UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VARIEDADES DE DIMENSÃO 4 COM CURVATURA BIORTOGONAL POSITIVA

CAROLINE MARTINS DA SILVA SABA

Salvador-Bahia
Abril de 2015

Variedades de Dimensão 4 com Curvatura Biortogonal Positiva

Caroline Martins da Silva Saba

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa

Salvador-Bahia

Abril de 2015

Saba, Caroline Martins da Silva.

Variedades de dimensão 4 com curvatura biortogonal positiva/ Caroline Martins da Silva Saba. – 2015.

39 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2015.

Referências bibliográficas.

1. Geometria Diferencial. 2. Variedades de dimensão 4(Topologia). 3. Einstein, Variedades de. 4. Variedades riemannianas. I. Costa, Ézio de Araújo. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática. III. Título.

CDD - 516.3

CDU - 514.7

Variedades de Dimensão 4 com Curvatura Biortogonal Positiva

Caroline Martins da Silva Saba

Dissertação de mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 16 de abril de 2015.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa (Orientador)
UFBA

Profa. Dra. Ana Lucia Pinheiro Lima
UFBA

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
UFC

À minha mãe e ao meu irmão.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela vida e por ter me guiado e me dado forças para alcançar mais esta conquista: a conclusão do Mestrado em Matemática.

À minha mãe, meu exemplo, por todo amor, carinho, dedicação e apoio a mim e pela formação da pessoa que hoje sou. Ao meu irmão e à toda minha família, por todo amor e carinho.

Ao professor Ézio Costa, por ter aceitado me orientar, pela paciência, pelo apoio e por me conduzir na construção deste trabalho.

Aos professores da graduação e do Mestrado que contribuíram para a minha formação acadêmica. Em especial, à professora Rita, pelo carinho, atenção e por sempre ter me incentivado a estar aqui. Também, à professora Ana Lucia, pelo carinho, apoio, atenção, pelas conversas e pelo incentivo constante na minha formação.

Ao professor Ernani Ribeiro e à professora Ana Lucia, por aceitarem participar da banca examinadora da minha dissertação e pelas contribuições dadas para melhorar o meu trabalho.

Ao meu namorado, pelo amor, carinho, companheirismo e pelo apoio e incentivo que tem me dado neste momento.

Aos meus amigos da graduação. Em especial, à Julianna, pela amizade, pela ajuda sempre que precisei, pelo apoio e incentivo para chegar até aqui. Também, à Ana Paula, pelos estudos juntas, pelo apoio, pelo carinho e pela amizade.

Aos meus amigos da pós-graduação, da sala 18, pelo carinho, pela amizade, pelas contribuições nos estudos e ajudas com o Tex. Foi muito bom conviver com todos vocês nesses dois anos. Em especial, à Bruno, pela amizade e por todos os estudos juntos nesses anos de Mestrado.

Por fim, agradeço à Fapesb pelo apoio financeiro.

"Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível."

(São Francisco de Assis)

Resumo

Um problema clássico em Geometria Diferencial é classificar variedades compactas tanto do ponto de vista topológico, quanto do ponto de vista geométrico. Sabemos que a curvatura (sob as formas mais variadas) pode determinar a topologia ou a geometria de tais variedades. Nesse presente trabalho, estudamos um tipo de curvatura (curvatura biortogonal) que é intermediária entre a curvatura seccional e a curvatura escalar. Em particular, em dimensão 4, essa noção de curvatura tem propriedades interessantes. Nosso principal objetivo é apresentar uma classificação das variedades Riemannianas compactas e orientadas de dimensão 4, M^4, que satisfazem as seguintes propriedades:

1. a métrica de M^4 é analítica;
2. o tensor de Weyl tem divergência nula;
3. o mínimo da curvatura biortogonal ($K_1^{\perp}$) satisfaz $K_1^{\perp} \geq \dfrac{s^2}{8(3s + 5\lambda_1)} > 0$, onde s é a curvatura escalar e λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano com respeito a g.

Palavras-chave: Variedades de dimensão 4; curvatura biortogonal; tensor de Weyl; Fórmula de Weitzenböck; variedades de Einstein.

Abstract

A classic problem in Differential Geometry is to classify compact manifolds from both the topological point of view as the geometric point of view. We know that the curvature (on different forms) can determine the topology or geometry of such manifolds. In this present work, we study a notion of curvature (biorthogonal curvature) that is between the sectional curvature and the scalar curvature. In particular, in dimension 4, this notion of curvature has interesting properties. Our aim is to present a classification of compact oriented Riemannian manifolds of dimension 4, M^4, that satisfy the following properties:

1. the metric of M^4 is analitic;
2. the Weyl tensor has null divergence;
3. the minimum of the biorthogonal curvature $(K_1^{\perp})$ satisfies $K_1^{\perp} \geq \dfrac{s^2}{8(3s+5\lambda_1)} > 0$, where s is the scalar curvature and λ_1 is the first eigenvalue of the Laplacian with respect to g.

Keywords: Manifolds 4-dimensional; biorthogonal curvature; Weyl tensor; Weitzenböck formula; Einstein manifolds.

Sumário

Introdução

Um dos mais belos resultados da Geometria Diferencial Global é o Teorema da Esfera que afirma o seguinte:

Teorema: *Seja (M^n, g), $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana compacta, orientável e cuja curvatura seccional satisfaz*

$$\frac{1}{4} < K \leq 1.$$

Então M^n é homeomorfa a uma esfera $\mathbb{S}^n$.

Esse resultado foi obtido por Berger, em 1960 (veja [2]), em dimensão par, e por Klingenberg, em 1961 (veja [10]), em dimensão ímpar.

Seaman, em 1991 (veja [13]), apresentou a noção de curvatura biortogonal, que é mais fraca do que a curvatura seccional, e generalizou o Teorema da Esfera:

Teorema: *Seja (M^n, g), $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana compacta, orientável e cuja curvatura biortogonal satisfaz*

$$\frac{1}{4} < K^{\perp} \leq 1.$$

Então M^n é homeomorfa a uma esfera $\mathbb{S}^n$.

Nessa dissertação, estudaremos a curvatura biortogonal e utilizaremos essa noção para classificar algumas variedades de dimensão 4 com curvatura biortogonal positiva. Consideremos, então, M^4 uma variedade Riemanniana compacta, orientada, de dimensão 4. Existem as seguintes conjecturas sobre tais variedades:

Conjectura 1: Se M^4 tem curvatura seccional $K > 0$ então M^4 é homeomorfa à esfera $\mathbb{S}^4$ ou ao espaço complexo projetivo $\mathbb{CP}^2$.

Conjectura 2: Se M^4 é uma variedade de Einstein com $K > 0$ então M^4 é isométrica à esfera $\mathbb{S}^4$ ou ao espaço complexo projetivo $\mathbb{CP}^2$.

Em particular, D. Yang provou, em 2000 (veja [14]), que a conjectura 2 é verdadeira no seguinte caso:

Teorema (Yang): *Seja (M^4, g) uma variedade de Einstein compacta orientada de dimensão 4 com curvatura de Ricci igual a 1. Se a curvatura seccional K de (M^4, g) satisfaz a condição*

$$K \geq \epsilon_0 \equiv \frac{\sqrt{1249}-23}{120} \approx 0.102843,$$

então (M^4, g) *é isométrica à esfera* $\mathbb{S}^4$ *ou ao espaço complexo projetivo* $\mathbb{CP}^2$.

E. Costa provou, em 2004 (veja [3]), que o resultado de Yang dado acima continua verdadeiro sob a condição

$$K \geq \frac{2-\sqrt{2}}{6} \approx 0.097631.$$

E. Ribeiro, em 2014 (veja [12]), melhorou ainda mais esse resultado usando a condição

$$K \geq \frac{1}{12} \approx 0.083333.$$

Em nossa dissertação, provaremos o teorema dado abaixo, que foi obtido por Costa e Ribeiro, em 2014 (veja [5]), e que é uma generalização do Teorema de Yang.

Teorema Principal: *Seja* (M^4, g) *uma variedade Riemanniana compacta, orientada, de dimensão* 4, *com tensor de Weyl harmônico e curvatura escalar positiva* s. *Se a métrica* g *é analítica e*

$$K_1^{\perp} \geq \frac{s^2}{8(3s+5\lambda_1)},$$

onde λ_1 *representa o primeiro autovalor do Laplaciano com respeito a* g. *Então,*

1. M^4 *é conformemente plana,*

2. *ou* M^4 *é isométrica ao espaço complexo projetivo* $\mathbb{CP}^2$ *com sua métrica canônica.*

Para atingir nosso objetivo, dedicamos o primeiro capítulo às definições e aos resultados básicos de Geometria Riemanniana que estão relacionadas com o tema proposto. Nos capítulos 2 e 3 apresentamos algumas noções e resultados que serão utilizados na demonstração do Teorema Principal, dado acima. No capítulo 4 apresentamos resultados referentes a variedades de Einstein de dimensão 4. E, no capítulo 5, demonstramos o Teorema Principal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos algumas definições básicas de Geometria Riemanniana e alguns resultados preliminares que serão utilizados nos capítulos posteriores. As definições referentes à Geometria Riemanniana encontram-se no livro de do Carmo [6].

Seja $M = M^n$, $n \geq 2$, uma variedade diferenciável n-dimensional. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ tangentes a M^n, por $D(M)$ o anel das funções reais definidas em M, de classe C^∞, e por TM o fibrado tangente de M^n. Para cada $p \in M$, T_pM denotará o espaço tangente de M^n em p.

1.1 Noções Básicas de Geometria Riemanniana

Definição 1.1.1. *Uma métrica Riemanniana em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \ , \ \rangle_p$, no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente com p no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, x_2, ..., x_n) = q$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, ..., 1, ..., 0)$, então $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}(q), \dfrac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)$ são funções diferenciáveis em U.*

Definição 1.1.2. *Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana.*

Definição 1.1.3. *Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty$. Uma conexão afim em M^n é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:
(i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
(iii) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Definição 1.1.4. *Uma conexão afim é dita ser compatível com a métrica, se ela satisfaz a regra do produto, ou seja,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Definição 1.1.5. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita ser simétrica, quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.1.6. *Uma conexão é dita Riemanniana, se ela for simétrica e compatível com a métrica.*

Definição 1.1.7. *A curvatura R de M^n é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ é o colchete de Lie de X e Y.

Definição 1.1.8. *O tensor de curvatura de M^n, $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to D(M)$, é definido por*

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle,$$

onde $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.1.9. *O tensor de curvatura $R(X, Y, Z, W)$ satisfaz as seguintes propriedades:*
(i) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Y, X, W, Z)$;
(ii) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$.

Definição 1.1.10. *Sejam σ um subespaço bidimensional de T_pM e $\{X, Y\}$ uma base de σ. A curvatura seccional de σ em p é dada por*

$$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{|X \wedge Y|^2},$$

onde $|X \wedge Y|^2 = |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2$.

No caso em que X_i, X_j são ortonormais,

$$K_{ij} = K(X_i, X_j) = R(X_i, X_j, X_j, X_i).$$

Além disso, segue do item (ii) da Proposição 1.1.9 que $K_{ij} = K_{ji}$.

Definição 1.1.11. *Seja $X \in T_pM$, com $|X| = 1$. Então, a curvatura de Ricci na direção de X é dada por*

$$Ric_p(X) = \sum_{i=2}^{n} K(X, X_i),$$

onde $\{X_1 = X, ..., X_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Definição 1.1.12. *A curvatura escalar de M^n em p é dada por*

$$s(p) = \sum_{i=1}^{n} Ric_p(X_i),$$

onde $\{X_1 = X, ..., X_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Definição 1.1.13. *Sejam $X, Y \in T_pM$ e façamos*

$$Ric(X, Y) = \text{traço da aplicação } Z \mapsto R(X, Z)Y.$$

Escolhendo X tal que $|X| = 1$ e uma base ortonormal $\{Z_1, ..., Z_n = X\}$ para T_pM, temos o tensor de Ricci definido por

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(X, Z_i)Y, Z_i\rangle.$$

Definição 1.1.14. *Uma variedade Riemanniana M^n, $n > 2$, com uma métrica g, é dita ser uma variedade de Einstein, se a mesma tem curvatura de Ricci constante.*

Outra definição equivalente para variedade de Einstein de dimensão $n > 2$ é a seguinte

Definição 1.1.15. *(M^n, g) é uma variedade de Einstein se, e somente se, o tensor de Ricci é um múltiplo da métrica, isto é,*

$$Ric = \lambda g,$$

onde λ é uma constante.

Definição 1.1.16. *$(M^n, \langle\ ,\ \rangle)$ é conformemente plana se, para cada $x \in M^n$, existe um difeomorfismo $f : V \subset M^n \to V' \subset \mathbb{R}^n$, onde V é uma vizinhança de $x \in M^n$ e V' é uma vizinhança de $f(x) \in \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $p \in V$ e todo $v_1, v_2 \in T_pM^n$, se tenha*

$$\langle v_1, v_2\rangle_p = u(p)\langle\langle df_pv_1, df_pv_2\rangle\rangle_{f(p)},$$

onde $u : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável positiva e $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ é a métrica euclidiana.

1.2 Formas

Definição 1.2.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 2$, com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Uma 1-forma em V é um funcional linear $f : V \to \mathbb{R}$ e, como sabemos, existe um único vetor $u \in V$ tal que $f(v) = \langle u, v\rangle$, $\forall v \in V$. Então, podemos identificar f com um vetor $u \in V$ e usar a notação $u(v) = \langle u, v\rangle$.*

Definição 1.2.2. *Uma 2-forma em V é uma aplicação bilinear antissimétrica $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$. Se u e v são dois vetores em V, podemos definir uma 2-forma $u \wedge v$ (bivetor) da seguinte maneira*

$$u \wedge v : V \times V \to \mathbb{R} \ (u \wedge v)(x, y) = \det \begin{pmatrix} \langle u, x\rangle & \langle u, y\rangle \\ \langle v, x\rangle & \langle v, y\rangle \end{pmatrix}$$

Dessa definição, seguem algumas propriedades:

1. *$v \wedge u = -u \wedge v$.*
   De fato,
   $$(v \wedge u)(x, y) = \det \begin{pmatrix} \langle v, x\rangle & \langle v, y\rangle \\ \langle u, x\rangle & \langle u, y\rangle \end{pmatrix} = \langle v, x\rangle\langle u, y\rangle - \langle u, x\rangle\langle v, y\rangle = -(u \wedge v)(x, y).$$
   Em particular, $u \wedge u = 0$.

2. *$((\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \wedge v) = \lambda_1 u_1 \wedge v + \lambda_2 u_2 \wedge v$.*
   De fato,
   $$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, x\rangle & \langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, y\rangle \\ \langle v, x\rangle & \langle v, y\rangle \end{pmatrix} &= \\ &= (\langle \lambda_1 u_1, x\rangle + \langle \lambda_2 u_2, x\rangle)\langle v, y\rangle - \langle v, x\rangle(\langle \lambda_1 u_1, y\rangle + \langle \lambda_2 u_2, y\rangle) \\ &= \lambda_1(\langle u_1, x\rangle\langle v, y\rangle - \langle v, x\rangle\langle u_1, y\rangle) + \lambda_2(\langle u_2, x\rangle\langle v, y\rangle - \langle v, x\rangle\langle u_2, y\rangle) \\ &= \lambda_1(u_1 \wedge v)(x, y) + \lambda_2(u_2 \wedge v)(x, y). \end{aligned}$$

O conjunto das 2-formas em V é um espaço vetorial denotado por $\Lambda^2(V)$. Se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é uma base de V, então $\{e_i \wedge e_j\}$, com $i < j$, é uma base para $\Lambda^2(V)$.

Podemos definir um produto interno em $\Lambda^2(V)$ da seguinte forma:

$$\langle\ ,\ \rangle : \Lambda^2(V) \times \Lambda^2(V) \to \mathbb{R}$$

$$\langle e_i \wedge e_j, e_r \wedge e_k\rangle = \det \begin{pmatrix} \langle e_i, e_r\rangle & \langle e_i, e_k\rangle \\ \langle e_j, e_r\rangle & \langle e_j, e_k\rangle \end{pmatrix}.$$

Dadas as 2-formas $\alpha = e_i \wedge e_j$, $\beta = e_r \wedge e_k \in \Lambda^2(V)$, o produto exterior de α e β pode ser definido como a aplicação:

$$\alpha \wedge \beta : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2, v_3, v_4) = \det(\langle e_i, v_j \rangle).$$

Dizemos que uma 2-forma $\alpha \in \Lambda^2(V)$ é decomponível, se existem $u, v \in V$, tais que $\alpha = u \wedge v$.

Além disso, dados $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda^2(V)$, temos as seguintes propriedades básicas do produto exterior:

- $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$;
- $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$;
- $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$;
- Se α é diferente de zero, então α é decomponível se, e somente se, $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Agora, conhecendo o espaço Λ^2, podemos apresentar a seguinte definição:

Definição 1.2.3. *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n. Em cada ponto $x \in M$, vamos considerar $V = T_xM$ e $\Lambda^2_x = \Lambda^2(T_xM)$. O operador de cuvatura $\Re$ em x, $\Re : \Lambda^2_x \to \Lambda^2_x$ é definido por*

$$\langle \Re(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle = R(X \wedge Y, Z \wedge W) = R(X, Y, W, Z),$$

onde R é o tensor de curvatura.

Observação 1.2.4. *$\Re$ é uma aplicação linear simétrica.*

1.3 O operador estrela(Operador de Hodge)

A partir daqui estamos interessados em espaços vetoriais V, de dimensão 4. Seja V um espaço vetorial, de dimensão 4, com produto interno $\langle \ , \ \rangle$. Vamos, então, definir o operador estrela $*$. Para isto, considere $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base ortonormal de V, logo

$$B = \{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$$

é uma base de $\Lambda^2(V)$.

Definição 1.3.1. *O operador estrela $* : \Lambda^2(V) \to \Lambda^2(V)$ é uma aplicação definida nos elementos da base B da seguinte forma*

$$\begin{aligned}
*(e_1 \wedge e_2) &= e_3 \wedge e_4;\\
*(e_1 \wedge e_3) &= e_2 \wedge e_4;\\
*(e_1 \wedge e_4) &= e_2 \wedge e_3;\\
*(e_2 \wedge e_3) &= e_1 \wedge e_4;\\
*(e_2 \wedge e_4) &= e_1 \wedge e_3;\\
*(e_3 \wedge e_4) &= e_1 \wedge e_2.
\end{aligned}$$

Essa definição é estendida, por linearidade, para os outros elementos de $\Lambda^2(V)$.

Lema 1.3.2. *O operador* $* : \Lambda^2(V) \to \Lambda^2(V)$ *satisfaz as seguintes condições:*
(i) $* \circ * = Id$;
(ii) $*$ *é auto adjunto;*
(iii) os autovalores de $*$ *são* ± 1.

Prova.

(i) Pela definição, basta verificar que esta propriedade é válida para os elementos da base B. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
((e_1 \wedge e_2)) &= *(e_3 \wedge e_4) = e_1 \wedge e_2, \\
((e_1 \wedge e_3)) &= *(e_2 \wedge e_4) = e_1 \wedge e_3, \\
((e_1 \wedge e_4)) &= *(e_2 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_4, \\
((e_2 \wedge e_3)) &= *(e_1 \wedge e_4) = e_2 \wedge e_3, \\
((e_2 \wedge e_4)) &= *(e_1 \wedge e_3) = e_2 \wedge e_4, \\
((e_3 \wedge e_4)) &= *(e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_4,
\end{aligned}$$

o que prova a primeira afirmação.

(ii) Para mostrar que $*$ é auto adjunto, também basta verificar, que essa propriedade é válida, para os elementos da base B. De fato, temos

$$\langle *(e_1 \wedge e_2), e_1 \wedge e_3 \rangle = \langle e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle e_3, e_1 \rangle & \langle e_3, e_3 \rangle \\ \langle e_4, e_1 \rangle & \langle e_4, e_3 \rangle \end{pmatrix} = 0,$$

pois, como e_i e e_j são ortonormais, temos que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_i^j$.

Por outro lado,

$$\langle e_1 \wedge e_2, *(e_1 \wedge e_3) \rangle = \langle e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_4 \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_1, e_4 \rangle \\ \langle e_2, e_2 \rangle & \langle e_2, e_4 \rangle \end{pmatrix} = 0,$$

pois, como e_i e e_j são ortonormais,temos que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_i^j$.

De maneira análoga, conseguimos provar que a propriedade é válida para os demais elementos da base.

(iii) Temos, por (i), que $*^2 = Id$, logo $\det *^2 = \det Id = 1$. Assim, $(\det *)^2 = 1$. Portanto, os autovalores de $*$ são ± 1.

■

Observação 1.3.3. *O operador* $*$ *decompõe o espaço* $\Lambda^2(V)$ *na soma direta ortogonal* $\Lambda^2(V) = \Lambda^+(V) \oplus \Lambda^-(V)$, *onde* $\Lambda^{\pm}$ *são os auto espaços de* $*$ *associados aos autovalores* ± 1, *ou seja*

$$\begin{aligned}
\Lambda^+(V) &= \{\alpha \in \Lambda^2(V); *\alpha = \alpha\}, \\
\Lambda^-(V) &= \{\alpha \in \Lambda^2(V); *\alpha = -\alpha\}.
\end{aligned}$$

Sendo $\dim(V) = 4$, *temos que* $\dim(\Lambda^2 V) = 6$ *e* $\dim(\Lambda^{\pm}) = 3$. *É bem conhecido que*

$$\Lambda^{+} = span\left\{\frac{e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4}{\sqrt{2}}, \frac{e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3 \wedge e_2 + e_4 \wedge e_1}{\sqrt{2}}\right\} \tag{1.1}$$

e

$$\Lambda^{-} = span\left\{\frac{e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4}{\sqrt{2}}, \frac{e_1 \wedge e_3 - e_4 \wedge e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3 \wedge e_2 - e_4 \wedge e_1}{\sqrt{2}}\right\} \tag{1.2}$$

(veja [12]). Os espaços $\Lambda^{+}(V)$ *e* $\Lambda^{-}(V)$ *são chamados de parte autodual e parte anti-autodual de* $\Lambda^2(V)$*, respectivamente.*

Capítulo 2

Tensor de Weyl e Curvatura Biortogonal

Neste capítulo, apresentaremos as definições do tensor de Weyl e da curvatura biortogonal e vamos estabelecer algumas relações entre essas duas noções.

2.1 Tensor de Weyl

Definição 2.1.1. *Seja M^4 uma variedade Riemanniana, orientada, de dimensão 4. Em cada ponto $x \in M$, vamos considerar $V = T_xM^4$ e $\Lambda_x^2 = \Lambda^2(T_xM^4)$. O tensor de Weyl em x, $W = W_x : \Lambda_x^2 \to \Lambda_x^2$, é definido por*

$$W(X \wedge Y) = \Re(X \wedge Y) - \frac{1}{2}[Ric(X) \wedge Y + X \wedge Ric(Y)] + \frac{s}{6}(X \wedge Y),$$

onde s é a curvatura escalar de M^4, em x,

$$Ric(Z) = \sum_{i=2}^{n} R(Z, Z_i)Z,$$

$\{Z = Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ é uma base ortonormal de T_xM^4 e R é o tensor de curvatura.

Observação 2.1.2. *W é uma aplicação linear simétrica.*

Em dimensão 4, pela ação do operador estrela $*$, temos que W pode ser decomposto na soma direta ortogonal

$$W = W^+ \oplus W^-,$$

onde $W^\pm : \Lambda^\pm \to \Lambda^\pm$ são chamados de parte autodual e anti-autodual de W, respectivamente. Logo, por tal decomposição, temos

$$|W|^2 = |W^+|^2 + |W^-|^2.$$

Sejam $w_1^\pm \leq w_2^\pm \leq w_3^\pm$ os autovalores de $W^\pm$, respectivamente. Sabemos que

$$\operatorname{tr} W^\pm = \sum_{i=1}^{3} w_i^\pm = 0 \quad \text{e} \quad |W^\pm|^2 = \sum_{i=1}^{3} (w_i^\pm)^2.$$

Podemos caracterizar variedades conformementes planas, utilizando o tensor de Weyl, como segue.

Proposição 2.1.3. *Uma variedade M^n orientada, de dimensão $n \geq 4$, é conformemente plana se, e somente se, $W \equiv 0$.*

Prova. Pela definição de variedade conformemente plana, temos que $(M^n, \langle \ , \ \rangle)$ é conformemente plana se, e somente se, para cada $x \in M^n$, existe um difeomorfismo conforme $f : V \subset M^n \to V' \subset \mathbb{R}^n$, onde V é uma vizinhança de $x \in M^n$ e V' é uma vizinhança de $f(x) \in \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $p \in V$ e todo $v_1, v_2 \in T_pM^n$, se tenha

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = u(p) \langle\langle df_p v_1, df_p v_2 \rangle\rangle_{f(p)},$$

onde $u : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável positiva e $\langle\langle \ , \ \rangle\rangle$ é a métrica euclidiana.

Assim, a métrica de M^n é conforme à métrica do $\mathbb{R}^n$. Sabemos que, em $\mathbb{R}^n$, $W \equiv 0$ e a métrica conforme preserva o tensor de Weyl. Logo, em M^n, $W \equiv 0$.

■

Em dimensão 4, $\mathbb{S}^4_c$ $(c > 0)$, $\mathbb{H}^4_c$ $(c < 0)$ e $\mathbb{R}^4$ $(c = 0)$ são exemplos de variedades conformemente planas.

Podemos também definir variedades semiconformemente planas utilizando o tensor de Weyl, como na definição seguinte.

Definição 2.1.4. *Uma variedade M^4 orientada, de dimensão 4, é semiconformemente plana se, e somente se, $W^- = 0$ ou $W^+ = 0$.*

O espaço complexo projetivo, $\mathbb{CP}^2$, possui $W^- = 0$ e $W^+ \neq 0$, ou seja, é uma variedade semiconformemente plana.

2.1.1 Decomposição do Operador de Curvatura

Considere (M^4, g) uma variedade Riemanniana orientada de dimensão 4. Sendo $\Re$ o operador de curvatura de M^4, a matriz desse operador é dada por

$$\Re = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \dfrac{s}{12} Id & B \\ \hline B^* & W^- + \dfrac{s}{12} Id \end{array} \right),$$

onde

$$\begin{aligned} B : \Lambda^- &\to \Lambda^+ \\ \alpha^- &\mapsto \alpha^+ \end{aligned}$$

representa o operador sem traço de Ricci de M^4 dado por

$$B = Ric - \frac{s}{4}g,$$

em que

- Ric é o tensor de Ricci de M^4;
- s é a curvatura escalar de M^4;
- $\begin{array}{rl} B^* : \Lambda^+ \to \Lambda^- \\ \alpha^+ \mapsto \alpha^- \end{array}$ é o operador adjunto e inverso de B.

Observação 2.1.5. *Como consequência imediata da Definição 1.1.15, $B = 0$ se, e somente se, (M^4, g) é uma variedade de Einstein.*

2.2 Curvatura Biortogonal

A noção de curvatura biortogonal foi usada em [11] e [13] por M. H. Noronha e W. Seaman, mas a definição foi feita originalmente por E. A. Costa em [4], como apresentaremos a seguir.

Seja $M = M^n$ uma variedade compacta de dimensão $n \geq 4$ e denote por $Met(M)$ o conjunto das métricas Riemannianas em M. Para cada métrica $g \in Met(M)$, seja s a curvatura escalar de M na métrica g e denote por K a curvatura seccional dessa métrica. Para cada $x \in M$, sejam P_1 e P_2 dois subespaços de dimensão 2, do espaço tangente T_xM, que são mutuamente ortogonais.

Definição 2.2.1. *A curvatura seccional biortogonal $K^\perp$, relativa a P_1 e P_2 (em $x \in M$), é o número dado por*

$$K^\perp(P_1, P_2) = \frac{K(P_1) + K(P_2)}{2}.$$

Se $n = 4$, escrevemos

$$K^\perp(P) = \frac{K(P) + K(P^\perp)}{2}, \tag{2.1}$$

onde $P^\perp$ é o 2-plano ortogonal à P.

Agora, seja M uma variedade Riemanniana de dimensão 4 e considere as seguintes funções em M:

$$K_1^\perp = min\{K^\perp(P); P \text{ é um 2-plano de } T_xM\}, \tag{2.2}$$

$$K_3^\perp = max\{K^\perp(P); P \text{ é um 2-plano de } T_xM\}, \tag{2.3}$$

$$\text{e} \quad K_2^\perp = \frac{s}{4} - K_1^\perp - K_3^\perp. \tag{2.4}$$

2.3 Relação entre o Tensor de Weyl e a Curvatura Biortogonal

Nesta seção, provaremos algumas equações envolvendo os autovalores da parte autodual e anti-autodual do tensor de Weyl e a curvatura biortogonal.

Considere (M^4, g) uma variedade Riemanniana orientada, compacta, de dimensão 4.

Lema 2.3.1. *Sejam $x \in M^4$ e $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ uma base ortonormal orientada de T_xM^4. Seja também $\alpha = X_1 \wedge X_2 \in \Lambda^2(T_xM^4)$ uma 2-forma unitária. Então α pode ser unicamente escrita como $\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$, onde $\alpha^\pm \in \Lambda^\pm$, respectivamente, com $|\alpha^+|^2 = \dfrac{1}{2}$ e $|\alpha^-|^2 = \dfrac{1}{2}$.*

Prova. Como $|\alpha| = 1$, já que α é unitária, temos $\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$. Além disso, supondo $\alpha = X_1 \wedge X_2$, obtemos

$$\langle \alpha, *\alpha \rangle = \langle X_1 \wedge X_2, *(X_1 \wedge X_2) \rangle = \langle X_1 \wedge X_2, X_3 \wedge X_4 \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle X_1, X_3 \rangle & \langle X_1, X_4 \rangle \\ \langle X_2, X_3 \rangle & \langle X_2, X_4 \rangle \end{pmatrix} = 0;$$

pois X_1, X_2, X_3, X_4 são ortonormais entre si.

Como $\Lambda^2_x = \Lambda^+_x \oplus \Lambda^-_x$, onde Λ^+_x é o auto espaço associado ao autovalor $+1$ e Λ^-_x é o auto espaço associado ao autovalor -1, temos que α pode ser escrita como $\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$, onde $*(\alpha^+) = \alpha^+$ e $*(\alpha^-) = -\alpha^-$. Daí, segue que

$1 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha^+ + \alpha^-, \alpha^+ + \alpha^- \rangle = |\alpha^+|^2 + 2\langle \alpha^+, \alpha^- \rangle + |\alpha^-|^2 = |\alpha^+|^2 + |\alpha^-|^2$, pois, como $\alpha^+ \in \Lambda^+$ e $\alpha^- \in \Lambda^-$, temos $\langle \alpha^+, \alpha^- \rangle = 0$.

Por outro lado, temos que

$0 = \langle \alpha, *\alpha \rangle = \langle \alpha^+ + \alpha^-, *(\alpha^+ + \alpha^-) \rangle = \langle \alpha^+ + \alpha^-, \alpha^+ - \alpha^- \rangle = |\alpha^+|^2 - \langle \alpha^+, \alpha^- \rangle + \langle \alpha^-, \alpha^+ \rangle - |\alpha^-|^2 = |\alpha^+|^2 - |\alpha^-|^2$.

Portanto, das equações acima, obtemos

$$|\alpha^+|^2 = |\alpha^-|^2 = \frac{1}{2}.$$

Para mostrar a unicidade, suponhamos que existam $\beta^+, \beta^- \in \Lambda^\pm$, respectivamente, tais que $\alpha = \beta^+ + \beta^-$. Então

$$\alpha^+ + \alpha^- = \beta^+ + \beta^- \quad \Rightarrow \quad \alpha^+ - \beta^+ = \beta^- - \alpha^-$$

Como $\alpha^+ - \beta^+ \in \Lambda^+_x$, $\beta^- - \alpha^- \in \Lambda^-_x$ e $\Lambda^+_x \cap \Lambda^-_x = \{0\}$, já que $\Lambda^+_x \oplus \Lambda^-_x = \Lambda^2_x$, temos que

$$\alpha^+ - \beta^+ = 0 \Rightarrow \alpha^+ = \beta^+$$
$$\beta^- - \alpha^- = 0 \Rightarrow \beta^- = \alpha^-$$

Portanto, α pode ser unicamente escrita como $\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$. Isto conclui a prova do Lema.

$\blacksquare$

Com as notações do lema acima, a curvatura seccional é dada por

$$K(X_1 \wedge X_2) = K(\alpha) = \langle \Re(\alpha), \alpha \rangle,$$

onde $\alpha = X_1 \wedge X_2 = \alpha^+ + \alpha^-$.

Para encontrar a expressão para a curvatura seccional $K(\alpha)$, vamos calcular primeiramente $\Re(\alpha)$.

$$\Re(\alpha) = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \dfrac{s}{12}Id & B \\ \hline B^* & W^- + \dfrac{s}{12}Id \end{array}\right)\begin{pmatrix} \alpha^+ \\ \\ \alpha^- \end{pmatrix}.$$

Daí, obtemos

$$\Re(\alpha) = \left(\begin{array}{c} W^+(\alpha^+) + \dfrac{s}{12}\alpha^+ + B\alpha^- \\ \hline B^*\alpha^+ + W^-(\alpha^-) + \dfrac{s}{12}\alpha^- \end{array}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= \langle \Re(\alpha), \alpha \rangle \\ &= \left\langle \left(W^+(\alpha^+) + \frac{s}{12}\alpha^+ + +B\alpha^-, B^*\alpha^+ + W^-(\alpha^-) + \frac{s}{12}\alpha^- \right), (\alpha^+, \alpha^-) \right\rangle \\ &= \langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle + \frac{s}{12}|\alpha^+|^2 + \langle B\alpha^-, \alpha^+ \rangle + \langle W^+(\alpha^+), \alpha^- \rangle + \\ &\quad + \frac{s}{12}\langle \alpha^+, \alpha^- \rangle + \langle B\alpha^-, \alpha^- \rangle + +\langle B^*\alpha^+, \alpha^+ \rangle + \langle W^-(\alpha^-), \alpha^+ \rangle \\ &\quad + \frac{s}{12}\langle \alpha^-, \alpha^+ \rangle + \langle B^*\alpha^+, \alpha^- \rangle + \langle W^-(\alpha^-), \alpha^- \rangle + \frac{s}{12}|\alpha^-|^2 . \end{aligned}$$

Por outro lado, observe que

- $\dfrac{s}{12}\left(|\alpha^+|^2 + |\alpha^-|^2\right) = \dfrac{s}{12}$, pois $|\alpha^+|^2 + |\alpha^-|^2 = 1$;
- $\langle W^+(\alpha^+), \alpha^- \rangle = 0$, pois $W^+(\alpha^+) \perp \alpha^-$, já que $W^+(\alpha^+) \in \Lambda^+$ e $\alpha^- \in \Lambda^-$;
- $\langle \alpha^+, \alpha^- \rangle = \langle \alpha^-, \alpha^+ \rangle = 0$, pois $\alpha^+ \perp \alpha^-$;
- $\langle B\alpha^-, \alpha^- \rangle = \langle \alpha^+, \alpha^- \rangle = 0$ e $\langle B^*\alpha^+, \alpha^+ \rangle = \langle \alpha^-, \alpha^+ \rangle = 0$, ambos pelo item anterior;
- $\langle W^-(\alpha^-), \alpha^+ \rangle = 0$, pois $W^-(\alpha^-) \perp \alpha^+$, já que $W^-(\alpha^-) \in \Lambda^-$ e $\alpha^+ \in \Lambda^+$;
- $\langle B^*\alpha^+, \alpha^- \rangle = \langle \alpha^+, B\alpha^- \rangle$, pois B^* é adjunta de B;
- Além disso, $\langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle = \langle \alpha^+, W^+(\alpha^+) \rangle$, $\langle W^-(\alpha^-), \alpha^- \rangle = \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-) \rangle$ e $\langle B\alpha^-, \alpha^+ \rangle = \langle \alpha^+, B\alpha^- \rangle$, pois o produto interno é comutativo.

Substituindo essas igualdades na expressão de $K(\alpha)$, obtemos

$$K(\alpha) = \frac{s}{12} + \langle \alpha^+, W^+(\alpha^+)\rangle + \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-)\rangle + 2\langle \alpha^+, B\alpha^-\rangle.$$

Em particular, se $\alpha^\perp = X_3 \wedge X_4 = \alpha^+ - \alpha^-$, temos

$$K(\alpha^\perp) = \frac{s}{12} + \langle \alpha^+, W^+(\alpha^+)\rangle + \langle -\alpha^-, W^-(-\alpha^-)\rangle + 2\langle \alpha^+, B(-\alpha^-)\rangle.$$

Como W^- e B são aplicações lineares, concluímos que

$$K(\alpha^\perp) = \frac{s}{12} + \langle \alpha^+, W^+(\alpha^+)\rangle + \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-)\rangle - 2\langle \alpha^+, B\alpha^-\rangle.$$

Somando as equações de $K(\alpha)$ e $K(\alpha^\perp)$, temos

$$K(\alpha) + K(\alpha^\perp) = 2\left(\frac{s}{12} + \langle \alpha^+, W^+(\alpha^+)\rangle + \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-)\rangle\right).$$

Assim,

$$\frac{K(\alpha) + K(\alpha^\perp)}{2} = \frac{s}{12} + \langle \alpha^+, W^+(\alpha^+)\rangle + \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-)\rangle.$$

Portanto, usando a equação (2.2), obtemos

$$K_1^\perp = \frac{s}{12} + min\left\{\langle \alpha^+, W^+(\alpha^+)\rangle; |\alpha^+|^2 = \frac{1}{2}\right\} + min\left\{\langle \alpha^-, W^-(\alpha^-)\rangle; |\alpha^-|^2 = \frac{1}{2}\right\}. \quad (2.5)$$

Observe que

$$min\left\{\langle \alpha^\pm, W^\pm(\alpha^\pm)\rangle; |\alpha^\pm|^2 = \frac{1}{2}\right\} = w_1^\pm|\alpha^\pm|^2 = \frac{w_1^\pm}{2},$$

onde $w_1^\pm$ são os menores autovalores de $W^\pm$, respectivamente.

Portanto, pela equação (2.5), temos

$$K_1^\perp - \frac{s}{12} = \frac{w_1^+ + w_1^-}{2}. \quad (2.6)$$

Argumentando de forma análoga usando a equação (2.3), e sabendo que

$$max\left\{\langle \alpha^\pm, W^\pm(\alpha^\pm)\rangle; |\alpha^\pm|^2 = \frac{1}{2}\right\} = w_3^\pm|\alpha^\pm|^2 = \frac{w_3^\pm}{2},$$

onde $w_3^\pm$ são os maiores autovalores de $W^\pm$, respectivamente, temos

$$K_3^\perp - \frac{s}{12} = \frac{w_3^+ + w_3^-}{2}. \quad (2.7)$$

Substituindo (2.6) e (2.7) em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} K_2^\perp &= \frac{s}{4} - \left(\frac{s}{12} + \frac{w_1^+ + w_1^-}{2}\right) - \left(\frac{s}{12} + \frac{w_3^+ + w_3^-}{2}\right) \\ &= \frac{s}{4} - \frac{2s}{12} + \left(\frac{-w_1^+ - w_3^+}{2}\right) + \left(\frac{-w_1^- - w_3^-}{2}\right) \end{aligned}$$

Finalmente, usando $w_2^{\pm} = -w_1^{\pm} - w_3^{\pm}$, concluímos que

$$K_2^{\perp} - \frac{s}{12} = \frac{w_2^{+} + w_2^{-}}{2} \tag{2.8}$$

As equações (2.6), (2.7), e (2.8) relacionam os autovalores da parte autodual e anti-autodual do tensor de Weyl com a curvaturva biortogonal.

Em dimensão 4, podemos caracterizar variedades conformemente planas utilizando a curvatura biortogonal, como dado na proposição a seguir.

Proposição 2.3.2. *M^4 é uma variedade conformemente plana se, e somente se,*

$$K^{\perp}(P) = \frac{s(x)}{12}, \text{ para todo } P \subset T_xM^4,$$

onde s é a curvatura escalar de M^4 em x.

Prova. Já sabemos que M^4 é uma variedade conformemente plana se, e somente se, $W \equiv 0$.

Por outro lado,

$$W \equiv 0 \Leftrightarrow w_i^{+} = w_i^{-} = 0.$$

Então, usamos (2.6), (2.7) e (2.8) para concluir que

$$K_1^{\perp} = \frac{s}{12},\ K_2^{\perp} = \frac{s}{12} \text{ e } K_3^{\perp} = \frac{s}{12}.$$

Assim, pelas definições de $K_1^{\perp}$, $K_2^{\perp}$ e $K_3^{\perp}$, dadas pelas equações (2.2), (2.3) e (2.4), temos que

$$K^{\perp} = \frac{s}{12}, \text{ como afirmado.}$$

■

Capítulo 3

Fórmula de Weitzenböck, Desigualdade de Kato e Desigualdade de Poincaré

Neste capítulo, definiremos o Laplaciano de uma variedade, o tensor de Weyl harmônico e enunciaremos alguns resultados envolvendo esse tensor e o primeiro autovalor do Laplaciano.

3.1 Desigualdade de Poincaré

Nesta seção, definiremos Laplaciano de uma variedade M, seu primeiro autovalor e enunciaremos a Desigualdade de Poincaré.

Definição 3.1.1. *Seja M uma variedade Riemanniana, de dimensão n. O Laplaciano de M, $\Delta : D(M) \to D(M)$, é definido por*

$$\Delta f = div \,\mathrm{grad}\, f, f \in D(M)$$

Definição 3.1.2. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta e Δ o Laplaciano de M^n. Dizemos que um número λ é autovalor de Δ, se existe uma função diferenciável $f : M^n \to \mathbb{R}$, f não identicamente nula, tal que*

$$\Delta f = -\lambda f.$$

É um fato conhecido que os autovalores do Laplaciano satisfazem

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$$

λ_1 é chamado de primeiro autovalor de Δ.

Pela definição acima, existe $f_1 \neq 0$ tal que $\Delta f_1 = -\lambda_1 f_1$, onde $\lambda_1 \neq 0$. Em particular, se M é compacta, temos, pelo Teorema de Stokes, que $\int_M \Delta f_1 dV_g = 0$. Segue então que $\int_M f_1 dV_g = 0$.

Por outro lado,

$$f_1 \Delta f_1 = -\lambda_1 f_1^2 \tag{3.1}$$

e $\Delta f_1^2 = 2 f_1 \Delta f_1 + 2|\operatorname{grad} f_1|^2$.

Sendo M compacta temos, novamente por Stokes, que $\int_M \Delta f_1^2 dV_g = 0$ e, portanto,

$$\int_M f_1 \Delta f_1 dV_g = -\int_M |\operatorname{grad} f_1|^2 dV_g. \tag{3.2}$$

Segue de (3.1) e (3.2) que

$$-\lambda_1 \int_M f_1^2 dV_g = -\int_M |\operatorname{grad} f_1|^2 dV_g.$$

Logo,

$$\lambda_1 = \frac{\int_M |\operatorname{grad} f_1|^2 dV_g}{\int_M f_1^2 dV_g}.$$

Proposição 3.1.3. *O primeiro autovalor do Laplaciano, λ_1, satisfaz a seguinte condição*

$$\lambda_1 = inf \left\{ \frac{\int_M |\operatorname{grad} f|^2 dV_g}{\int_M f^2 dV_g}; f \neq 0 \ e \int_M f dV_g = 0 \right\}.$$

Segue da proposição acima a chamada Desigualdade de Poincaré:

$$\int_M |\operatorname{grad} f|^2 dV_g \ \geq \ \lambda_1 \int_M f^2 dV_g, \tag{3.3}$$

onde $f \neq 0$ e $\int_M f dV_g = 0$.

Observação 3.1.4. *A desigualdade acima será utilizada na demonstração do Teorema Principal.*

3.2 Tensor de Weyl Harmônico e Fórmula de Weitzenböck

Nesta seção, considerando M^4 uma variedade Riemanniana orientada de dimensão 4, definiremos tensor de Weyl harmônico e enunciaremos alguns resultados envolvendo esse tipo de tensor.

Definição 3.2.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e V^* o espaço dual de V, isto é, $V^* = \{f : V \to \mathbb{R}\}$ o espaço dos funcionais lineares de valores reais em V. Um tensor do tipo (k, l) é uma aplicação multilinear*

$$F : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{l \ cópias} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k \ cópias} \to \mathbb{R}.$$

Definição 3.2.2. *Um tensor do tipo* $(0,4)$*, ou um* $(0,4)$ *- tensor, é uma aplicação multilinear*

$$F : V^* \times V^* \times V^* \times V^* \to \mathbb{R}.$$

Em particular, o tensor de Weyl de M^4*, em* x*, é uma aplicação multilinear*

$$\begin{aligned} W = W_x : \Lambda_x^2 \times \Lambda_x^2 \times \Lambda_x^2 \times \Lambda_x^2 &\to \mathbb{R} \\ (X, Y, Z, W) &\mapsto \langle W(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle \ , \end{aligned}$$

onde $\Lambda_x^2 = \Lambda^2(T_xM^4)$ *é o espaço dual de* T_xM^4*.*

Definição 3.2.3. *A divergência formal* δ *para qualquer* $(0,4)$ *- tensor* T *é dada por*

$$\delta T(X_1, X_2, X_3) = -traço_g\{(Y, Z) \mapsto \nabla_Y T(Z, X_1, X_2, X_3)\},$$

onde g *é a métrica de* M^4

Definição 3.2.4. *O tensor de Weyl de* M^4 *é dito harmônico se* $\delta W = 0$*.*

Pela Proposição 2.1.3, sobre toda variedade conformemente plana temos que $W \equiv 0$. Logo, $\delta W = 0$. Em particular, $\mathbb{S}^4$ tem $W \equiv 0$.

Toda variedade de Einstein orientada tem tensor de Weyl harmônico, pois como consequência da expressão (2), em [7], temos, em dimensão 4,

$$\delta W \ = \ -\frac{1}{2}\, d\left(Ric - \frac{s}{6}g\right) = -\frac{1}{2}\, d\left(\lambda g - \frac{s}{6}g\right) = -\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{s}{6}\right) dg = 0,$$

já que λ e s são constantes e $dg = 0$.

Como $W = W^+ \oplus W^-$ e, pela Definição 3.2.4, temos que W é harmônico se, e somente se, $W^\pm$ são harmônicos.

Agora, conhecendo o Laplaciano e o tensor de Weyl, podemos enunciar a Fórmula de Weitzenböck (conforme 16.73 em [1]).

Proposição 3.2.5. *Seja* M^4 *compacta. Se o tensor de Weyl de* M^4 *é harmônico, então a Fórmula de Weitzenböck para* $W^\pm$ *é dada por*

$$\frac{1}{2}\Delta|W^\pm|^2 + |\nabla W^\pm|^2 + \frac{s}{2}|W^\pm|^2 - 18 \det W^\pm = 0,$$

onde $\det W^\pm = w_1^\pm w_2^\pm w_3^\pm$*.*

A seguinte Proposição foi apresentada por Derdzinski em [8].

Proposição 3.2.6. *Seja* (M^4, g) *uma variedade Riemanniana de dimensão* 4*, com tensor de Weyl harmônico. Em um ponto* p*, com* $Ric(p) \neq \dfrac{1}{4}s(p).g$*,* $W^+(p)$ *e* $W^-(p)$ *tem igual espectro, incluindo multiplicidades.*

3.3 Desigualdade de Kato

Nesta seção enunciaremos a desigualdade de Kato, que também tem como hipótese o tensor de Weyl harmônico. Antes de enunciar a desigualdade de Kato refinada, mostraremos o seguinte lema, que é a desigualdade de Kato para funções diferenciáveis de valores reais.

Lema 3.3.1. *Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $|\operatorname{grad} u| \neq 0$, então*

$$|\operatorname{grad}|\operatorname{grad} u||^2 \;\leq\; \operatorname{tr}\left[(\operatorname{Hess} u)^2\right].$$

Prova. Sabemos que

$$|\operatorname{grad} u|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\operatorname{grad} u|^2\right) \;=\; 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Derivando o 1º membro, obtemos

$$2|\operatorname{grad} u|\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}|\operatorname{grad} u| \;=\; 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Isto nos diz que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}|\operatorname{grad} u| \;=\; \frac{1}{|\operatorname{grad} u|}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|\operatorname{grad}|\operatorname{grad} u||^2 \;&=\; \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{|\operatorname{grad} u|}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right]^2 \\
&\leq\; \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{|\operatorname{grad} u|^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2\right] \\
&=\; \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{|\operatorname{grad} u|^2}\cdot|\operatorname{grad} u|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2\right] \\
&=\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 \;=\; \operatorname{tr}\left[(\operatorname{Hess} u)^2\right], \text{ como queríamos demonstrar.}
\end{aligned}$$

■

Em [9], LeBrun e Gursky provaram uma desigualdade de Kato refinada. Mais precisamente, eles mostraram o seguinte resultado.

Proposição 3.3.2 (Desigualdade de Kato)**.** *Se* $W^{\pm}$ *são harmônicos, então no conjunto* $P = \{p \in M^4; |W^{\pm}(p)| \neq 0\}$ *temos*

$$|\operatorname{grad}|W^{\pm}|| \leq \sqrt{\frac{3}{5}}|\nabla W^{\pm}| \quad \textit{ou} \quad |d|W^{\pm}|| \leq \sqrt{\frac{3}{5}}|\nabla W^{\pm}|;$$

respectivamente.

Capítulo 4

Variedades de Einstein de Dimensão 4

No capítulo 1, já vimos que (M^n, g), $n > 2$, é uma variedade de Einstein se, e somente se, o tensor de Ricci é um múltiplo da métrica, isto é, $Ric = \lambda g$, onde λ é uma constante.

Neste capítulo, destacaremos alguns resultados envolvendo variedades de Einstein, de dimensão 4. Os exemplos mais simples de variedades de Einstein compactas, de dimensão 4, são: a esfera $\mathbb{S}^4_c$ orientável, com $Ric_p = 3c > 0$ e $K = c > 0$; o espaço projetivo real $\mathbb{RP}^4$, não orientável, com $Ric_p = 3c > 0$ e $K = c > 0$; o espaço complexo projetivo $\mathbb{CP}^2$, com curvatura de Ricci constante positiva e o produto de duas esferas $\mathbb{S}^2_c \times \mathbb{S}^2_c$ orientável, com $Ric_p = c > 0$ e $K \geq 0$. Os exemplos mais simples de variedades de Einstein não compactas orientáveis, de dimensão 4, são: o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^4_c$, com $Ric_P = 3c < 0$ e $K = c < 0$ e o produto de dois espaços hiperbólicos $\mathbb{H}^2_c \times \mathbb{H}^2_c$, com $Ric_p = 2c > 0$ e $K \leq 0$.

O próximo resultado pode ser encontrado em [5].

Proposição 4.0.3. *Seja M^4 uma variedade Riemanniana orientada, de dimensão 4. M^4 é uma variedade de Einstein se, e somente se, $K(P) = K(P^\perp)$, para cada $x \in M^4$ e para todo 2 - plano $P \subset T_xM^4$.*

Prova. Seja M^4 uma variedade de Einstein. Sejam $x \in M^4$ e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base ortonormal orientada de T_xM^4. Seja $P = [e_1, e_2]$ o 2 - plano gerado por e_1 e e_2 e denote por $P^\perp = [e_3, e_4]$ o 2 - plano ortogonal à P.

Como M^4 é uma variedade de Einstein, consideremos λ a curvatura de Ricci de M^4. Assim, temos que as curvaturas de Ricci nas direções de e_1 e e_3, respectivamente, são dadas por

$$\lambda = K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3) + K(e_1, e_4),$$

$$\lambda = K(e_3, e_1) + K(e_3, e_2) + K(e_3, e_4).$$

Subtraindo essas duas equações e sabendo que $K(e_1, e_3) = K(e_3, e_1)$, temos

$$0 = K(e_1, e_2) + K(e_1, e_4) - K(e_3, e_2) - K(e_3, e_4). \tag{4.1}$$

Novamente, as curvaturas de Ricci nas direções de e_2 e e_4, respectivamente, são dadas por

$$\lambda = K(e_2, e_1) + K(e_2, e_3) + K(e_2, e_4),$$

$$\lambda = K(e_4, e_1) + K(e_4, e_2) + K(e_4, e_3).$$

Subtraindo essas duas equações e sabendo que $K(e_2, e_4) = K(e_4, e_2)$, temos

$$0 = K(e_2, e_1) + K(e_2, e_3) - K(e_4, e_1) - K(e_4, e_3). \tag{4.2}$$

Somando (4.1) e (4.2) e sabendo que $K(e_2, e_3) = K(e_3, e_2)$ e $K(e_4, e_1) = K(e_1, e_4)$, obtemos

$$0 = 2K(e_1, e_2) - 2K(e_3, e_4) \;\Rightarrow\; K(e_1, e_2) = K(e_3, e_4).$$

Portanto, como x é arbitrário, deduzimos que $K(P) = K(P^{\perp})$, para cada $x \in M^4$ e para todo 2 - plano P de T_xM^4.

Reciprocamente, suponhamos $K(P) = K(P^{\perp})$, para todo 2 - plano P de T_xM^4 e para cada $x \in M^4$. Sejam $x \in M^4$ e $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ uma base ortonormal de T_xM^4. Então, temos que

$$Ric(X_j, X_j) = \sum_{i=2}^{n} \langle R(X_j, X_i)X_j, X_i\rangle = \sum_{i=2}^{n} \left(-\langle R(X_j, X_i)X_i, X_j\rangle\right).$$

Ou seja,

$$-Ric(X_j, X_j) = \sum_{i=2}^{n} \langle R(X_j, X_i)X_i, X_j\rangle.$$

Em particular, obtemos que

$$\begin{aligned}
-Ric(X_1, X_1) &= \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1\rangle + \langle R(X_1, X_3)X_3, X_1\rangle + \langle R(X_1, X_4)X_4, X_1\rangle \\
&= K_{12} + K_{13} + K_{14};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-Ric(X_2, X_2) &= \langle R(X_2, X_1)X_1, X_2\rangle + \langle R(X_2, X_3)X_3, X_2\rangle + \langle R(X_2, X_4)X_4, X_2\rangle \\
&= K_{12} + K_{23} + K_{24};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-Ric(X_3, X_3) &= \langle R(X_3, X_1)X_1, X_3\rangle + \langle R(X_3, X_2)X_2, X_3\rangle + \langle R(X_3, X_4)X_4, X_3\rangle \\
&= K_{13} + K_{23} + K_{34};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-Ric(X_4, X_4) &= \langle R(X_4, X_1)X_1, X_4\rangle + \langle R(X_4, X_2)X_2, X_4\rangle + \langle R(X_4, X_3)X_3, X_4\rangle \\
&= K_{14} + K_{24} + K_{34}.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $K(P) = K(P^{\perp})$, para cada $x \in M^4$ e para qualquer 2 - plano P de T_xM^4, temos

$$K_{12} = K_{34} \quad K_{13} = K_{24} \quad K_{14} = K_{23}. \tag{4.3}$$

Seja

$$-Ric(X_1, X_1) = K_{12} + K_{13} + K_{14} = \lambda(x),$$

para cada $x \in M^4$.

Como $\langle X_1, X_1 \rangle = |X_1|^2 = 1$, segue que

$$-Ric(X_1, X_1) = \lambda(x) = \lambda(x)\langle X_1, X_1 \rangle.$$

Sabendo que, $\langle X_j, X_j \rangle = |X_j|^2 = 1$, podemos usar (4.3) para concluir que

$$-Ric(X_2, X_2) = K_{12} + K_{23} + K_{24} = K_{12} + K_{14} + K_{13} = \lambda(x) = \lambda(x)\langle X_2, X_2 \rangle;$$

$$-Ric(X_3, X_3) = K_{13} + K_{23} + K_{34} = K_{13} + K_{14} + K_{12} = \lambda(x) = \lambda(x)\langle X_3, X_3 \rangle;$$

$$-Ric(X_4, X_4) = K_{14} + K_{24} + K_{34} = K_{14} + K_{13} + K_{12} = \lambda(x) = \lambda(x)\langle X_4, X_4 \rangle.$$

Logo, $Ric(X_j, X_j) = \lambda(x)\langle X_j, X_j \rangle$, para qualquer X_j, e, portanto, pela Definição 1.1.15, temos que M^4 é uma variedade de Einstein, o que finaliza a prova da proposição.

■

No teorema seguinte, cuja demonstração encontra-se em [1], Hitchin classificou as variedades de Einstein compactas, semiconformemente planas, com curvatura escalar não negativa.

Teorema 4.0.4 (Hitchin)**.** *Seja M^4 uma variedade de Einstein compacta, orientada, semiconformemente plana, de dimensão 4. Então, se $s > 0$, M^4 é isométrica a $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{CP}^2$, com suas métricas canônicas.*

Capítulo 5

Variedades de Dimensão 4 com Curvatura Biortogonal Positiva

Nesse capítulo, demonstraremos o Teorema Principal. Inicialmente, citaremos alguns exemplos de variedades de dimensão 4, com curvatura biortogonal positiva.

- $\mathbb{CP}^2$, $K_1^\perp = \dfrac{s}{24} > 0$, onde s é a curvatura escalar de $\mathbb{CP}^2$;
- $\mathbb{S}_c^4$, $K^\perp = c > 0$;
- $\mathbb{S}_c^2 \times \mathbb{S}_c^2$, $0 \leq K^\perp \leq c$;
- $\mathbb{RP}_c^4$, $K^\perp = c > 0$;
- Variedade conformemente plana, com curvatura escalar positiva s. Isso decorre do fato de que $K_1^\perp = \dfrac{s}{12}$.

Teorema 5.0.5 (Teorema Principal)**.** *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana compacta, orientada, de dimensão 4, com tensor de Weyl harmônico e curvatura escalar positiva s. Se a métrica g é analítica e*

$$K_1^\perp \geq \frac{s^2}{8(3s + 5\lambda_1)},$$

onde λ_1 representa o primeiro autovalor do Laplaciano com respeito a g, então

1. *M^4 é conformemente plana, ou*
2. *M^4 é isométrica ao espaço complexo projetivo $\mathbb{CP}^2$ com sua métrica canônica.*

Observação 5.0.6. *As variedades conformemente planas satisfazem a hipótese*

$$K_1^\perp = \frac{s}{12} \geq \frac{s^2}{8(3s + 5\lambda_1)}$$

do teorema acima, e o mesmo vale para o $\mathbb{CP}^2$ pois, nessa variedade, temos

$$K_1^{\perp} = \frac{s}{24} \geq \frac{s^2}{8(3s+5\lambda_1)}.$$

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema Principal, provaremos alguns Lemas auxiliares.

Lema 5.0.7. *O valor máximo da função $f(x,y,z) = xyz$, sujeita às condições $x+y+z=0$ e $x^2+y^2+z^2=1$, é $\dfrac{1}{\sqrt{54}}$.*

Prova. Considere $g(x,y,z) = x+y+z$ e $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, temos

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z) + \mu \operatorname{grad} h(x,y,z).$$

Logo, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz = \lambda + 2\mu x \\ xz = \lambda + 2\mu y \\ xy = \lambda + 2\mu z. \end{cases} \tag{5.1}$$

Além disso, temos

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1. \end{cases} \tag{5.2}$$

Multiplicando as equações em (5.1) por x, y e z, respectivamente, temos

$$\begin{cases} xyz = \lambda x + 2\mu x^2 \\ xyz = \lambda y + 2\mu y^2 \\ xyz = \lambda z + 2\mu z^2. \end{cases}$$

Somando as três equações acima, temos

$$3xyz = \lambda(x+y+z) + 2\mu(x^2+y^2+z^2). \tag{5.3}$$

Substituindo (5.2) em (5.3), encontramos

$$3xyz = 2\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{3xyz}{2}.$$

Agora, substituindo o valor de μ em (5.1), obtemos

$$\begin{cases} yz = \lambda + 3x^2yz & (i) \\ xz = \lambda + 3xy^2z & (ii) \\ xy = \lambda + 3xyz^2 & (iii) \end{cases}$$

Fazendo $(i)-(ii)$, temos

$$\begin{aligned} & yz - xz = 3xyz(x-y) \\ \Rightarrow\ & z(y-x) - 3xyz(x-y) = 0 \\ \Rightarrow\ & z(y-x) + 3xyz(y-x) = 0 \\ \Rightarrow\ & (y-x)(z+3xyz) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$y - x = 0 \quad \text{ou} \quad z + 3xyz = 0.$$

Vamos analisar os dois casos acima.

Caso 1: $y - x = 0$.

Se $y - x = 0$, temos $y = x$.

Então, fazendo $y = x$ em $x + y + z = 0$, obtemos $z = -2x$.

Substituindo essas igualdades em $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, temos

$$x^2 + x^2 + (-2x^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Portanto,

$$y = x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \quad \text{e} \quad z = -2x = \mp\frac{2\sqrt{6}}{6} = \mp\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Neste caso, $f(x,y,z) = \left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(\mp\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \pm\frac{6\sqrt{6}}{6\cdot 18} = \pm\frac{\sqrt{6}}{18} = \pm\frac{1}{\sqrt{54}}$.

Caso 2: $z + 3xyz = 0$.

Se $z + 3xyz = 0$, temos $z(1 + 3xy) = 0$, ou seja, $z = 0$ ou $3xy + 1 = 0$.

Se $z = 0$, temos $f(x,y,z) = 0$ e, como no caso 1 já encontramos um valor positivo para f, 0 não é valor máximo.

Se $3xy + 1 = 0$, temos $xy = -\frac{1}{3}$. Assim, $f(x,y,z) = -\frac{1}{3}z$ e isto implica que grad $f(x,y,z) = (0,0,-\frac{1}{3}) \neq (0,0,0)$. Logo, f não possui pontos críticos nesse caso.

Portanto, tendo analisado os casos 1 e 2, podemos concluir que o valor máximo de $f(x,y,z)$ é $\frac{1}{\sqrt{54}}$.

■

Lema 5.0.8. *Se $w_1^{\pm} \leq w_2^{\pm} \leq w_3^{\pm}$ são os autovalores dos tensores $W^{\pm}$, respectivamente, então*

$$|W^{\pm}|^2 \;\leq\; 6(w_1^{\pm})^2.$$

Prova. Sejam $w_1^{\pm} \leq w_2^{\pm} \leq w_3^{\pm}$ os autovalores de $W^{\pm}$, respectivamente. Já sabemos que esses autovalores satisfazem a equação

$$w_1^{\pm} + w_2^{\pm} + w_3^{\pm} = 0.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
& -w_1^{\pm} = w_2^{\pm} + w_3^{\pm} \\
\Rightarrow\ & (-w_1^{\pm})^2 = (w_2^{\pm} + w_3^{\pm})^2 \\
\Rightarrow\ & (w_1^{\pm})^2 = (w_2^{\pm})^2 + 2w_2^{\pm}w_3^{\pm} + (w_3^{\pm})^2 \\
\Rightarrow\ & (w_1^{\pm})^2 - 2w_2^{\pm}w_3^{\pm} = (w_2^{\pm})^2 + (w_3^{\pm})^2.
\end{aligned}$$

Somando a equação acima com $(w_1^{\pm})^2$, obtemos

$$2(w_1^{\pm})^2 - 2w_2^{\pm}w_3^{\pm} = (w_1^{\pm})^2 + (w_2^{\pm})^2 + (w_3^{\pm})^2.$$

Sabemos que $|W^{\pm}|^2 = (w_1^{\pm})^2 + (w_2^{\pm})^2 + (w_3^{\pm})^2$. Logo,

$$|W^{\pm}|^2 = 2(w_1^{\pm})^2 - 2w_2^{\pm}w_3^{\pm}.$$

Como $w_1^{\pm} \leq w_2^{\pm} \leq w_3^{\pm}$ e $w_1^{\pm} + w_2^{\pm} + w_3^{\pm} = 0$, devemos ter $w_1^{\pm} \leq 0$ e $w_3^{\pm} \geq 0$. Sendo assim, se $w_2^{\pm} \leq 0$, temos $w_2^{\pm}w_3^{\pm} \leq 0$, logo $-2w_2^{\pm}w_3^{\pm} \geq 0$.

Assim, obtemos

$|W^{\pm}|^2 \ = \ 2(w_1^{\pm})^2 - 2w_2^{\pm}w_3^{\pm} \ \leq \ 2(w_1^{\pm})^2 \ \leq \ 6(w_1^{\pm})^2.$

Por outro lado, como $w_1^{\pm} \leq w_2^{\pm}$, temos

$$-w_2^{\pm} \leq -w_1^{\pm}. \tag{5.4}$$

De $w_1^{\pm} + w_2^{\pm} + w_3^{\pm} = 0$, também temos

$$w_3^{\pm} = -w_1^{\pm} - w_2^{\pm}. \tag{5.5}$$

Segue de (5.4) e (5.5) que

$$w_3^{\pm} = -w_1^{\pm} - w_2^{\pm} \ \leq \ -w_1^{\pm} - w_1^{\pm} \ = \ -2w_1^{\pm}. \tag{5.6}$$

E, por (5.4) e (5.6), segue que

$$-2w_2^{\pm}w_3^{\pm} \ \leq \ -2w_1^{\pm}w_3^{\pm} \ \leq \ -2w_1^{\pm}(-2w_1^{\pm}) \ = \ 4(w_1^{\pm})^2.$$

Aplicando esta desigualdade em $|W^{\pm}|^2 \ = \ 2(w_1^{\pm})^2 - 2w_2^{\pm}w_3^{\pm}$, temos

$$|W^{\pm}|^2 \ = \ 2(w_1^{\pm})^2 - 2w_2^{\pm}w_3^{\pm} \ \leq \ 2(w_1^{\pm})^2 + 4(w_1^{\pm})^2 \ = \ 6(w_1^{\pm})^2.$$

Assim, em todos os casos, temos $|W^{\pm}|^2 \ \leq \ 6(w_1^{\pm})^2$, como queríamos concluir.

■

Lema 5.0.9. *Se M^4 é uma variedade Riemanniana orientada, de dimensão 4, com curvatura escalar positiva s, então:*

$$|W^+| + |W^-| \ \leq \ \sqrt{6}\left(\frac{s}{6} - 2K_1^{\perp}\right). \tag{5.7}$$

Prova. Sejam $w_1^{\pm}$ autovalores de $W^{\pm}$. Pela equação (2.6), temos

$$K_1^{\perp} - \frac{s}{12} = \frac{w_1^+ + w_1^-}{2} \quad \text{se, e somente se,} \quad w_1^+ + w_1^- = 2K_1^{\perp} - \frac{s}{6}.$$

Assim, pelo Lema 5.0.8 e pela definição, obtemos

$$|W^+| + |W^-| \ \leq \ \pm\sqrt{6}\left(w_1^+ + w_1^-\right) = -\sqrt{6}\left(2K_1^{\perp} - \frac{s}{6}\right),$$

pois $w_1^+ + w_1^- < 0$ e $|W^+| + |W^-| > 0$.

Logo,

$$|W^+| + |W^-| \ \leq \ \sqrt{6}\left(\frac{s}{6} - 2K_1^{\perp}\right).$$

■

Lema 5.0.10. *Se* $K_1^{\perp} \geq \dfrac{s^2}{8(3s + 5\lambda_1)}$ *e* $a = \dfrac{5}{6}\lambda_1 + \dfrac{s}{2}$, *então*

$$\sqrt{6}\left(\frac{s}{6} - 2K_1^{\perp}\right) \ \leq \ \frac{4a^2 - \frac{25}{9}\lambda_1^2}{4\sqrt{6}a}. \tag{5.8}$$

Prova. Seja $K_1^{\perp} \geq \dfrac{s^2}{8(3s + 5\lambda_1)}$. Multiplicando essa desigualdade por -2, temos

$$-2K_1^{\perp} \ \leq \ \frac{-2s^2}{8(3s + 5\lambda_1)} \ = \ \frac{-s^2}{4(3s + 5\lambda_1)}.$$

Somando $\dfrac{s}{6}$ a esta desigualdade, obtemos

$$\frac{s}{6} - 2K_1^{\perp} \ \leq \ \frac{s}{6} - \frac{s^2}{4(3s + 5\lambda_1)}.$$

Agora, multiplicando por $\sqrt{6}$, temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{6}\left(\frac{s}{6} - 2K_1^{\perp}\right) \ &\leq \ \sqrt{6}\left(\frac{s}{6} - \frac{s^2}{4(3s + 5\lambda_1)}\right) \\
&= \ \sqrt{6}\left(\frac{2s(3s + 5\lambda_1) - 3s^2}{12(3s + 5\lambda_1)}\right) \\
&= \ \sqrt{6}\left(\frac{6s^2 + 10s\lambda_1 - 3s^2}{12(3s + 5\lambda_1)}\right) \\
&= \ \sqrt{6}\left(\frac{3s^2 + 10s\lambda_1}{12(3s + 5\lambda_1)}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{6}\left(\frac{s}{6} - 2K_1^{\perp}\right) \leq \sqrt{6}\left(\frac{3s^2 + 10s\lambda_1}{12(3s + 5\lambda_1)}\right).$$

Como $a = \dfrac{5}{6}\lambda_1 + \dfrac{s}{2}$, temos $s = \dfrac{6a - 5\lambda_1}{3}$. Substituindo s na desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{6}\left(\frac{s}{6} - 2K_1^{\perp}\right) &\leq \sqrt{6}\left(\frac{3s^2 + 10s\lambda_1}{12(3s + 5\lambda_1)}\right) \\
&= \sqrt{6}\left[\frac{3\left(\dfrac{6a - 5\lambda_1}{3}\right)^2 + 10\left(\dfrac{6a - 5\lambda_1}{3}\right)\lambda_1}{12(6a - 5\lambda_1 + 5\lambda_1)}\right] \\
&= \sqrt{6}\left(\frac{\dfrac{36a^2 - 25\lambda_1^2}{3}}{12(6a)}\right) = (\sqrt{6})^2\left(\frac{\dfrac{36a^2 - 25\lambda_1^2}{3}}{12\sqrt{6}(6a)}\right) \\
&= \frac{36a^2 - 25\lambda_1^2}{36\sqrt{6}a} = \frac{4a^2 - \dfrac{25}{9}\lambda_1^2}{4\sqrt{6}a}, \quad \text{como queríamos.}
\end{aligned}$$

■

5.1 Demonstração do Teorema Principal

Nesta seção, demonstraremos o Teorema Principal.

Demonstração. Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana compacta, orientada, de dimensão 4, com tensor de Weyl harmônico. Logo, a fórmula de Weitzenböck para W^+ e W^- nos diz que

$$\frac{1}{2}\Delta|W^{\pm}|^2 + |\nabla W^{\pm}|^2 + \frac{s}{2}|W^{\pm}|^2 - 18\det W^{\pm} = 0. \tag{5.9}$$

Além disso, considere $|W^{\pm}| \neq 0$ e $w_1^{\pm} \leq w_2^{\pm} \leq w_3^{\pm}$ os autovalores de $W^{\pm}$, respectivamente. Sejam

$$x^{\pm} = \frac{w_1^{\pm}}{|W^{\pm}|},\ y^{\pm} = \frac{w_2^{\pm}}{|W^{\pm}|} \text{ e } z^{\pm} = \frac{w_3^{\pm}}{|W^{\pm}|}, \text{ respectivamente.}$$

Como $\operatorname{tr} W^{\pm} = \sum_{i=1}^{3} w_i^{\pm} = 0$, temos que $x^{\pm} + y^{\pm} + z^{\pm} = 0$. Também temos que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pois $|W^{\pm}|^2 = \sum_{i=1}^{3}(w_i^{\pm})^2$. Logo, x, y e z satisfazem as hipóteses do Lema 5.0.7. Portanto,

$$x^{\pm} \cdot y^{\pm} \cdot z^{\pm} \leq \frac{1}{\sqrt{54}} \Rightarrow \frac{w_1^{\pm}}{|W^{\pm}|} \cdot \frac{w_2^{\pm}}{|W^{\pm}|} \cdot \frac{w_3^{\pm}}{|W^{\pm}|} \leq \frac{1}{\sqrt{54}} = \frac{\sqrt{6}}{18}.$$

Como $\det W^{\pm} = w_1^{\pm} \cdot w_2^{\pm} \cdot w_3^{\pm}$, segue que

$$\det W^{\pm} \;\leq\; \frac{\sqrt{6}}{18}|W^{\pm}|^3. \tag{5.10}$$

Como a métrica g é analítica, temos que $|W^{\pm}|^2$ são analíticas, pois função diferenciável em variedade de métrica analítica é analítica. Como os zeros de função analítica em compactos são finitos, temos que o conjunto

$$\Sigma = \{p \in M^4; |W^+|(p) = 0 \text{ ou } |W^-|(p) = 0\}$$

é finito, desde que $W^{\pm} \not\equiv 0$.

A ideia principal da demonstração é provar que $W^- = 0$ ou $W^+ = 0$, ou seja, que a variedade é semiconformemente plana e, em seguida, usar o Teorema de Hitchin. Vamos então supor, por contradição, que (M^4, g) não é semi-conformemente plana. Logo,

$$|W^+| \not\equiv 0 \quad \text{e} \quad |W^-| \not\equiv 0.$$

Então

$$\int_M |W^+| dV_g \;>\; 0 \quad \text{e} \quad \int_M |W^-| dV_g \;>\; 0.$$

Seja

$$t \;=\; \frac{\int\limits_M |W^+| dV_g}{\int\limits_M |W^-| dV_g} \;>\; 0 \quad \text{tal que}$$

$$\int_M (|W^+| - t|W^-|) dV_g \;=\; 0.$$

Considerando a expressão (5.9) para W^- multiplicada por t^2, temos

$$\frac{t^2}{2}\Delta|W^-|^2 + t^2|\nabla W^-|^2 + \frac{s}{2}t^2|W^-|^2 - 18t^2 \det W^- = 0. \tag{5.11}$$

A fórmula de Weitzenböck para W^+ é dada por

$$\frac{1}{2}\Delta|W^+|^2 + |\nabla W^+|^2 + \frac{s}{2}|W^+|^2 - 18 \det W^+ = 0. \tag{5.12}$$

Somando as equações (5.11) e (5.12), obtemos

$$\left(\frac{t^2}{2}\Delta|W^-|^2 + \frac{1}{2}\Delta|W^+|^2\right) + \left(|\nabla W^+|^2 + t^2|\nabla W^-|^2\right) +$$
$$+\frac{s}{2}\left(|W^+|^2 + t^2|W^-|^2\right) - 18\left(\det W^+ + t^2 \det W^-\right) = 0.$$

Calculando a integral sobre M na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \int_M \Delta\left(\frac{t^2}{2}|W^-|^2 + \frac{1}{2}|W^+|^2\right) dV_g \;+\; \int_M \left(|\nabla W^+|^2 + t^2|\nabla W^-|^2\right) dV_g \\ & + \int_M \frac{s}{2}\left(|W^+|^2 + t^2|W^-|^2\right) dV_g - \int_M 18\left(\det W^+ + t^2 \det W^-\right) dV_g. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_M \Delta\left(\frac{t^2}{2}|W^-|^2 + \frac{1}{2}|W^+|^2\right) dV_g \;=\; 0.$$

Logo,

$$\int_M \left(|\nabla W^+|^2 + t^2|\nabla W^-|^2\right) dV_g + \int_M \frac{s}{2}\left(|W^+|^2 + t^2|W^-|^2\right) dV_g -$$
$$-\int_M 18\left(\det W^+ + t^2 \det W^-\right) dV_g = 0 \tag{5.13}$$

Como W é harmônico, $W^{\pm}$ também são harmônicos, logo, pela desigualdade de Kato, dada na Proposição 3.3.2, é válido que

$$|d|W^+|| \;\leq \sqrt{\frac{3}{5}}|\nabla W^+| \;\Rightarrow\; |d|W^+||^2 \;\leq \frac{3}{5}|\nabla W^+|^2 \;\Rightarrow\; \frac{5}{3}|d|W^+||^2 \;\leq\; |\nabla W^+|^2$$

Logo,

$$\int_M \frac{5}{3}|d|W^+||^2 dV_g \;\leq\; \int_M |\nabla W^+|^2 dV_g. \tag{5.14}$$

De forma análoga, usando a desigualdade de Kato para W^- multiplicada por t^2, obtemos

$$\int_M \frac{5}{3}t^2|d|W^-||^2 dV_g \;\leq\; \int_M t^2|\nabla W^-|^2 dV_g. \tag{5.15}$$

Somando (5.14) e (5.15), temos

$$\frac{5}{3}\int_M \left(|d|W^+||^2 + t^2|d|W^-||^2\right) dV_g \;\leq\; \int_M \left(|\nabla W^+|^2 + t^2|\nabla W^-|^2\right) dV_g. \tag{5.16}$$

Por outro lado, pela desigualdade dada em (5.10), temos para W^+

$$\int_M -18 \det W^+ dV_g \;\geq\; \int_M -\sqrt{6}|W^+|^3 dV_g. \tag{5.17}$$

Analogamente, temos para W^-,

$$\int_M -18t^2 \det W^- dV_g \;\geq\; \int_M -\sqrt{6}t^2|W^-|^3 dV_g. \tag{5.18}$$

Somando (5.17) e (5.18),

$$\int_M -\sqrt{6}\left(|W^+|^3 + t^2|W^-|^3\right) dV_g \;\leq\; \int_M -18\left(\det W^+ + t^2 \det W^-\right) dV_g. \tag{5.19}$$

Logo, aplicando (5.16) e (5.19) em (5.13), temos

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}\int_M \left(|d|W^+||^2 + t^2|d|W^-||^2\right) \quad &+ \quad \int_M \frac{s}{2}\left(|W^+|^2 + t^2|W^-|^2\right) dV_g \\ -\sqrt{6}\int_M \left(|W^+|^3 + t^2|W^-|^3\right) dV_g \;\; &\leq \;\; \int_M \left(|\nabla W^+|^2 + t^2|\nabla W^-|^2\right) dV_g \\ + \int_M \frac{s}{2}\left(|W^+|^2 + t^2|W^-|^2\right) dV_g \;\; &- \;\; \int_M 18\left(\det W^+ + t^2 \det W^-\right) dV_g = 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Por outro lado, observamos que

$$
\begin{aligned}
&\left(|d(|W^+|-t|W^-|)|^2+|d(|W^+|+t|W^-|)|^2\right)=\left(|d|W^+||-t|d|W^-||\right)^2+\left(|d|W^+||+t|d|W^-||\right)^2\\
=&\ \ |d|W^+||^2-2t|d|W^+||\cdot|d|W^-||+t^2|d|W^-||^2+|d|W^+||^2+2t|d|W^+||\cdot|d|W^-||+t^2|d|W^-||^2\\
=&\ \ 2\left(|d|W^+||^2\ +\ t^2|d|W^-||^2\right).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left(|d|W^+||^2\ +\ t^2|d|W^-||^2\right) &= \frac{1}{2}\left(|d(|W^+|-t|W^-|)|^2+|d(|W^+|+t|W^-|)|^2\right)\\
&\geq \frac{1}{2}|d(|W^+|-t|W^-|)|^2. \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

Além disso, fazendo $f=|W^+|-t|W^-|$ na desigualdade de Poincaré, dada por (3.3), e multiplicando a mesma por $\frac{1}{2}$, temos

$$
\frac{1}{2}\int_M |d(|W^+|-t|W^-|)|^2 dV_g\ \geq\ \frac{\lambda_1}{2}\int_M \left(|W^+|-t|W^-|\right)^2 dV_g. \qquad (5.22)
$$

Segue de (5.21) e (5.22) que

$$
\int_M \left(|d|W^+||^2\ +\ t^2|d|W^-||^2\right) dV_g\ \geq\ \frac{\lambda_1}{2}\int_M \left(|W^+|-t|W^-|\right)^2 dV_g. \qquad (5.23)
$$

Portanto, comparando (5.23) com (5.20), obtemos

$$
\begin{aligned}
0\ \geq\ & \frac{5}{6}\lambda_1\int_M \left(|W^+|-t|W^-|\right)^2 dV_g+\int_M \frac{s}{2}\left(|W^+|^2+t^2|W^-|^2\right) dV_g\\
& -\sqrt{6}\int_M \left(|W^+|^3+t^2|W^-|^3\right) dV_g.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
0\ \geq\ & \frac{5}{6}\lambda_1\int_M \left(|W^+|^2-2t|W^+||W^-|+t^2|W^-|^2\right) dV_g+\int_M \frac{s}{2}\left(|W^+|^2+t^2|W^-|^2\right) dV_g\\
& -\sqrt{6}\int_M \left(|W^+|^3+t^2|W^-|^3\right) dV_g.
\end{aligned}
$$

A desigualdade acima pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
0\ \geq\ & \int_M \Bigg[|W^-|^2\left(\frac{5}{6}\lambda_1+\frac{s}{2}-\sqrt{6}|W^-|\right)t^2-\left(\frac{5}{3}\lambda_1|W^+||W^-|\right)t\\
& +|W^+|^2\left(\frac{5}{6}\lambda_1+\frac{s}{2}-\sqrt{6}|W^+|\right)\Bigg] dV_g. \qquad (5.24)
\end{aligned}
$$

Fazendo $\frac{5}{6}\lambda_1+\frac{s}{2}=a$, nós podemos escrever o integrando acima como

$$
P(t)=|W^-|^2\left(a-\sqrt{6}|W^-|\right)t^2-\frac{5}{3}\lambda_1|W^+||W^-|t+|W^+|^2\left(a-\sqrt{6}|W^+|\right).
$$

Por (5.24), temos que $0 \geq \int_M P(t)dV_g$. Observe que $P(t)$ é um polinômio de grau 2 em t e seu discriminante Δ é dado por

$$\Delta = \frac{25}{9}\lambda_1^2|W^+|^2|W^-|^2 - 4|W^+|^2|W^-|^2\left(a - \sqrt{6}|W^+|\right)\left(a - \sqrt{6}|W^-|\right).$$

Vamos mostrar que $P(t) \geq 0$. Para isso, precisamos mostrar que o coeficiente de t^2, $A = |W^-|^2\left(a - \sqrt{6}|W^-|\right)$ é positivo e que Δ é menor ou igual a zero.

Como $|W^-|^2 \geq 0$, para mostrarmos que A é positivo, basta mostrar que

$$\left(a - \sqrt{6}|W^+|\right) > 0.$$

Vamos mostrar que $\left(a - \sqrt{6}|W^\pm|\right) > 0$.

Pelo Lema 5.0.9, temos que é válida a espressão (5.7), dada novamente abaixo

$$|W^+| + |W^-| \ \leq \ \sqrt{6}\left(\frac{s}{6} - 2K_1^\perp\right).$$

Além disso, usando a hipótese sobre a curvatura biortogonal, $K_1^\perp$, mostramos no Lema 5.0.10 que é válida a expressão (5.8), dada abaixo

$$\sqrt{6}\left(\frac{s}{6} - 2K_1^\perp\right) \ \leq \ \frac{4a^2 - \frac{25}{9}\lambda_1^2}{4\sqrt{6}a}.$$

Segue das expressões (5.7) e (5.8) que,

$$|W^+| + |W^-| \leq \frac{4a^2 - \frac{25}{9}\lambda_1^2}{4\sqrt{6}a}. \tag{5.25}$$

Como $|W^+|, |W^-| \geq 0$, também temos

$$|W^\pm| \leq |W^+| + |W^-| \leq \frac{4a^2 - \frac{25}{9}\lambda_1^2}{4\sqrt{6}a}.$$

Logo,

$$\sqrt{6}|W^\pm| \leq \frac{4a^2}{4a} - \frac{\frac{25}{9}\lambda_1^2}{4a} = a - \frac{25\lambda_1^2}{36a} < a.$$

Isto implica que $\left(a - \sqrt{6}|W^\pm|\right) > 0$, como queríamos mostrar.

Portanto, o coeficiente de t^2, $A = |W^-|^2\left(a - \sqrt{6}|W^-|\right)$ é positivo. Assim, para mostrar que $P(t) \geq 0$, falta mostrar que $\Delta \leq 0$.

Temos

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{25}{9}\lambda_1^2|W^+|^2|W^-|^2 - 4|W^+|^2|W^-|^2\left(a - \sqrt{6}|W^+|\right)\left(a - \sqrt{6}|W^-|\right) \\
&= \frac{25}{9}\lambda_1^2|W^+|^2|W^-|^2 - 4|W^+|^2|W^-|^2\left(a^2 - a\sqrt{6}|W^-| - a\sqrt{6}|W^+| + 6|W^+||W^-|\right) \\
&= \frac{25}{9}\lambda_1^2|W^+|^2|W^-|^2 - 4a^2|W^+|^2|W^-|^2 + 4a\sqrt{6}|W^+|^2|W^-|^2\left(|W^-| + |W^+|\right) \\
&\quad -24|W^+|^2|W^-|^2|W^+||W^-| \\
&= \left(|W^+|^2|W^-|^2\right)\left[\frac{25}{9}\lambda_1^2 - 4a^2 + 4a\sqrt{6}\left(|W^-| + |W^+|\right) - 24|W^+||W^-|\right].
\end{aligned}$$

Consideremos $\theta = \dfrac{25}{9}\lambda_1^2 - 4a^2 + 4a\sqrt{6}\,(|W^-| + |W^+|) - 24|W^+||W^-|$.

Como $|W^+|^2|W^-|^2 \geq 0$, então, para Δ ser menor ou igual a zero, devemos ter $\theta \leq 0$.

Vamos, então, mostrar que $\theta \leq 0$.

Usando a expressão (5.25), temos que

$$\begin{aligned}\theta &\leq \frac{25}{9}\lambda_1^2 - 4a^2 + 4a\sqrt{6}\left(\frac{4a^2 - \frac{25}{9}\lambda_1^2}{4\sqrt{6}a}\right) - 24|W^+||W^-| \\ &= \frac{25}{9}\lambda_1^2 - \frac{25}{9}\lambda_1^2 - 4a^2 + 4a^2 - 24|W^+||W^-| \\ &= -24|W^+||W^-| \ \leq \ 0, \text{ já que } |W^+|, |W^-| \geq 0.\end{aligned}$$

Portanto $\Delta \leq -24|W^+|^3|W^-|^3 \leq 0$, como queríamos.

Assim $P(t) \geq 0$ e já tínhamos, por (5.24), $0 \geq \int_M P(t)dV_g$, logo

$$0 \ \geq \ \int_M P(t)dV_g \ \geq \ 0.$$

Então, $P(t) \equiv 0$, ou seja, t é raiz de $P(t)$. Logo, $0 = \Delta \leq -24|W^+|^3|W^-|^3 \leq 0$. Neste caso, temos $|W^+| \cdot |W^-| = 0$ em M^4.

Mas, sendo $\Sigma = \{p \in M^4; |W^+|(p) = 0 \text{ ou } |W^-|(p) = 0\}$ finito, chegamos a uma contradição.

Portanto, concluímos que M^4 é semiconformemente plana e, assim, $W^+ = 0$ ou $W^- = 0$.

Finalmente, nós definimos os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \left\{p \in M^4; Ric(p) \neq \frac{s(p)}{4}g\right\} \\ \text{e} \quad B &= \left\{p \in M^4; |W^+|(p) = |W^-|(p)\right\},\end{aligned}$$

onde $\left(Ric - \dfrac{s}{4}g\right)$ representa o operador de Ricci sem traço de (M^4, g).

Se A é vazio, pela Definição 1.1.15, concluímos que M^4 é uma variedade de Einstein. Nesse caso, como M^4 é semiconformemente plana, pelo Teorema de Hitchin(veja T. 4.0.4), podemos concluir que M^4 é isométrica a $\mathbb{S}^4$ ou isométrica ao $\mathbb{C}P^2$, com suas métricas canônicas.

Caso contrário, se A é não vazio, então existe um ponto $p \in M^4$ e um conjunto aberto U tal que $p \in U \subset A$. Então, pela Proposição 3.2.6, temos que $W^+(p)$ e $W^-(p)$ tem igual espectro, ou seja, tem os mesmos autovalores. Logo

$$|W^+|(p) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(w_i^+)^2} \ = \ \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(w_i^-)^2} \ = \ |W^-|(p),$$

onde $w_i^{\pm}$ são os autovalores de $W^{\pm}$, respectivamente. Portanto, concluímos que $U \subset A \subset B$.

Considere $f = |W^+|^2 - |W^-|^2$, que é analítica, pois $|W^{\pm}|$ são analíticas. Temos que $f = 0$ em U, que é aberto. Assim, como $U \subset A \subset B$, onde B é fechado, e f é analítica, temos que $f \equiv 0$ em M^4, o que implica $|W^+|^2 = |W^-|^2$. Como já concluímos que $|W^+| = 0$ ou $|W^-| = 0$, temos $|W^+| = |W^-| = 0$, logo $W \equiv 0$. Portanto, pela Proposição 2.1.3, M^4 é conformemente plana.

■

Pela Proposição 4.0.3, sabemos que uma variedade orientada M^4 é uma variedade de Einstein se, e somente se, $K^{\perp} = K$. Vimos também que toda variedade de Einstein M^4 tem tensor de Weyl harmônico e métrica analítica. Então, uma consequência do Teorema anterior é o seguinte corolário.

Corolário 5.1.1. *Seja (M^4, g) uma variedade de Einstein compacta, orientada, de dimensão 4, com curvatura de Ricci igual a $\rho > 0$. Suponha*

$$K \geq \frac{2\rho^2}{12\rho + 5\lambda_1}.$$

Então, ou M^4 é isométrica a $\mathbb{S}^4$, com sua métrica canônica, ou M^4 é isométrica ao $\mathbb{C}P^2$, com sua métrica canônica(Fubini-Study).

No início, vimos que D. Yang provou, em [14], que se uma variedade de Einstein compacta, orientada, de dimensão 4, (M^4, g), com curvatura de Ricci igual a 1, satisfaz a condição

$$K \geq \epsilon_0 \equiv \frac{\left(\sqrt{1249} - 23\right)}{120} \approx 0.102843,$$

então M^4 é isométrica a esfera $\mathbb{S}^4$, com sua métrica canônica, ou ao espaço complexo projetivo $\mathbb{CP}^2$, com a métrica Fubini-Study.

D. Yang observou que se $\rho = 1$ e $K \geq \epsilon_0 \equiv \dfrac{\left(\sqrt{1249} - 23\right)}{120}$, então $\lambda_1 = 8\epsilon_0 + \dfrac{2}{3}$. É fácil ver que, sob essas condições,

$$K \geq \epsilon_0 = \frac{2\rho^2}{12\rho + 5\lambda_1}.$$

Prova. Seja $\lambda_1 = 8\epsilon_0 + \dfrac{2}{3}$. Temos

$$\frac{2\rho^2}{12\rho + 5\lambda_1} = \frac{2\rho^2}{12\rho + 5\left(8\epsilon_0 + \dfrac{2}{3}\right)} = \frac{2\rho^2}{12\rho + 40\epsilon_0 + \dfrac{10}{3}}.$$

Fazendo $\rho = 1$ e $\epsilon_0 = \dfrac{\left(\sqrt{1249} - 23\right)}{120}$ na equação acima, obtemos

$$\frac{2\rho^2}{12\rho + 5\lambda_1} \approx 0.102843 \equiv \epsilon_0, \text{ como queríamos mostrar.}$$

Portanto, o Corolário 5.1.1 é o resultado obtido por Yang quando $\rho = 1$ e $\epsilon_0 \equiv \dfrac{\left(\sqrt{1249} - 23\right)}{120} \approx 0.102843$.

Referências Bibliográficas

[1] Besse, A., Einstein manifolds, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1983).

[2] Berger, M., Les variétés Riemannienes (1/4)-pincées, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 14(1960), 161-170.

[3] Costa, E., On Einstein four-manifolds. Journal of Geometry and Physics. 51(2004), 244-256.

[4] Costa, E., A modified Yamabe invariant and a Hopf conjecture. arXiv[math.DG]: 1207.7107v1, (2012).

[5] Costa, E., Ribeiro Jr., E., Four-dimensional compact manifolds with nonnegative biorthogonal curvature. Michigan. Math. J. 63 (2014), 747-761.

[6] Carmo, M. do, Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 5ª edição, 2011.

[7] Derdzinski, A., Riemannian manifolds with harmonic curvature. Lecture Note in Math. 1156, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1984).

[8] Derdzinski, A., Riemannian metrics with harmonic curvature on 2-sphere bundle over compact surfaces. Bull. Soc. Math. France. 116(1988), 133-156.

[9] Gursky, M., LeBrun, C., On Einstein manifolds of positive sectional curvature. Ann. Global Anal. Geom. 17(1999), 315-328.

[10] Klingenberg, W., Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung, Comm. Math. Helv. 35(1961), 47-54.

[11] Noronha, M., Positively curved 4-manifolds and the nonnegatively of isotropic curvatures. Michigan. Math. J. 44(1997), 211-229.

[12] Ribeiro Jr., E., Rigidity of four-dimensional compact manifolds with harmonic Weyl tensor. arXiv[math.DG]: 1410.3398v2, (2014).

[13] Seaman, W., Orthogonally pinched curvature tensors and applications. Math. Scand. 69(1991), 5-14.

[14] Yang, D., Rigidity of Einstein 4-manifolds with positive curvature. Inventiones Mathematicae 142(2000), 435-450.