Hipersuperfícies mínimas, compactas, de índice um, no espaço projetivo real

Reinaldo de Oliveira Lima

Hipersuperfícies mínimas, compactas, de índice um, no espaço projetivo real

Reinaldo de Oliveira Lima

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora

Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta (orientador)

Prof. Dr. Isaac Costa Lázaro

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Sumário

Introdução

Dada uma hipersuperfície mínima, compacta (sem bordo) M, numa variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$, a fórmula da segunda variação da área determina um operador elíptico auto-adjunto L chamado operador de Jacobi de M. Se M tem um campo N de vetores normais unitários definidos globalmente, dizemos que M é *relativamente orientável*. Quando $\overline{M}$ é orientável, esta propriedade é equivalente à orientabilidade de M.

É fácil observar que algumas variedades $\overline{M}$ não admitem hipersuperfícies mínimas compactas, estáveis e relativamente orientáveis. Isto acontece, por exemplo, se a curvatura de Ricci de $\overline{M}$ é positiva.

Enunciaremos, a seguir, resultados que classificam algumas imersões isométricas. Simons [Si] provou que superfícies mínimas de índice um na esfera são totalmente geodésicas. Lopez e Ros [L-R], usando resultados de Fischer-Colbrie [FC], mostraram que existem apenas duas superfícies mínimas com índice um em $\mathbb{R}^3$: o catenóide e a superfície de Enneper. Previamente, do Carmo e Peng [dC-P] e Fischer-Colbrie e Schoen [FC-S], mostraram que a única superfície mínima, completa, estável (índice zero em $\mathbb{R}^3$), é o plano. Ritoré [Ri] fez um estudo sobre superfícies mínimas de índice um nas formas espaciais planas tridimensionais. Mais geralmente, para espaços ambientes tridimensionais, alguns resultados são conhecidos. Para maiores informações, consultar [Ri-Ro1] e as referências lá existentes.

No presente trabalho, consideramos as hipersuperfícies mínimas, compactas, relativamente orientáveis, com índice um, no espaço projetivo real P^{n+1}. Nosso resultado principal é o seguinte teorema obtido por do Carmo, Ritoré e Ros [dC-Ri-Ro].

Seja $f : M \longrightarrow P^{n+1}$ mínima, compacta e relativamente orientável. Então M tem índice um se, e somente se, M é uma esfera totalmente geodésica ou uma hipersuperfície de Clifford.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. No Capítulo 1, intitulado Preliminares, apresentaremos conceitos como imersões isométricas, segunda forma fundamental, curvatura média da imersão, curvatura de Ricci e espaço projetivo real. Alguns destes assuntos serão tratados com mais detalhes.

No Capítulo 2, definiremos e estudaremos as hipersuperfícies de Clifford, uma vez que as mesmas serão usadas no teorema central da dissertação.

No Capítulo 3, provaremos o teorema principal deste trabalho. Para isto, enunciaremos e provaremos alguns resultados intermediários envolvendo hipersuperfícies mínimas compactas.

Esta dissertação é baseada no artigo de Manfredo Perdigão do Carmo, Manuel Ritoré e Antonio Ros [dC-Ri-Ro], intitulado *Compact minimal hypersurfaces with index one in the real projective space,* e publicado no ano 2000.

Capítulo 1

Preliminares

Apresentaremos neste capítulo, alguns conceitos e resultados básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho. A apresentação será feita de forma superficial. Para um estudo mais aprofundado destes tópicos, aconselhamos a leitura de [dC], [D] e [Ch].

Usaremos o termo *diferenciável* para designar aplicações ou campos de classe C^∞. Considerando M uma variedade Riemanniana n-dimensional, o conjunto dos campos diferenciáveis em M será denotado por $\chi(M)$.

A *curvatura* R de M é a correspondência que associa a cada par $X, Y \epsilon\ \chi(M)$ a aplicação

$$R(X,Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \ \epsilon\ \chi(M),$$

onde ∇ é a *conexão Riemanniana de M*.

Algumas combinações da curvatura R aparecem com tanta freqüência na literatura matemática que merecem nomes especiais. A curvatura de Ricci é um exemplo que veremos abaixo.

Seja x um vetor unitário em T_pM e tomemos uma base ortonormal $\{z_1, z_2, ..., z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x. A expressão

$$Ric_p(x) = \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, ..., n-1,$$

é chamada *curvatura de Ricci* na direção x.

Considere M^n e $\overline{M}^{n+k}$ variedades diferenciáveis de dimensões n e $n+k$ respectivamente. Dizemos que uma aplicação diferenciável $\Phi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ é uma *imersão* se, e somente se, a diferencial

$$d\Phi_p : T_pM \longrightarrow T_{\Phi(p)}\overline{M}$$

é injetiva para todo $p \,\epsilon\, M$. O número k é chamado *codimensão* da imersão Φ. Se $k = 1$, então Φ é chamada de *hipersuperfície.*

Uma imersão $\Phi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ entre duas variedades Riemannianas é chamada uma *imersão isométrica* se, e somente se

$$\langle X, Y\rangle_p = \langle d\Phi_p X, d\Phi_p Y\rangle_{\Phi(p)}\,,$$

para todo ponto $p \,\epsilon\, M$ e vetores $X, Y \,\epsilon\, T_pM$.

O produto interno em $T_p\overline{M}$ o decompõe na soma direta ortogonal

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o espaço normal cuja dimensão é a codimensão k. Esta decomposição varia diferenciavelmente com p. Isto significa que, ao longo de M, o fibrado tangente $T\overline{M}$ decompõe-se em um fibrado tangente TM e um fibrado normal $(TM)^{\perp}$. Em outras palavras, temos a soma de Whitney

$$T\overline{M} = TM \oplus (TM)^{\perp}.$$

Assim, se $v \,\epsilon\, T\overline{M}$, podemos escrever $v = v^T + v^{\perp}$, com $v^T \,\epsilon\, TM$ e $v^{\perp} \,\epsilon\, (TM)^{\perp}$. Denominamos v^T a *componente tangente* de v e $v^{\perp}$ a sua *componente normal.*

Identifiquemos por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M e $\overline{M}$ respectivamente. Sendo X e Y campos locais de vetores em M e $\overline{X}, \overline{Y}$ as respectivas extensões locais a $\overline{M}$, então

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

A aplicação bilinear simétrica $\sigma : TM \times TM \longrightarrow (TM)^{\perp}$, dada por

$$\sigma(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y,$$

é chamada de *segunda forma fundamental* da imersão ϕ.

Dado $\eta \,\epsilon\, T_pM^{\perp}$, consideremos a aplicação bilinear simétrica

$$H_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow I\!R$$

definida por

$$H_\eta(X, Y) = \langle \sigma(X, Y), \eta\rangle\,, \tag{1.1}$$

onde $p \in M$ e $X, Y \in T_pM$.

À forma bilinear simétrica H_η definida em (1.1), está associado o operador auto-adjunto

$$A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$$

definido por

$$\langle \sigma(X,Y), \eta \rangle = \langle A_\eta X, Y \rangle,$$

chamado de *operador de Weingarten* na direção η. Pode-se mostrar que

$$A_\eta X = -(\overline{\nabla}_X N)^T \tag{1.2}$$

Se ϕ é uma hipersuperfície e N é um campo normal unitário definido ao longo de M, denotaremos A_N simplesmente por A. Sendo A um operador auto-adjunto, existe uma base ortonormal de autovetores $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ de T_pM com autovalores reais $-k_1, ..., -k_n$, chamados *curvaturas principais* de Φ, em relação à qual a matriz de A é dada por

$$[A] = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -k_n \end{pmatrix}.$$

Definimos a *curvatura média* da imersão Φ em p como

$$H(p) = -\frac{1}{n} tr(A) = \frac{k_1 + \cdots + k_n}{n}.$$

Dizemos que a hipersuperfície Φ é *mínima* se, e somente se, $H(p) = 0$ para todo $p \in M$.

Lembremos que para duas funções diferenciáveis $f, g : M \longrightarrow I\!R \in C^\infty$,

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle, \tag{1.3}$$

onde ∇ é o *gradiente* da função.

Para uma função diferenciável $\phi = (\phi_1, ..., \phi_m) : M \longrightarrow I\!R^m$, o *Laplaciano* de M é a função vetorial $\Delta\phi = (\Delta\phi_1, ...\phi_m)$.

Estudaremos agora, alguns tópicos relacionados a problemas variacionais. É possível mostrar que a fórmula da segunda variação da hipersuperfície é dada por

$$Q(u,u) = -\int_M [u\Delta u + (\overline{Ric}(N) + |\sigma|^2)u^2] dV, \tag{1.4}$$

onde $\overline{Ric}(N)$ é a curvatura de Ricci de $\overline{M}$ na direção de N e $|\sigma|$ é a norma da segunda forma fundamental da imersão.

O operador linear $L : C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$ definido por

$$Lu = \Delta u + (\overline{Ric}(N) + |\sigma|^2)u \tag{1.5}$$

é chamado *operador de Jacobi* de M. Este operador é, auto-adjunto e está associado à forma bilinear simétrica definida em $C^{\infty}(M)$ por

$$Q(u, v) = -\int_M vLudV.$$

O *índice* de uma variedade M é definido como o número de autovalores negativos do operador de Jacobi, contando multiplicidade. Se M tem índice zero, então a variedade é dita *estável*.

Dizemos que um número real λ é um *autovalor* de um operador diferencial T em M se existe uma função não-nula $\mu \in C^{\infty}(M)$, tal que $T\mu + \lambda\mu = 0$. A função μ é então chamada uma *autofunção* de T.

Enunciaremos, a seguir, o Teorema da Divergência e as fórmulas de Green para uma variedade diferenciável M.

Aqui, como em todo o trabalho, variedade compacta será sempre considerada como compacta sem bordo.

Teorema 1 (Teorema da Divergência.). *Se X é um campo de vetores diferenciáveis sobre M compacta, então*

$$\int_M (divX)dV = 0.$$

Em particular, se $f : M \longrightarrow I\!R$ então

$$\int_M \Delta f = \int_M div(gradf)dV = 0, \tag{1.6}$$

Fórmulas de Green. Sejam h e f funções diferenciáveis numa variedade compacta M. Então

$$\int_M \{h\Delta f + \langle gradh, gradf\rangle\}dV = 0,$$

e além disso,

$$\int_M (h\Delta f - f\Delta h)dV = 0. \tag{1.7}$$

Consideremos agora uma função $\mu : M \longrightarrow I\!R$. A partir de (1.6) e por (1.3), verificamos que

$$0 = \int_M \Delta\mu^2 dV = \int_M 2\mu\Delta\mu + 2\langle\nabla\mu, \nabla\mu\rangle dV,$$

e assim,

$$\int_M |\nabla\mu|^2 dV = -\int_M \mu\Delta\mu dV. \tag{1.8}$$

Logo por (1.4) e por (1.8), podemos concluir que a forma quadrática associada ao operador de Jacobi de M, pode, também ser expressa por

$$Q(\mu,\mu) = -\int_M \mu L\mu dV = \int_M \left\{|\nabla\mu|^2 - (|\sigma|^2 + \overline{Ric}(N))\mu^2\right\} dV,$$

para qualquer função diferenciável μ em M.

O *espaço projetivo real* é uma variedade importante neste trabalho, uma vez que no teorema central, classificaremos, sob certas condições, variedades imersas neste espaço. Representaremos o espaço projetivo real por P^n e o definiremos como o conjunto das retas de $I\!R^{n+1}$ que passam pela origem $0 = (0, ..., 0) \in I\!R^{n+1}$, isto é, P^n é o conjunto das "direções"de $I\!R^{n+1}$. Este conjunto pode ser pensado também como o espaço quociente da esfera unitária

$$S^n = \{p \in I\!R^{n+1}; |p| = 1\}$$

pela relação de equivalência que identifica $p \in S^n$ com o seu antípoda $-p$. Com efeito, cada reta que passa pela origem, determina na esfera dois pontos antípodas e identificar pontos de uma reta corresponde a identificar os pontos antípodas obtidos pela interseção da reta com a esfera.

Definimos a métrica em P^{n+1} de modo que a projeção $\pi : S^{n+1} \longrightarrow P^{n+1}$ seja uma isometria local. Assim, uma subvariedade M^n de S^{n+1} será, também, localmente isométrica à sua projeção $\pi(M^n) \subset P^{n+1}$.

Capítulo 2

Hipersuperfícies de Clifford

Neste capítulo definiremos hipersuperfícies de Clifford, encontraremos uma condição para que esta hipersuperfície seja mínima, obteremos o seu operador de Jacobi e calcularemos os autovalores do Laplaciano da mesma. Concluiremos, a partir daí, que as hipersuperfícies de Clifford possuem índice um.

Consideremos dois inteiros positivos n_1 e n_2 com $n_1+n_2=n$ e dois números reais positivos R_1 *e* R_2 tais que

$$R_1^2+R_2^2=1. \tag{2.1}$$

O produto

$$S^{n_1}(R_1)\times S^{n_2}(R_2)\subset S^{n+1}$$

das esferas

$$S^{n_i}(R_i)=\{p_i \epsilon I\!R^{n_i+1}:|p_i|=R_i\}\ ,\quad i=1,2$$

é uma hipersuperfície homogênea e compacta da esfera S^{n+1} chamada uma *hipersuperfície de Clifford.*

Mostraremos agora que ao considerarmos um ponto $p=(p_1,p_2)$ em

$$M=S^{n_1}(R_1)\times S^{n_2}(R_2),$$

então um vetor unitário normal a M neste ponto, é dado por

$$N=\left(-\frac{R_2}{R_1}p_1,\frac{R_1}{R_2}p_2\right).$$

De fato, N é unitário, pois considerando $p_1=(x_1,...,x_{n_1+1})$ e $p_2=(y_1,...,y_{n_2+1})$, temos que

$$N=\left(-\frac{R_2}{R_1}x_1,...,-\frac{R_2}{R_1}x_{n_1+1}\ ,\ \frac{R_1}{R_2}y_1,...,\frac{R_1}{R_2}y_{n_2+1}\right),$$

e então

$$\begin{aligned}
|N| &= \sqrt{\left(-\frac{R_2}{R_1}p_1\right)^2 + \left(\frac{R_1}{R_2}p_2\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \underbrace{(x_1^2 + ... + x_{n_1+1}^2)}_{{R_1}^2} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \underbrace{(y_1^2 + ... + y_{n_1+1}^2)}_{{R_2}^2}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Para mostrarmos que N é normal a M, é necessário provarmos, primeiro, que $N \,\epsilon\, (T_pM)^{\perp} \subset T_pS^{n+1}$ e depois provarmos que o produto interno entre N e um vetor tangente qualquer de T_pM é igual a zero.

Calculemos inicialmente o produto interno entre p e N.

$$\langle p, N\rangle = \left\langle (p_1, p_2), \left(-\frac{R_2}{R_1}p_1, \frac{R_1}{R_2}p_2\right)\right\rangle = -\frac{R_2}{R_1}p_1^2 + \frac{R_1}{R_2}p_2^2 = -\frac{R_2}{R_1}R_1^2 + \frac{R_1}{R_2}R_2^2 = 0$$

Portanto $N \,\epsilon\, (T_pM)^{\perp}$. Agora, dado $v = (v_1, v_2) \,\epsilon\, T_pM$, seja

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$$

definida por

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

uma parametrização de uma curva em M, com $\alpha(0) = p = (p_1, p_2)$ e $\alpha'(0) = v$, sendo que $\alpha_1(t) \,\epsilon\, S_1^n(R_1)$, $\alpha_2(t) \,\epsilon\, S_2^n(R_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Observamos diretamente que

$$\langle \alpha_1(t), \alpha_1(t)\rangle = R_1^2$$

e

$$\langle \alpha_2(t), \alpha_2(t)\rangle = R_2^2,$$

derivando o primeiro destes produtos internos, temos

$$\langle \alpha_1(t), \alpha_1'(t)\rangle = 0$$

para todo $t \,\epsilon\, (-\varepsilon, \varepsilon)$. Em particular, para t=0, segue que

$$\langle \alpha_1(0), \alpha_1'(0)\rangle = 0,$$

ou seja $\langle p_1, v_1\rangle = 0$. De modo análogo mostra-se que $\langle p_2, v_2\rangle = 0$. Conseqüentemente

$$\langle N, v\rangle = \left\langle \left(-\frac{R_2}{R_1}p_1, \frac{R_1}{R_2}p_2\right), (v_1, v_2)\right\rangle = -\frac{R_2}{R_1}\langle p_1, v_1\rangle + \frac{R_1}{R_2}\langle p_2, v_2\rangle = 0,$$

para todo $v \,\epsilon\, T_pM$. Portanto N é normal a M como queríamos mostrar. Obteremos, a seguir, as curvaturas principais da hipersuperfície de Clifford.

Observando que

$$N(\alpha(t)) = \left(-\frac{R_2}{R_1}\alpha_1(t), \frac{R_1}{R_2}\alpha_2(t)\right),$$

temos

$$Av = -\frac{\partial N(\alpha(t))}{\partial t} = \left(\frac{R_2}{R_1}\alpha_1'(t), -\frac{R_1}{R_2}\alpha_2'(t)\right).$$

Para $v = (\alpha_1'(0), 0)$, temos $Av = \frac{R_2}{R_1}(\alpha_1'(0), 0) = \frac{R_2}{R_1}v$, portanto $\frac{R_2}{R_1}$ é uma curvatura principal. De modo análogo, para $v = (0, \alpha_2'(0))$, vemos que $\frac{-R_1}{R_2}$ também é uma curvatura principal. Assim, o operador A pode ser representado matricialmente como

$$[A] = \begin{pmatrix} \frac{R_2}{R_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{R_1} & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \frac{-R_1}{R_2} & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & \frac{-R_1}{R_2} \end{pmatrix}$$

Observando a matriz, vemos que $tr[A] = n_1\frac{R_2}{R_1} - n_2\frac{R_1}{R_2}$. Logo, M é mínima se, e somente se,

$$n_1R_2^2 = n_2R_1^2. \tag{2.2}$$

A partir de agora, suporemos sempre que M é mínima.

Sabemos que o quadrado da norma da segunda forma fundamental σ é igual ao quadrado da norma da matriz $[A]$. Usando este fato e a igualdade (2.2), temos

$$|\sigma|^2 = n_1\frac{R_2^2}{R_1^2} + n_2\frac{R_1^2}{R_2^2} = n_2\frac{R_1^2}{R_1^2} + n_1\frac{R_2^2}{R_2^2} = n_2 + n_1 = n.$$

Como a curvatura de Ricci de S^{n+1} e $|\sigma|^2$ são iguais a n, segue por (1.5) que o operador de Jacobi da hipersuperfície de Clifford é simplesmente

$$L = \Delta + 2n. \tag{2.3}$$

Decorre de ([B-G-M], pp. 159-160), que as autofunções do Laplaciano em $S^n(R)$ são restrições a $S^n(R)$ de polinômios homogêneos de grau k, para cada autovalor

$$\lambda_k = \frac{k(n+k-1)}{R^2}.$$

Seja $f : S^{n_1}(R_1) \times S^{n_2}(R_2) \longrightarrow I\!\!R$ definida por

$$f(p_1, p_2) = f_1(p_1).f_2(p_2),$$

onde, para cada $i \,\epsilon\, \{1, 2\}$, f_i é uma autofunção do Laplaciano Δ_i em S^{n_i} associado ao autovalor λ_{k_i}. Então,

$$\Delta f = f_1\Delta f_2 + f_2\Delta f_1 + \langle\nabla f_1, \nabla f_2\rangle = f_1\Delta f_2 + f_2\Delta_1 f_1,$$

onde usamos o fato que f_i só depende de p_i e que ∇f_i pertence a $T_{p_i}S^{n_i}(R_i)$, portanto, o produto interno na equação acima é nulo. Logo

$$\Delta f = -(\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2})f_1 f_2,$$

ou seja, f é uma autofunção do Laplaciano na hipersuperfície de Clifford

$$M = S^{n_1}(R_1) \times S^{n_2}(R_2)$$

associada ao autovalor

$$\frac{k_1(k_1+n_1-1)}{R_1^2} + \frac{k_2(k_2+n_2-1)}{R_2^2}. \tag{2.4}$$

Sabemos que M é o produto de duas esferas e que cada uma delas é invariante pela aplicação antípoda. Logo M é invariante pela aplicação antípoda e isto induz uma hipersuperfície mínima $\pi(M)$ em P^{n+1}, que também será chamada hipersuperfície de Clifford.

O operador de Jacobi depende da curvatura de Ricci e da norma da segunda forma fundamental e estas dependem da métrica. A métrica em M e em $\pi(M)$ é a mesma pois a projeção $\pi : S^{n+1} \longrightarrow P^{n+1}$ é uma isometria local e, portanto, o operador de Jacobi em $\pi(M)$ é também dado por (2.3).

As autofunções do Laplaciano em

$$\pi(M) = \pi(S^{n_1}(R_1) \times S^{n_2}(R_2)) \subset P^{n+1}$$

são as autofunções f do Laplaciano em

$$S^{n_1}(R_1) \times S^{n_2}(R_2)$$

que comutam com a projeção π (ver [B-G-M], p. 145), ou seja, que satisfazem

$$f(-p_1, -p_2) = f(p_1, p_2). \tag{2.5}$$

Cada f_i é a restrição a $S^{n_i}(R_i)$ de um polinômio f_i, definido em $I\!R^{n_i+1}$ homogêneo de grau k_i, logo, f é a restrição a

$$S^{n_1}(R_1) \times S^{n_2}(R_2)$$

do polinômio $\widetilde{f} = \widetilde{f}_1.\widetilde{f}_2$, definido em $I\!R^n$, que satisfaz

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(cp) &= \widetilde{f}(cp_1, cp_2) \\
&= \widetilde{f}_1(cp_1).\widetilde{f}_2(cp_2) \\
&= c^{k_1}\widetilde{f}_1(p_1).c^{k_2}\widetilde{f}_2(p_2) \\
&= c^{k_1+k_2}\widetilde{f}(p_1, p_2),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

ou seja, $\widetilde{f}$ é um polinômio homogêneo de grau $k_1 + k_2$ e assim, para que ocorra (2.5), é necessário e suficiente que $k_1 + k_2$ seja par.

Com essas condições, consideremos $k_1 + k_2 \geq 2$ (para $k_1 + k_2 = 0$, o autovalor é, evidentemente, nulo.) Ao multiplicarmos (2.4) por (2.1) e usarmos (2.2), obteremos

$$\left[\frac{k_1(k_1 + n_1 - 1)}{R_1^2} + \frac{k_2(k_2 + n_2 - 1)}{R_2^2}\right](R_1^2 + R_2^2) = \frac{k_1(k_1 + n_1 - 1)}{R_1^2}(R_1^2 + R_2^2)$$

$$+\frac{k_2(k_2 + n_2 - 1)}{R_2^2}(R_1^2 + R_2^2) = \frac{k_1^2 - k_1}{R_1^2} + k_1 n + \frac{k_2^2 - k_2}{R_2^2} + k_2 n \geq k_1 n + k_2 n$$

$$= (k_1 + k_2)n \geq 2n. \tag{2.7}$$

Em particular, o primeiro autovalor não nulo do Laplaciano em $\pi(M)$ corresponde a $k_1 = k_2 = 1$ que, por (2.4), é igual a $2n$.

Por (2.3), para cada autovalor γ do Laplaciano em $\pi(M)$, temos o autovalor

$$\lambda = \gamma - 2n \tag{2.8}$$

do operador de Jacobi L em $\pi(M)$. Portanto, temos por (2.7) e (2.8) que $\lambda = -2n$ é o único autovalor negativo do operador de Jacobi L em $\pi(M)$ e, portanto, para toda hipersuperfície de Clifford mínima M em S^{n+1}, a hipersuperfície quociente $\pi(M)$ em P^{n+1} possui índice um.

Capítulo 3

Resultado principal

Neste capítulo, provaremos o resultado principal desta dissertação que é o Teorema 2. Para isso, necessitaremos provar alguns resultados intermediários que serão utilizados na demonstração do mesmo.

Lema 1. *Seja $f : M \longrightarrow S^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima compacta e orientável da esfera e seja N um campo de vetores unitários normais definidos em M. Então f e N verificam*

$$\Delta f + nf = 0 \qquad e \qquad \Delta N + |\sigma|^2 N = 0 \tag{3.1}$$

Prova. Considere $f_v : M \longrightarrow I\!R$ definida por $f_v = \langle f, v\rangle$ e $N_v : M \longrightarrow I\!R$ definida por $N_v = \langle N, v\rangle$, onde $v \in I\!R^{n+2}$ é um vetor fixo. Por [B-dC-E], temos

$$\Delta f_v + nHN_v + cnf_v = 0 \qquad e \qquad \Delta N_v + |\sigma|^2 N_v + cnHf_v = 0,$$

onde c é a curvatura do espaço ambiente (no nosso caso, esta curvatura é igual a um) e H é a curvatura média da imersão (no nosso caso, $H = 0$, pois M é imersão mínima), logo

$$\Delta f_v + nf_v = 0 \qquad e \qquad \Delta N_v + |\sigma|^2 N_v = 0, \tag{3.2}$$

portanto, para cada função coordenada $f_i = \langle f, e_i\rangle$ de $f = (f_1, ..., f_{n+2})$ e cada função coordenada $N_i = \langle N, e_i\rangle$ de $N = (N_1, ..., N_{n+2})$, temos por (3.2) que

$$\Delta f_i = -nf_i \;\; e \;\; \Delta N_i = -|\sigma|^2 N_i$$

e assim obteremos (3.1), como queríamos.

□

Dados $a, b \in I\!R^{n+2}$, considere a função vetorial

$$\phi_{a,b} : M \longrightarrow I\!R^{n+2}$$

definida por

$$\phi_{a,b} = \langle f, a\rangle f + \langle N, a\rangle N + \langle f, b\rangle N. \tag{3.3}$$

Mostraremos algumas propriedades dessas funções, que serão usadas como funções-teste, na demonstração do Teorema 2, para vetores a e b escolhidos convenientemente.

Lema 2. *O operador de Jacobi quando aplicado à função $\phi_{a,b}$ é dado por*

$$-L\phi_{a,b} = (n - |\sigma|^2)(\langle f, a\rangle f - \langle N, a\rangle N) + X,$$

onde $X : M \longrightarrow I\!R^{n+2}$ é um campo de vetores tangentes a M.

Prova. Mostraremos o resultado, combinando (1.3) com as equações (3.1) e usando o fato de que, no nosso caso, todos os termos que correspondem ao produto interno de gradientes são tangentes a M. Por (1.5), temos que

$$L\phi_{a,b} = \Delta\phi_{a,b} + (|\sigma|^2 + n)\phi_{a,b}.$$

Calcularemos, inicialmente, a parcela correspondente a $\Delta\phi_{a,b}$, utilizando (1.3) e o Lema 1.

Na expressão a seguir, X_1, X_2 *e* X_3 representam parcelas envolvendo gradientes e $X = X_1 + X_2 + X_3$

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{a,b} &= \Delta(\langle f, a\rangle f) + \Delta(\langle N, a\rangle N) + \Delta(\langle f, b\rangle N)\\
&= f\Delta\langle f, a\rangle + \langle f, a\rangle \Delta f + X_1 + N\Delta\langle N, a\rangle + \langle N, a\rangle \Delta N\\
&\quad +X_2 + N\Delta\langle f, b\rangle + \langle f, b\rangle \Delta N + X_3\\
&= -nf\langle f, a\rangle - nf\langle f, a\rangle + X_1 - N|\sigma|^2\langle N, a\rangle - \langle N, a\rangle |\sigma|^2 N\\
&\quad +X_2 - nN\langle f, b\rangle - \langle f, b\rangle |\sigma|^2 N + X_3\\
&= -2nf\langle f, a\rangle - 2N|\sigma|^2\langle N, a\rangle - \langle f, b\rangle N(n + |\sigma|^2) + X\\
&= -2nf\langle f, a\rangle - 2N|\sigma|^2\langle N, a\rangle + (\langle f, a\rangle f + \langle N, a\rangle N - \phi_{a,b})(n + |\sigma|^2) + X.
\end{aligned}$$

A partir daí, concluímos que

$$\begin{aligned}
-L\phi_{a,b} &= -\Delta\phi_{a,b} - (|\sigma|^2 + n)\phi_{a,b}\\
&= +2nf\langle f, a\rangle + 2N|\sigma|^2\langle N, a\rangle - (n + |\sigma|^2)(\phi_{a,b} - \langle f, a\rangle f - \langle N, a\rangle N + \phi_{a,b}) + X\\
&= +2nf\langle f, a\rangle + 2N|\sigma|^2\langle N, a\rangle - n\langle f, a\rangle f - nN\langle N, a\rangle - |\sigma|^2\langle f, a\rangle f\\
&\quad -|\sigma|^2 N\langle N, a\rangle + X\\
&= +nf\langle f, a\rangle + N|\sigma|^2\langle N, a\rangle - nN\langle N, a\rangle - |\sigma|^2\langle f, a\rangle f + X
\end{aligned}$$

$= (n-|\sigma|^2)(\langle f,a\rangle\, f-\langle N,a\rangle\, N)+X.$

Lema 3. *Dados $a, b \in I\!R^{n+2}$, temos*

$$\int_M (|\sigma|^2 - n)\,\langle N,a\rangle\,\langle f,b\rangle\, dV = 0.$$

Prova. Para mostrar o resultado pretendido, utilizaremos o Lema 1 e a fórmula (1.7), obtendo

$$\begin{aligned}\int_M (|\sigma|^2 - n)\,\langle N,a\rangle\,\langle f,b\rangle\, dV &= \int_M [|\sigma|^2\,\langle N,a\rangle\,\langle f,b\rangle - n\,\langle f,b\rangle\,\langle N,a\rangle]dV \\ &= \int_M [-\,\langle f,b\rangle\,\Delta\,\langle N,a\rangle + \langle N,a\rangle\,\Delta\,\langle f,b\rangle]dV = 0.\end{aligned}$$

□

Veremos agora o resultado principal deste trabalho, que classifica as hipersuperfícies mínimas, compactas, relativamente orientáveis, de índice um no espaço projetivo real.

Teorema 2. *Seja $f : M \longrightarrow P^{n+1}$ mínima, compacta e relativamente orientável. Então M tem índice um se, e somente se, M é uma esfera totalmente geodésica ou uma hipersuperfície de Clifford.*

Prova. Seja $\widetilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow P^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima, compacta, relativamente orientável, de índice um. Mostraremos, em primeiro lugar, que $\widetilde{M}$ é conexa. De fato, suponha, por contradição, que $\widetilde{M}$ não seja conexa.

Considere então uma cisão não trivial $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \cup \widetilde{M}_2$ e as funções

$$\Phi_1, \Phi_2 : \widetilde{M} \longrightarrow I\!R$$

definidas por

$$\Phi_1(p) = \begin{cases} 1 \quad , \quad se \quad p \;\in\; M_1 \\ 0 \quad , \quad se \quad p \;\in\; M_2 \end{cases}$$

e

$$\Phi_2(p) = 1, \text{ para todo } p \in M.$$

Como Φ_1 é localmente constante, então $\Delta\Phi_1$ é igual a zero. A expressão $(|\sigma|^2+n)$ é, evidentemente, positiva e, portanto, $L\Phi_1$ é positiva em M_1 e nula em M_2. Logo

$$\begin{aligned}Q(\Phi_1,\Phi_1) &= -\int_{\widetilde{M}} \Phi_1 L\Phi_1 dV = -\int_{\widetilde{M}} \Phi_1^2(|\sigma|^2+n)\; dV \\ &= -\int_{\widetilde{M}_1} \underbrace{(|\sigma|^2+n)}_{>0}\; dV \;<0.\end{aligned}$$

Usando procedimento análogo, podemos concluir que $Q(\Phi_2, \Phi_2) < 0$. Como Φ_1 e Φ_2 são linearmente independentes, isto contraria a hipótese de $\widetilde{f}$ ter índice um. Podemos então concluir que $\widetilde{M}$ é conexa.

Suponha agora que $\widetilde{f}$ possui um levantamento f na esfera S^{n+1}, conforme a figura 3.1, onde π é a projeção usual.

$$\begin{tikzcd} & S^{n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{M} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & P^{n+1} \end{tikzcd}$$

Figura 3.1:

Concluímos assim, que $\widetilde{M}$ é uma hipersuperfície com índice um da esfera. Segue de [Si] que, neste caso, $\widetilde{M}$ é uma esfera totalmente geodésica.

Podemos então assumir que não existe o levantamento acima.

Afirmamos que, neste caso, existe um recobrimento duplo conexo M de $\widetilde{M}$ e uma imersão isométrica mínima $f : M \longrightarrow S^{n+1}$ localmente congruente a $\widetilde{f}$ e tal que, se denotarmos por $s : M \longrightarrow M$ a involução isométrica induzida pelo recobrimento, então $fos = -f$.

Com efeito, sejam

$$M = \{(\widetilde{p}, p)/\widetilde{p} \,\epsilon\, \widetilde{M}, p \,\epsilon\, S^{n+1}, \pi(p) = \widetilde{f}(\widetilde{p})\},$$

$f : M \longrightarrow S^{n+1}$ definida por $f(\widetilde{p}, p) = p$ e $h : M \longrightarrow \widetilde{M}$ definida por $h(\widetilde{p}, p) = \widetilde{p}$. A involução induzida por h é a aplicação $s : M \longrightarrow M$ definida por $s(\widetilde{p}, p) = (\widetilde{p}, -p)$ e satisfazendo $S^2 = -I$ e $hos = h$. Para cada $(\widetilde{p}, p) \,\epsilon\, M$,

$$\pi(f(\widetilde{p}, p)) = \pi(p) = \widetilde{f}(\widetilde{p}) = \widetilde{f}(h(\widetilde{p}, p)), \quad \forall(\widetilde{p}, p)$$

o que mostra que $\pi o f = \widetilde{f} o h$, ou seja, o diagrama da figura 3.2 é comutativo.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & S^{n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & P^{n+1} \end{tikzcd}$$

Figura 3.2:

Para qualquer $(\widetilde{p}, p)$, temos

$$f(s(\widetilde{p}, p)) = f(\widetilde{p}, -p) = -p = -f(\widetilde{p}, p),$$

ou seja,

$$fos = -f \tag{3.4}$$

Para concluir a prova da Afirmação, falta mostrar que M é conexa. A prova aqui apresentada é essencialmente a mesma da Proposição 5 de [Li], p. 197. Suponhamos por contradição, que M é desconexa e seja C uma componente conexa de M. Sendo uma aplicação de recobrimento duplo, h é uma aplicação aberta e fechada (ver [Li], p. 121), logo, $h(C)$ é um subconjunto aberto e fechado de $\widetilde{M}$. Como $\widetilde{M}$ é conexa, então $h(C) = M$. Desse modo, h aplica cada componente conexa de $\widetilde{M}$ sobrejetivamente em M. Como a imagem inversa de cada ponto de $\widetilde{M}$ possui apenas dois pontos de M, então $\widetilde{M}$ possui exatamente duas componentes conexas. Assim, M também possui apenas duas componentes conexas e h é injetiva em cada uma delas. Logo, a restrição de h a cada componente conexa de M é um difeomorfismo. Considerando o difeomorfismo inverso de h restrito a uma das componentes (M_1 por exemplo), temos que $fo(h\mid_{M_1})^{-1}$ é um levantamento de $\widetilde{f}$. Esta contradição prova a afirmação.

O fato de $\widetilde{M}$ ser relativamente orientável nos garante a orientabilidade de M e que o campo de vetores normais $N : M \longrightarrow S^{n+1}$ também verifica

$$Nos = -N. \tag{3.5}$$

A partir de (3.4) e (3.5), é imediato verificar que

$$\Phi_{a,b}os = \Phi_{a,b}.$$

O operador de Jacobi depende do Laplaciano, da curvatura de Ricci da variedade ambiente e da segunda forma fundamental da imersão. Para f e $\widetilde{f}$, a curvatura de Ricci, a segunda forma fundamental e a expressão do Laplaciano coincidem, uma vez que π é uma isometria local e além disso, f e $\widetilde{f}$ são localmente congruentes.

Naturalmente, toda função $\widetilde{\mu} : \widetilde{M} \longrightarrow I\!R$ determina uma função

$$\mu = \widetilde{\mu} o h : M \longrightarrow I\!R.$$

No entanto, dada uma função $\mu : M \longrightarrow I\!R$, uma condição necessária e suficiente para que exista uma função $\widetilde{\mu} : \widetilde{M} \longrightarrow I\!R$ tal que $\mu = \widetilde{\mu} o h$ (ver figura 3.3) é que $\mu o s = \mu$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ \widetilde{M} \arrow[r, "\widetilde{\mu}"'] & I\!R \end{tikzcd}$$

Figura 3.3:

Conseqüentemente, cada autofunção de L agindo em $C^\infty(\widetilde{M})$ dá origem a uma autofunção de L atuando em $C^\infty(\widetilde{M})$, mas a recíproca não ocorre. Concluímos assim, que o índice de M é maior ou igual a um. Considerando

$$V = \left\{ \mu \;\epsilon\; C^\infty(M); \mu o s = \mu \;\text{ e }\; \int_M \mu \phi dV = 0 \right\}$$

então o operador L agindo em V, tem índice um.

Seja $\phi : M \longrightarrow I\!R$ tal que $Q(\phi, \phi) < 0$. O fato que L tem índice um em $\widetilde{M}$ é equivalente a dizer que, restrito a V, L tem índice zero, ou seja, $Q(\mu, \mu) \geq 0$ para toda função não nula $\mu \;\epsilon\; V$.

Afirmamos que uma função μ como acima, satisfazendo $Q(\mu, \mu) = 0$ é uma *função de Jacobi*, isto é, satisfaz $L\mu = 0$. Com efeito, dada $v \;\epsilon\; V$, considerando a função $\mu + tv$, com $t \;\epsilon\; I\!R$, temos $Q(\mu + tv, \mu + tv) \geq 0$ e sendo Q uma forma bilinear simétrica, concluímos que

$$Q(\mu, \mu) + 2Q(\mu, v)t + Q(v, v)t^2 \geq 0.$$

Logo $Q(\mu,\mu)=0$ implica que $2Q(\mu,v)t\geq 0$ para todo μ,v e portanto $Q(\mu,v)=0$. Logo $Q(\mu,v)=0$ para toda $v\,\epsilon\,V$, o que implica em $L\mu=0$ e prova afirmação.

Em nossos próximos argumentos usaremos as funções teste $\Phi_{a,b}$ que, para uma escolha conveniente dos parâmetros $a,b\,\epsilon\,I\!R^{n+2}$, serão ortogonais a φ. Por (3.4) e por (3.5), é imediato observarmos que

$$\phi_{a,b}os=\phi_{a,b}. \tag{3.6}$$

Usando (1.5) e o Lema 2, temos

$$Q(\phi_{a,b},\phi_{a,b})=-\int_M \langle\phi_{a,b},L\phi_{a,b}\rangle\,dV$$

$$=\int_M \Big\langle \langle f,a\rangle f+\langle N,a\rangle N+\langle f,b\rangle N)[(n-|\sigma|^2)(\langle f,a\rangle f-\langle N,a\rangle N)+X\Big\rangle\,dV$$

$$\begin{aligned}
&=\int_M [\langle f,a\rangle^2\underbrace{\langle f,f\rangle}_{=1}(n-|\sigma|^2)-\langle N,a\rangle^2\underbrace{\langle N,N\rangle}_{=1}(n-|\sigma|^2)\\
&\quad+(n-|\sigma|^2)\langle f,b\rangle\langle N,a\rangle\langle N,N\rangle]dV\\
&=\int_M (n-|\sigma|^2)(\langle f,a\rangle^2-\langle N,a\rangle^2)dV\\
&\quad-\int_M (|\sigma|^2-n)\langle N,a\rangle\langle f,b\rangle\,dV.
\end{aligned}$$

$$=\int_M (n-|\sigma|^2)(\langle f,a\rangle^2-\langle N,a\rangle^2)dV. \tag{3.7}$$

Observe que a expressão encontrada para $Q(\phi_{a,b},\phi_{a,b})$ não depende de b.

Considere agora a aplicação linear $F: I\!R^{n+2}\longrightarrow I\!R^{n+2}$ definida para todo $b\epsilon I\!R^{n+2}$, por

$$F(b)=\int_M \varphi\langle f,b\rangle N dV.$$

Afirmação: F é um isomorfismo linear.

Para provar essa afirmação, assuma por contradição que existe $b\neq 0$ tal que

$$F(b)=0.$$

Fazendo $\phi = \phi_{0,b}$, temos que $\phi = \langle f, b \rangle N$. Logo $F(b) = 0$ significa que φ e ϕ são ortogonais. Por (3.7) concluímos que $Q(\phi, \phi) = 0$, portanto $L\phi = 0$. Por outro lado, usando o Lema 2, vemos que

$$L\phi = X, \tag{3.8}$$

onde X é um campo de vetores tangentes ao longo de M. Lembrando que X corresponde à soma das parcelas que contêm produtos internos de gradientes, concluímos que

$$X = 2\left[\left\langle \nabla_{\langle f,a \rangle}, \nabla_f \right\rangle + \left\langle \nabla_{\langle N,a \rangle}, \nabla_N \right\rangle + \left\langle \nabla_{\langle f,b \rangle}, \nabla_N \right\rangle\right]$$

e como, no nosso caso, $a = 0$, temos que $X = 2\left\langle \nabla_{\langle f,b \rangle}, \nabla_N \right\rangle$. Decorre daí, que $X = -Ab^t$, onde A é o endomorfismo de Weingarten associado à segunda forma fundamental de M e b^t é a parte tangente de b ao longo de M. Por (3.8), temos que $Ab^t = 0$ sobre M.

Mostraremos agora que $Ab^t = 0$ implica em $\langle N, b \rangle$ constante. Como f é uma hipersuperfície, temos

$$X \langle N, N \rangle = 2\left\langle \widetilde{\nabla}_X N, N \right\rangle = 0$$

e daí concluímos que $\widetilde{\nabla}_X N$ pertence a TM. Então, usando (1.2), temos

$$X \langle N, b \rangle = \left\langle \widetilde{\nabla}_X N, b \right\rangle + \left\langle N, \underbrace{\widetilde{\nabla}_X b}_{=0} \right\rangle = \left\langle \widetilde{\nabla}_X N, b \right\rangle = \left\langle (\widetilde{\nabla}_X N)^T, b \right\rangle$$

$$= \left\langle (\widetilde{\nabla}_X N)^T, b^T \right\rangle = -\left\langle AX, b^T \right\rangle = -\left\langle X, \underbrace{Ab^T}_{=0} \right\rangle = 0,$$

onde na penúltima igualdade, usamos o fato de A ser auto-adjunta. Do visto acima, concluímos que $\langle N, b \rangle$ é constante. Agora, como $\langle N, b \rangle os = -\langle N, s \rangle$, vemos que $\langle N, b \rangle = 0$.

Considerando $u = \langle f, b \rangle$ e fazendo a identificação usual

$$\widetilde{\nabla}_X f = df \circ X = X,$$

concluímos que

$$X(u) = X \langle f, b \rangle = \left\langle \widetilde{\nabla}_X f, b \right\rangle + \left\langle f, \underbrace{\nabla_X b}_{=0} \right\rangle = \left\langle \widetilde{\nabla}_X f, b \right\rangle = \langle X, b \rangle, \quad \forall X \; \epsilon \; TM.$$

Calculemos agora a Hessiana de u. Para $X, Y \; \epsilon \; TM$,

$$Hess_u(X, Y) = X(Y(u)) - \nabla_X Y(u) = X(Y \langle f, b \rangle) - \nabla_X Y(u)$$

$$= X\left(\langle\nabla_Y f, b\rangle + \left\langle f, \underbrace{\nabla_Y b}_{=0}\right\rangle\right) - \nabla_X Y(u)$$

$$= X(\langle\nabla_Y f, b\rangle) - \nabla_X Y(u) = X(\langle Y, b\rangle) - \nabla_X Y\,\langle f, b\rangle$$

$$= \left\langle\widetilde{\nabla}_X Y, b\right\rangle + \left\langle Y, \underbrace{\widetilde{\nabla}_X b}_{=0}\right\rangle - \nabla_X Y\,\langle f, b\rangle = \left\langle\widetilde{\nabla}_X Y, b\right\rangle - \langle\nabla_X Y, b\rangle$$

$$= \left\langle\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, b\right\rangle = \left\langle\underbrace{(\widetilde{\nabla}_X Y)^T}_{=\nabla_X Y} + \left\langle\widetilde{\nabla}_X Y, f\right\rangle N + \left\langle\widetilde{\nabla}_X Y, f\right\rangle f - \nabla_X Y, b\right\rangle$$

$$= \left\langle\widetilde{\nabla}_X Y, f\right\rangle\underbrace{\langle N, b\rangle}_{=0} + \left\langle\widetilde{\nabla}_X Y, f\right\rangle\underbrace{\langle f, b\rangle}_{u} = \left(X\underbrace{\langle Y, f\rangle}_{=0} - \left\langle Y, \widetilde{\nabla}_X f\right\rangle\right)u = -\langle Y, X\rangle\,u.$$

Logo, $Hess_u = -\langle , \rangle\,u$. Se $u \neq 0$, então a demonstração do Teorema de Obata ([B-G-M], p. 179), assegura que M é isométrica à esfera unitária. Nesse caso, a equação (1.2) implica que M é totalmente geodésica em S^{n+1}. Portanto, ou M é uma hipersuperfície linear no espaço projetivo (o que não pode acontecer pois essas hipersuperfícies não são relativamente orientáveis), ou é uma esfera totalmente geodésica cobrindo duplamente uma hipersuperfície linear (o que novamente não é possível porque esta imersão é um levantamento para a esfera $(n+1)$-dimensional). Se $u = 0$, então concluímos, agora de modo trivial, que M é totalmente geodésica, o que é impossível como visto acima. Esta contradição prova a afirmação.

Tome uma base ortonormal $a_1, ..., a_{n+2}$ em $I\!R^{n+2}$. Para todo $i = 1, ..., n+2$ podemos encontrar, usando a afirmação acima, um vetor $b_i \,\epsilon\, I\!R^{n+2}$ tal que a função $\phi_i = \phi_{a_i, b_i}$ é ortogonal a φ. Portanto $Q(\phi_i, \phi_i) \geq 0$ e por (3.7) temos que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n+2}\int_M (n - |\sigma|^2)(\langle f, a_i\rangle^2 - \langle N, a_i\rangle^2)dV$$

$$= \int_M (n - |\sigma|^2)(|f|^2 - |N|^2)dV = 0.$$

Isto implica que $L\phi_i = 0$ para $i = 1, ..., n+2$ e assim, pelo Lema 2 concluímos que $(n - |\sigma|^2)\langle f, a_i\rangle = 0$ para todo i, o que é possível apenas se $n - |\sigma|^2 = 0$ em M. Por [C-dC-K], temos que M é localmente congruente à hipersuperfície de Clifford mínima. Portanto, ou M é congruente à hipersuperfície de Clifford

$$S^{n_1}(R_1) \times S^{n_2}(R_2) \subset S^{n+1}$$

satisfazendo a (2.2) ou a uma cobertura finita não trivial dela. Descartamos o segundo caso (o qual evidentemente é possível apenas se n_1 ou n_2 forem iguais a um) porque seu índice é maior que um. Poderemos verificar isso calculando explicitamente os autovalores do Laplaciano, como em (2.4). Isto prova o Teorema.

$\square$

Referências Bibliográficas

[B-dC-E] Barbosa, J. L.; do Carmo, M.; Eschenburg, J., *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in Riemannian manifolds*, Math. Z., 197, (1988), 123-138.

[B-G-M] Berger, M.; Gauduchon, P.; Mazet, T., *Le spectre d'une varieté Riemanniene.* Lectures notes in Mathematics, 194. Springer-Verlag, 1971.

[Ch] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian geometry.* Academic Press, 1984.

[C-dC-K] Chern, S.S.; do Carmo, M.; Kobayashi, S., *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields, Springer, 1970, 59-75.

[D] Dajczer, M.,*Submanifolds and isometric immersions* Publish or Perish, Inc. Houston, Texas, 1990.

[dC-P] do Carmo, M.; Peng, C. K.,*Stable complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *are planes*, Bull. Amer. Soc. (N.S.), 1, (1979), 903-906

[dC] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[dC-Ri-Ro] do Carmo, M.; Ritoré, M.;Ros, A., *Compact minimal hypersurfaces with index one in the real projective space,*Comm. Math. Helv. (1992).

[FC] Fischer-Colbrie, D., *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds.* Invent. Math. 82, (1985), 121-132.

[FC-S] Fischer-Colbrie,D; Schoen, R., *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature,* Comm. Pure Appl. Math., 33, (1980), 199-211.

[Li] Lima, E. L., *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

[L-R] Lopez, F. J.; Ros, A., *Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces*. Comment. Math. Helvetici ,(1989), 64, 34-43.

[Ri] Ritoré, M.,*Index one minimal surfaces in flat three space forms,* Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), 1137-1153.

[Ri-Ro1] Ritoré, M.; Ros, A.,*Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in the three space forms,* Comm. Math. Helv. 67 (1992), 293-305.

[Si] Simons, J. *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 88 (1968), 62-105.