X^i(x_2)) \geq \epsilon$ . Logo

$$\begin{aligned} d(X^{s_1+i}(z_1), X^{s_1+i}(z_2)) &\geq -d(X^{s_1+i}(z_1), X^i(x_1)) + d(X^i(x_1), X^{s_1+i}(z_2)) \\ &\geq -d(X^{s_1+i}(z_1), X^i(x_1)) - d(X^{s_1+i}(z_2), X^{i-s}(x_2)) \\ &\quad + d(X^{i-s}(x_2), X^i(x_1)) \\ &\geq -d(X^{s_1+i}(z_1), X^i(x_1)) - d(X^{s_1+i}(z_2), X^{i-\delta}(x_2)) \\ &\quad + d(X^i(x_1), X^i(x_2)) - d(X^{i-\delta}(x_2), X^i(x_2)) \\ &> -\frac{\epsilon}{4} - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon - \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

onde  $\delta \in [0, t(\epsilon)]$  e como  $s_1 \in [jt(\epsilon), (j+1)t(\epsilon)]$ , temos  $s_1 + i \leq (j+1)t(\epsilon) + T_k$ . e assim:

$$s(T_k + (j+1)t(\epsilon), \frac{\epsilon}{4}, \bar{U}) \geq \frac{1}{N(\epsilon)+1} e^{(h-2\gamma)T_k}$$

e como consequência

$$\begin{aligned} h_{top}((X^t)_t, \bar{U}) &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k + (1+j)t(\epsilon)} \log\left(\frac{1}{N(\epsilon)+1} e^{(h_{top}-2\gamma)T_k}\right) \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k + (1+j)t(\epsilon)} \log\left(\frac{1}{N(\epsilon)+1}\right) \\ &\quad + \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k + (j+1)t(\epsilon)} \log(e^{(h_{top}-2\gamma)T_k}) = h_{top}((X^t)_t) - 2\gamma. \end{aligned}$$

Com  $j+1 \leq N(\epsilon, k)+1$ , o resultado é obtido como no caso anterior. Como  $\gamma$  é arbitrário, fazendo  $\gamma \rightarrow 0$  temos o resultado. A prova que a primeira parcela da soma acima vai para zero é semelhante ao caso anterior.  $\square$

Vamos estudar agora algumas propriedades da pressão topológica em sistemas dinâmicos satisfazendo a propriedade de colagem de órbita, onde sobre certas hipóteses sobre os potenciais podemos deduzir boas propriedades, generalizando algumas propriedades do teorema anterior para pressão topológica.

**Definição 4.4.** *Seja uma função contínua  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X^t : M \rightarrow M$  um fluxo contínuo. A função  $\phi$  tem variação limitada se existe  $\epsilon > 0$  e  $k > 0$  tal que*

$$V(\phi, X^t) := \left| \int_0^T \phi(X^s(x)) ds - \int_0^T \phi(X^s(y)) ds \right| < k$$

para todo  $y \in B(x, T, \epsilon)$ .

Notemos que todo potencial constante sempre satisfaz a condição acima, logo o conjunto dos potenciais que satisfazem a condição acima não é o vazio.

Ter variação limitada é uma condição suficiente para provarmos a existência e unicidade do estado de equilíbrio quando a dinâmica tem especificação e expansividade (ver [Bw75] e [Er77]). Para mostrar a importância desta classe, verificamos que no caso de conjuntos hiperbólicos todas as funções Hölder têm variação limitada.

**Proposição 4.5.** *Seja  $\Lambda \subset M$  um conjunto hiperbólico para o fluxo  $X^t$ . Então toda função Hölder em  $\Lambda$  tem variação limitada.*

*Demonstração.* Por hiperbolicidade, a menos de tomarmos  $\epsilon$  suficientemente pequeno, existem  $C > 0$  e  $a > 0$  tais que:  $y \in B(x, t, \epsilon) \Rightarrow d(X^s(y), X^s(x)) \leq Ce^{-a \min\{s, t-s\}}$ , qualquer  $s \in [0, t]$  (Ver [KH99]). Sendo assim, seja  $\phi$  uma função  $\alpha$ -Hölder. Logo:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \phi(X^s(x)) ds - \int_0^t \phi(X^s(y)) ds \right| &\leq |\phi|_\alpha \int_0^t d(X^s(y), X^s(x))^\alpha ds \\ &= |\phi|_\alpha \int_0^{\frac{t}{2}} d(X^s(y), X^s(x))^\alpha ds \\ &\quad + |\phi|_\alpha \int_{\frac{t}{2}}^t d(X^s(y), X^s(x))^\alpha ds \\ &\leq |\phi|_\alpha C \left( \int_0^{\frac{t}{2}} e^{-as} ds + \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-a(t-s)} ds \right) \\ &= |\phi|_\alpha C \frac{2 - 2e^{-a\frac{t}{2}}}{a} \end{aligned}$$

Segue-se das estimativas que  $\phi$  possui variação limitada.  $\square$

**Proposição 4.6.** *Seja  $X^t : M \rightarrow M$  um fluxo contínuo definido num espaço métrico compacto  $M$  com a propriedade de colagem de órbita periódica e  $\phi \in C(M, \mathbb{R})$  um potencial com variação limitada. Então  $P_{top}(X^t, \phi) \leq \liminf_t \frac{1}{t} \log \left( \sum_{x \in Per(X^t, T)} e^{\int_0^t \phi(X^s ds)} \right)$ .*

Ademais, se  $X^t$  for Komuro expansivo então acontece a igualdade.

*Demonstração.* Tome  $\epsilon > 0$  e  $T(\frac{\epsilon}{3})$  dado pela propriedade de colagem de órbita periódica. Tomamos  $\mathcal{E}$  um conjunto  $(T, \epsilon)$ -separado. Para cada  $y \in \mathcal{E}$  seja  $z(y)$  e  $p(z(y)) \leq T(\frac{\epsilon}{3})$  tal que:

$$\begin{aligned} d(X^s(y), X^s(z(y))) &< \frac{\epsilon}{3}, \forall s \in [0, T] \\ X^{t+p(z(y))}(z(y)) &= z(y) \end{aligned}$$

Seja  $\tilde{\mathcal{E}}$  o conjunto dos  $z(y)$  construídos. Notemos que a aplicação

$$y \mapsto z(y)$$

é injetiva, pois sejam  $y_1, y_2 \in \mathcal{E}$  com  $y_1 \neq y_2$ . Existe  $t_0 \leq T$  tal que

$$d(X^{t_0}(y_1), X^{t_0}(y_2)) > \epsilon$$

logo

$$\begin{aligned} d(X^{t_0}(z(y_1)), X^{t_0}(z(y_2))) &\geq d(X^{t_0}(y_1), X^{t_0}(y_2)) - d(X^{t_0}(y_1), X^{t_0}(z(y_1))) \\ &\quad - d(X^{t_0}(y_2), X^{t_0}(z(y_2))) \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

e assim temos  $z(y_1) \neq z(y_2)$  como afirmamos. Afirmamos também que conjunto  $\tilde{\mathcal{E}}$  é  $(T(\frac{\epsilon}{3}) + T, \frac{\epsilon}{3})$ -separado. De fato, as mesmas contas anteriores mostram que o conjunto dos pontos periódicos  $\tilde{\mathcal{E}}$  é  $(T(\frac{\epsilon}{3}) + T, \frac{\epsilon}{3})$ -separado. Se  $\phi \in C(M, \mathbb{R})$  e tem variação limitada

$$\begin{aligned} \frac{e^{\int_0^{T+T(\frac{\epsilon}{3})} (\phi(X^s(z(x)))) ds}}{e^{\int_0^T (\phi(X^s(x))) ds}} &= \frac{e^{\int_0^T (\phi(X^s(z(x)))) ds} e^{\int_T^{T+T(\frac{\epsilon}{3})} (\phi(X^s(z(x)))) ds}}{e^{\int_0^T (\phi(X^s(x))) ds}} \\ &= e^{\int_0^T (\phi(X^s(z(x)))) ds - \int_0^T (\phi(X^s(x))) ds} e^{\int_T^{T+T(\frac{\epsilon}{3})} (\phi(X^s(z(x)))) ds} \\ &\leq e^K e^{T(\frac{\epsilon}{3}) \|\phi\|_\infty} \end{aligned}$$

e assim podemos deduzir:

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{T} \log\left(\sum_{y \in \tilde{\mathcal{E}}} e^{\int_0^{T+T(\frac{\epsilon}{3})} (\phi(X^s(y))) ds}\right) - \frac{1}{T} \log\left(\sum_{x \in \mathcal{E}} e^{\int_0^T (\phi(X^s(x))) ds}\right) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{T} \log\left(\frac{\sum_{y \in \tilde{\mathcal{E}}} e^{\int_0^{T+T(\frac{\epsilon}{3})} \phi(X^s(y)) ds}}{\sum_{x \in \mathcal{E}} e^{\int_0^T \phi(X^s(x)) ds}}\right) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{T} \log(e^{KT(\frac{\epsilon}{3})} e^{\|\phi\|_\infty}) \right\| \\ &= \frac{K}{T} + \frac{T(\frac{\epsilon}{3})}{T} + \frac{\|\phi\|_\infty}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

**Observação:** Na última desigualdade acima à direita usamos um resultado conhecido de análise que diz que para  $a_1, \dots, a_n > 0$  e  $b_1, \dots, b_n > 0$  vale a seguinte desigualdade: se  $\frac{a_i}{b_i} < K$ , então

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \leq K$$

A desigualdade acima pode ser facilmente demonstrada por indução.

Podemos então fazer a seguinte estimativa:

$$\liminf_T \frac{1}{T} \log \left( \sum_{x \in \text{Per}(X^t, T+T(\frac{\epsilon}{3}))} e^{\int_0^{T+T(\frac{\epsilon}{3})} \phi(X^s(x)) ds} \right) \geq \liminf_T \frac{1}{T} \log \left( \sum_{y \in \mathcal{E}} e^{\int_0^T (\phi(X^s(y)))} \right) = P_{\text{top}}(X, \phi).$$

Observamos agora que

$$\liminf_T \frac{1}{T} \log \left( \sum_{x \in \text{Per}(X^t, T+T(\frac{\epsilon}{3}))} e^{\int_0^{T+T(\frac{\epsilon}{3})} \phi(X^s(x)) ds} \right) = \liminf_T \frac{1}{T} \log \left( \sum_{x \in \text{Per}(X^t, T)} e^{\int_0^T \phi(X^s(x)) ds} \right)$$

Suponhamos agora que a dinâmica é Komuro expansiva. Já provamos no teorema 4.2 que o conjunto dos pontos periódicos  $\text{Per}(X^t, T)$  é um conjunto  $(T, \epsilon)$  separado para todo  $0 < \epsilon \leq \delta_0$ . Em particular órbitas periódicas de período menor ou igual que  $T$  são isoladas, e portanto formam um conjunto finito.

$$\begin{aligned} \liminf_T \frac{1}{T} \log \left( \sum_{x \in \text{Per}(X^t, T+T(\frac{\epsilon}{3}))} e^{\int_0^{T+T(\frac{\epsilon}{3})} \phi(X^s(x)) ds} \right) &= \liminf_T \frac{1}{T} \log \left( \sum_{x \in \text{Per}(X^t)} e^{\int_0^T \phi(X^s(x)) ds} \right) \\ &\leq P_{\text{top}}(X, \phi) \end{aligned}$$

juntando as duas desigualdades, a prova está concluída.  $\square$

# Referências

- [Ab59] L.M. Abramov. On the entropy of flows. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*,128(1959) 873-875.
- [An67] D. V. Anosov. Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds of Negative Curvature. *Trudy Mat. Institute Steklov.*,90(1967), 209.
- [ArSS12] A. Arbieto, L. Senos and T. Sodero. The specification property for flows from the robust and generic viewpoint. *J. Differential Equations*, 253, 1893-1909, 2012.
- [BB00] L. Barreira e B. Saussol. Multifractal analysis of hyperbolic flows. *Comm. Math. Phys.*, 214, 339-371, 2000.
- [BC85] M. Benedicks, L. Carleson On Iterates of  $1 - ax^2$  on  $[-1, 1]$ . *Ann. Math*, 122 (1985), 1-25.
- [Blo83] A.M. Blokh. Decomposition of dynamical systems on an interval. *Russ. Math. Surv.*, 38, 133-134, 1983.
- [Blo82] A.M. Blokh. On the limit behavior of one-dimensional dynamical systems.1 (in Russian), Preprint no. 1156-82, VINITI, Moscow (1982).
- [BW72] R. Bowen e P. Walters. Expansive one-parameter flows. *J. Differential Equations*, 12, 180-193, 1972.
- [BV15] T. Bomfim and P. Varandas, Gluing orbit property and large deviations principles for flows. *Preprint*, 2015.
- [BTV17] T. Bomfim, M. J. Torres and P. Varandas. Topological features of flows with the reparametrized gluing orbit property. *Journal of Differential Equations*, 262(8), 4292-4313, 2017.
- [Bow71] R. Bowen. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 153, 401-414, 1971.

- [Bow73] R. Bowen. Symbolic dynamics for Hyperbolic flows. *American Journal of Mathematics*, Vol 95, No 2,(Summer,1973), pp. 429-460 .
- [Bow75] R. Bowen. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms . *Lect. Notes in Math 470, Springer*. 1975.
- [BTV16] M. Bessa, M. J. Torres e P. Varandas. On the periodic Orbits, shadowing and strong transitivity of continuous flows. *in Preparation* 2016.
- [Bw75] R. Bowen. Some Systems with Unique Equilibrium States . *Mathematical Systems Theory*, 8(3).193-202, 1975.
- [Er77] E. Franco. Flows with Unique Equilibrium States. *Amer. J. Math.*, 99(3)486-514, 1977.
- [Fa01] Bassan Fayed. Polynomial decay of correlations for a class of smooth flows on the two-torus. *Bull. Soc. Math, France* 2001.
- [Ja81] M. Jakobson. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one dimensional-maps. *Comm. Math. Phys.*, 81(1981), 39-88.
- [Jb97] J. Buzby. Specification on the interval. *Transcription of the American Mathematical Society, Volume 349, Number 7*. July 1997, Pags 2737-2754.
- [Js97] J. Schmeling Symbolic Dynamics for  $\beta$ -shift and Self-normal Numbers. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 17 1997, 675-694.
- [KH99] -A. Katok, Boris Hasselblatt. A teoria moderna dos sistemas dinâmicos. *Cambridge University Press*, 1999.
- [OV03] Kreyler Oliveira, Marcelo Viana. Fundamentos de Teoria Ergódica. *Universidade Federal de Pernambuco, Fundação Calouste GulbenKian (Lisboa)*, 2003, 2004.
- [Ko84] M. Komuro. Expansive Properties of Lorentz Attractors. The Theory of Dynamical Systems and its Applications to non Linear Problems. *Kyoto* p.4-26, 1984.
- [Man85] R. Mañé. ,Hyperbolicity,sinks and measure in one-dimensional dynamics. *Comm. Math. Phys.* 100:495-524, 1985.
- [OT13] K. Oliveira and X. Tian. Non-uniform hyperbolicity and non-uniform specification. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**, 4371–4392, 2013.
- [Pav16] R. Pavlov On intrinsic ergodicity and weakenings of the specification property. *Adv. Math.*, **295**, 250–270, 2016.

- [PS05] C.-E. Pfister and W. Sullivan. Large deviations estimates for dynamical systems without the specification property: application to the beta-shifts. *Nonlinearity*, **18**, 237–261, 2005.
- [Ru92] D. Ruelle. Thermodynamical formalism for maps satisfying positive expansiveness and specification. *Nonlinearity*, 5, 1223–1236, 1992.
- [Ru78] D. Ruelle. Thermodynamical formalism. *Encyclopedia of Math, and its Appl.*, vol. 5, Reading, Mass: Addison- Wesley 1978.
- [Ru89] D. Ruelle. Thermodynamic formalism for expanding maps. *Commun. Math, Phys.* 125, 239-262(1989).
- [SSY09] K. Sakai, N. Sumi and K. Yamamoto. Diffeomorphisms satisfying the specification property. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138, 315-321, 2009.
- [Sig70] K. Sigmund, Generic properties of invariant measures for Axiom A-diffeomorphisms. *Invent. Math.*, 11,99–109, 1970.
- [SVY16] N. Sumi, P. Varandas and K. Yamamoto, Partial hyperbolicity and specification. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144:3,1161–1170, 2016.
- [SVY15] N. Sumi, P. Varandas and K. Yamamoto, Specification and partial hyperbolicity for flows. *Dyn. Sys.*, 30:4, 501–524, 2015.
- [Sig72] K. Sigmund, On the space of invariant measures for hyperbolic flows. *Amer. Journal of Math.*, 94, No. 1, 31–37, 1972.
- [Tho09] D. Thompson. A variational principle for topological pressure for certain non-compact sets. *J. London Math. Soc.*, 80 (3) : 585 - 602, 2009.
- [Va12] P. Varandas. Non-uniform specification and large deviations for weak Gibbs measures. *J. Statist. Phys.*, **146**, 330–358, 2012.
- [Ra09] V. Ribeiro Ramos. Formalismo Termodinâmico e Dimensão de Housdorff. *Dissertação de Mestrado*, 2009.
- [RVZ11] Jérôme Rousseau, Paulo Varandas e Yun Zhao. Entropy Formulas for Dynamical Systems with Mistakes. *Discrete and continuos dynamical systems-A* ,32:12,4391-4407 2012.
- [Sm67] S. Smale. Differentiable Dynamical Systems . *Bull. A.M.S* 73, 747-817, 1967.
- [You90] L.-S. Young. Some large deviations results for dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318: 525-543, 1990.



Universidade Federal da Bahia - UFBA  
Instituto de Matemática e Estatística / Colegiado da Pós-Graduação em  
Matemática

---

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA  
CEP: 40170-110  
<<http://www.pgmat.ufba.br>>