Curvatura Escalar, o Operador Linearizado e Aplicações

Ana Lucia Pinheiro Lima

À minha mãe Lúcia Maria
e ao Prof. Luis Roque

Agradecimentos

Ao meu querido orientador Prof. Hilário Alencar pelo muito que me ensinou e por ser exemplo de profissional a ser seguido, à Prof^a. Walcy Santos pelas valiosas contribuições dadas a este trabalho, aos Professores Marco Antônio Fernandes e Enaldo Vergasta pelo incentivo, paciência e apoio, aos meus professores da UNEB, a Vivaldo e Marlene Pinheiro, a George Santos, ao Prof. Benedito Pontes, a Francisco Petrúcio, Aryana Silva e Karoline Cavalcante, e aos colegas de Mestrado, em especial à Juceli Cardoso, Eliana Silva e a Gilmar Veiga.

Índice

Introdução

Nesta dissertação consideraremos M uma hipersuperfície de dimensão n com curvatura escalar constante e imersa isometricamente no espaço Euclidiano.

Inicialmente, seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Assim, definimos o operador linearizado L_r por

$$L_r(f) = tr(T_r(Hess(f))),$$

onde T_r é a transformação de Newton definida indutivamente por $T_0 = I$, $T_r = S_r I - BT_{r-1}$, B é a segunda forma fundamental da imersão e $Hess$ é o hessiano da função f.

Vale observar que os operadores L_r apareceram, não ainda na forma definida acima, no artigo de K. Voss [V], em 1956.

R. Reilly em 1973, relacionou o operador L_r com a derivada da $(r+1)$-ésima função simétrica S_{r+1} num trabalho sobre problemas variacionais (ver [R1]).

Em 1977, Cheng e Yau [CY1] se restringiram ao caso $r = 1$ e escreveram o operador L_1 como

$$L_1(f) = \sum_{i,j=1}^{n} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij},$$

ou seja, em função da curvatura média $H = \frac{S_1}{n}$, dos coeficientes h_{ij} da segunda forma fundamental e dos coeficientes f_{ij} da Hessiana de f. Nesse trabalho foram determinadas importantes propriedades do operador L_1 e uma aplicação dessas propriedades.

Rosenberg em [R2], 1993, mostrou que o operador L_r pode ser escrito como

$$L_r(f) = div(T_r \nabla f).$$

Com isso, o operador L_r passou a ser visto como uma generalização do Laplaciano, pois para $r = 0$, $L_0(f) = \Delta f$.

É bem conhecido o importante papel do Laplaciano no estudo das variedades mínimas ($\frac{S_1}{n} = H_1 = 0$), então espera-se (e estudos atuais vem confirmando este fato) que os operadores L_r desempenhem função semelhante no estudo das variedades H_{r+1}-estáveis.

Diante disso, damos atenção especial ao operador L_1, pois assim, adquirimos técnicas para estudarmos as hipersuperfícies com curvatura escalar constante, objeto desse trabalho.

Portanto, o nosso objetivo é obter resultados sobre hipersuperfícies com curvatura escalar S_2 constante no espaço Euclidiano, usando, como principal ferramenta nas demonstrações, as propriedades do operador L_1.

Mais precisamente, demonstraremos resultados obtidos, em 1977, por Cheng e Yau [CY1] e Rosenberg [R2], em 1993.

Teorema (Cheng-Yau). *Seja M uma hipersuperfície no espaço Euclidiano, completa, não-compacta, com curvatura seccional não-negativa. Se a curvatura escalar de M é constante, então M é um cilindro generalizado.*

Teorema (Rosenberg). *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície mergulhada com $\partial M \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0$. Se S_2 é constante positiva em M, então a distância máxima de M ao hiperplano $\mathbb{R}^n$ é $\sqrt{\frac{2n(n-1)}{S_2}}$.*

A estrutura desta dissertação é a seguinte: no Capítulo 1, será desenvolvido o conteúdo básico que possibilitará um bom entendimento dos capítulos posteriores. O operador L_1 e suas propriedades são os assuntos tratados no Capítulo 2 e os resultados deste capítulo serão fundamentais nas demonstrações dos teoremas acima. No Capítulo 3, enunciamos e provamos o Teorema de Cheng e Yau e no Capítulo 4 fazemos a demonstração, com algumas modificações da prova original, do Teorema de Rosenberg, uma vez que a nossa escolha da segunda forma fundamental da imersão difere por um sinal da escolha feita por Rosenberg.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo, apresentaremos resultados básicos e fundamentais para um melhor entendimento deste trabalho.

Definiremos imersão isométrica, segunda forma fundamental, hipersuperfície convexa e curvatura seccional.

Sejam M^n e $\overline{M}^k$ variedades diferenciáveis de dimensão n e $k = n + m$, respectivamente. Denotaremos por T_pM, $p \in M$, o espaço dos vetores tangentes a M em p.

Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to \overline{M}$ é uma *imersão* se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Se $\overline{M}$ tem uma estrutura Riemanniana, φ induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v\rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v)\rangle_{\varphi(p)}$, $u, v \in T_pM$. Tal métrica será denominada *métrica induzida por* φ. Nesta situação, φ passa a ser *uma imersão isométrica de* M em $\overline{M}$.

Consideraremos sempre $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana e usaremos $\overline{\nabla}$ para denotar sua conexão de Levi-Civita.

Se $\varphi : M \to \overline{M}$ é uma imersão, podemos afirmar que, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p, tal que $\varphi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$, isto é, temos uma vizinhança de $\varphi(p)$, $\overline{U} \subset \overline{M}$, onde podemos definir um difeomorfismo que leva $\varphi(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Portanto, simplificaremos a notação identificando cada ponto $p \in M$ com sua imagem $\varphi(p)$ e cada vetor $v \in T_pM$ com o vetor $d\varphi_p(v) \in T_{\varphi(p)}\overline{M}$.

Através do produto interno definido em $T_p\overline{M}$, podemos decompor o espaço tangente de $\overline{M}$ em p como a soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Tomando $v \in T_p\overline{M}$, podemos escrevê-lo como

$$v = v^T + v^N,$$

onde $v^T \in T_pM$, $v^N \in (T_pM)^\perp$.

Consideremos X, Y campos locais de vetores em M e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ as extensões locais em $\overline{M}$, respectivamente. Daí, temos a seguinte igualdade

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

O nosso objetivo é definir a segunda forma fundamental da imersão $\varphi : M \to \overline{M}$. Para isto, introduziremos a aplicação bilinear simétrica $B : \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U)^\perp$ dada por

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y.$$

Aqui $\chi(U)$ (respectivamente, $\chi(U)^\perp$) é o espaço dos campos de vetores (respectivamente, normais) de classe C^∞ em M, e $U \subset M$ é uma vizinhança de p tal que $\varphi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de M.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por $H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle$, x, $y \in T_pM$ é também uma forma bilinear simétrica.

Assim, podemos definir a forma quadrática II_η em T_pM dada por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x).$$

II_η é chamada a *segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η.*

À aplicação bilinear H_η associa-se uma aplicação linear auto-adjunta $Q_\eta : T_pM \to T_pM$ definida por

$$\langle Q_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle.$$

Q_η é chamado *endomorfismo de Weingarten.*

Uma observação importante é que também podemos designar a aplicação B como a segunda forma fundamental, tomando valores em $(T_pM)^\perp$. Faremos uso desta notação no decorrer do nosso trabalho.

A proposição seguinte nos dá uma relação entre o endomorfismo de Weingarten e a derivada covariante.

Proposição 1.1. *Sejam* $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ *uma imersão isométrica,* $p \in M$, $v \in T_pM$, $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ *e* N *uma extensão local de* η *normal a* M*. Então,*

$$Q_\eta(v) = -(\overline{\nabla}_v N)^T.$$

Prova. Sejam $v,\ w \in T_pM$ e $V,\ W$ extensões locais de $v,\ w$, respectivamente, e tangentes a M. Então, $\langle N, W\rangle = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\langle Q_\eta(v), w\rangle &= \langle B(V,W)(p), N\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_V W - \nabla_V W, N\rangle(p) \\
&= \langle \overline{\nabla}_V W, N\rangle_p - \langle \nabla_V W, N\rangle_p \\
&= \langle \overline{\nabla}_V W, N\rangle_p \\
&= -\langle W, \overline{\nabla}_V N\rangle_p \\
&= \langle (-\overline{\nabla}_V N)^T, W\rangle_p\ ,
\end{aligned}$$

para todo $w \in T_pM$.

■

Os teoremas principais deste trabalho tratam do caso particular de imersões cuja codimensão é igual a 1, isto é, $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$. Neste caso, $\varphi(M) \subset \overline{M}$ é chamada de *hipersuperfície*.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in T_pM^{\perp}$ tal que $\mid \eta \mid = 1$. Assim, o fato do endomorfismo de Weingarten $Q_\eta : T_pM \to T_pM$ ser simétrico, garante a existência de uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM com valores próprios reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, ou seja, $Q_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$.

Para $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ temos uma interessante interpretação geométrica para Q_η.

Sejam N extensão local de η, unitária e normal a M e $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \parallel x \parallel = 1\}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$. Definimos a aplicação normal de Gauss $g : M^n \to S^n$ transladando a origem do campo N, para a origem do $\mathbb{R}^{n+1}$ e fazendo

$$g(q) = ponto\ final\ do\ transladado\ de\ N(q).$$

Como T_qM e $T_{g(q)}(S^n)$ são paralelos, podemos identificá-los. Logo, vemos que $dg_q : T_qM \to T_qM$ é dada por

$$dg_q(v) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))_{t=0} = \overline{\nabla}_v N = (\overline{\nabla}_v N)^T = -Q_\eta(v)\ ,$$

onde $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma curva com $c(0) = q$ e $c'(0) = v$.

Portanto, $-Q_\eta$ é a derivada da aplicação normal de Gauss.

Quando M e $\overline{M}$ estão ambas orientadas, o vetor η é univocamente determinado se exigirmos que $\{e_1, ..., e_n\}$ e $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ sejam bases na orientação de M e $\overline{M}$, respectivamente. Quando isto ocorre, denominamos os e_i *direções principais* e os $\lambda_i = k_i$ *curvaturas principais* de φ.

Um fato relevante com relação as curvaturas principais é que suas funções simétricas são invariantes da imersão.

Definimos a *r-ésima curvatura média* H_r, $r = 0, 1, ...n$, de M como sendo

$$H_r = \frac{1}{c_r} S_r,$$

onde $c_r = \binom{n}{r}$ e S_r é a r-ésima função simétrica das curvaturas principais (k_i) da imersão φ, ou seja,

$$S_r = \sum_{i_1 < ... < i_r} k_{i_1} \cdot ... \cdot k_{i_r} \; .$$

Observe que, $S_0 = 1$ e $S_1,\ S_2,\ e\ S_n$ são, a menos de fator constante, as *curvaturas média*, *escalar* e $Gauss - Kronecker$, respectivamente.

Consideremos uma função $f \in C^\infty(M)$ e um campo qualquer $X \in \chi(M)$. Definimos o *gradiente* de f como o campo ∇f em M dado por

$$\langle \nabla f, X \rangle = Xf = df \cdot X,$$

o *divergente* de X como a função $div : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$divX = tr(Y \to \nabla_Y X)$$

e o *Laplaciano* de M como o operador $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dado por

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Agora, consideremos um referencial geodésico $\{e_1, ..., e_n\}$ em um aberto de M e um campo X escrito neste referencial como $X = \sum_{i=1}^n a_i E_i$. Então, podemos escrever o *gradiente*, *divergente* e o *Laplaciano* nesse referencial como

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} (e_i(f)) e_i,$$

$$divX = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i),$$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)),$$

respectivamente.

Usando as definições de *gradiente*, *divergente* e *Laplaciano*, obtemos, para toda $g \in C^\infty(M)$, a equação

$$div(gX) = gdivX + \langle \nabla g, X\rangle. \tag{1.1}$$

Consideremos uma variedade compacta M com bordo ∂M e um campo X em M. O Teorema da Divergência (ver [S], p.192) afirma que

$$\int_M divX\ dM \ = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle dr, \tag{1.2}$$

onde dM e dr são os elementos de volume de M e de ∂M, respectivamente, e ν é o campo de vetor unitário normal exterior ao ∂M, cuja direção é oposta à do vetor curvatura média. Assim, se tomamos $X = f\nabla h$ em (1.1) e usamos (1.2), temos a Fórmula de Green

$$\int_M \{f\Delta h + \langle \nabla f, \nabla h\rangle\} dM = \int_{\partial M} f\langle \nabla h, \nu\rangle dr \tag{1.3}$$

para $f, h \in C^\infty(M)$.

Dizemos que M é uma variedade Riemanniana (geodesicamente) *completa* se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, exp_p, está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas γ(t) que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Quando a variedade M é fechada e limitada diz-se que M é *compacta*.

Nos resultados deste trabalho encontramos a expressão clássica: "variedades de curvatura constante". Esta expressão designa as variedades Riemannianas simplesmente conexas, completas, de curvatura seccional constante.

Definamos então curvatura seccional. Dados um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real $K(x,y) = K(\sigma) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x\wedge y|^2}$, onde R representa o tensor curvatura e $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado *curvatura seccional* de σ em p.

Uma interpretação geométrica da curvatura seccional nos diz que $K(p, \sigma)$ é a curvatura Gaussiana em p de uma pequena superfície formada por geodésicas de M que partem de p e são tangentes a σ.

Para uma hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, a condição análoga a ter curvatura Gaussiana positiva em p é a condição que toda curvatura seccional em p é positiva; equivalentemente, toda curvatura principal terá o mesmo sinal, ou ainda, a segunda forma fundamental B é positiva ou negativa definida e isto nos garante o fato, puramente geométrico, que M está situada em um lado do hiperplano tangente de M em p. Dizemos então que o fato de B ser positiva ou negativa definida, implica que M é *localmente convexa* e argumentos gerais mostram que um conjunto localmente convexo é, na verdade, *convexo*.

Dizemos que uma hipersurperfície mergulhada $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma *hipersuperfície convexa* quando ela está contida no bordo de um corpo convexo $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Por um *corpo convexo* entendemos um subconjunto C de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que, dados dois pontos $p,\ q\ \in C$, o segmento que liga p e q está contido em C .

Um dos fatos mais importantes para desenvolvimento deste trabalho é o operador L_1, definido no próximo capítulo, ser elíptico. Antes vamos estabelecer algumas definições.

Um operador L do tipo

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \ ,$$

é chamado *operador diferencial de ordem dois*, onde $a_{ij}, b_i, c : U \to \mathbb{R},\ i,j = 1,...n$, são funções definidas em aberto U de $\mathbb{R}^n$.

Quando $A(x) = (a_{ij}(x))$ é simétrica e positiva definida, para todo $x \in U$, isto é,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j > 0, \forall x \in U \text{ e } \forall \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\},$$

a expressão $Lu = 0$ é chamada equação *elíptica de segunda ordem*.

O princípio do módulo máximo para funções hamônicas foi generalizado por E. Hopf em 1927 para equações diferenciais parciais elípticas (ver[GT], p. 31).

Teorema 1.1 (E. Hopf). *Seja*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

onde $u{:}U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é uma função duas vezes diferenciável e* b_i, $c{:}U \to \mathbb{R}$ *são funções localmente limitadas com* $c \leq 0$. *Suponhamos que, para todo ponto* $p \in U$, *existem uma vizinhança* V *de* p *e constantes* δ *e* ϵ *positivas tais que*

$$\delta \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \leq \epsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2,$$

$\forall x \in V$ *e todo* $\lambda = (\lambda_1, \ ..., \ \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Se $Lu \geq 0$ *em* U *e* p *é um ponto de máximo local não-negativo, então* u *é constante em uma vizinhança de* p.

O princípio da tangência é uma aplicação desse resultado, e pode ser enunciado do seguinte modo:

Sejam M_1^n, M_2^n *hipersuperfícies orientadas em* M^{n+1}, $p \in M_1^n \cap M_2^n$ *um ponto de tangência e* u_1, $u_2 : U \subset T_pM_1 \to \mathbb{R}$ *funções definidas em uma vizinhança* U *da origem do plano tangente* T_pM_1, *cujos gráficos são vizinhanças* $V_1 \subset M_1$ *e* $V_2 \subset M_2$ *de* p, *respectivamente. Se* u_1 *e* u_2 *satisfazem uma mesma equação diferencial parcial elíptica e* $u_1 \leq u_2$ *em* U, *então* M_1 *e* M_2 *coincidem em* U.

Para finalizar este capítulo, enunciaremos um resultado obtido por Hartman e Nirenberg [HN] que será usado na demonstração do *Teorema de Cheng e Yau*, no Capítulo 3.

Teorema 1.2 (Hartman-Nirenberg). *Sejam* M^n *uma variedade Riemanniana completa flat e* $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *uma imersão isométrica. Então, f(M) é um cilindro sobre uma curva plana.*

Capítulo 2

L_1 - O operador linearizado

Neste capítulo faremos um estudo sobre o operador L_1. Inicialmente, usaremos a definição dada por Cheng e Yau [CY1] , veremos que L_1 é o caso particular, para $r = 1$, do operador L_r definido por Rosenberg [R2] e demonstraremos algumas propriedades desse operador.

Quando M^n é uma hipersuperfície completa com curvatura seccional não-negativa no espaço Euclidiano, podemos escolher o campo de vetores normais $N : M \to S^{n+1}$ de maneira que a segunda forma fundamental B seja positiva semi-definida.

Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Definimos o operador L_1 por (ver [CY1], p. 201)

$$L_1(f) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij} \; , \tag{2.1}$$

onde $H = \frac{S_1}{n}$ é a curvatura média de M, h_{ij} os coeficientes da segunda forma fundamental, δ_{ij} delta de Kronecker e f_{ij} os coeficientes da matriz Hessiana de f.

Ao estudo das r-ésimas curvaturas médias está relacionada a Transformação de Newton $T_r = S_r I - S_{r-1}B + ... + (-1)^r B^r$, que também pode ser definida indutivamente por $T_r = S_r I - BT_{r-1},\ T_0 = I$.

Proposição 2.1. *Seja T_r a Transformação de Newton. Então, são válidas as seguintes propriedades:*

a) $T_r(e_i) = S_r(B_i)e_i$*;*

b) $(r + 1)S_{r+1} = tr(BT_r)$ *(Fórmula de Newton);*

c) $tr(T_r) = (n - r)S_r$*;*

d) $tr(T_r B^2) = S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$*;*

e) T_r *é auto-adjunto.*

Prova. Ver Lemma 2.1 [BC], p.279 para as quatro primeiras propriedades.
O fato do operador T_r ser auto-adjunto é conseqüência dele ser polinômio em B.

■

Agora, definida a transformação T_r, a maneira natural de escrever a definição dada por Cheng e Yau para o operador L_1 é

$$\begin{aligned} L_1(f) &= tr(T_1 Hess(f)) \\ &= tr((S_1 I - B)(Hess(f))). \end{aligned}$$

Em 1993, Rosenberg (ver [R2], Theorem 4.1, p.225) estabeleceu a seguinte expressão para o operador diferenciável linear de segunda ordem L_r,

$$L_r(f) = div(T_r \nabla f), \quad r = 0, 1, ..., n.$$

O operador L_r já havia aparecido em artigos de Voss [V] e Reilly [R1], associado a problemas variacionais e escrito como combinação das funções simétricas S_{r+1}. O trabalho de Rosenberg [R2] teve grande importância, pois o fato do operador L_r poder ser escrito como um divergente possiblitou o uso de muitos resultados já conhecidos.
Quando $r = 1$,

$$L_1(f) = div(T_1 \nabla f) \tag{2.2}$$

coincide com o operador de Cheng e Yau

$$L_1(f) = \sum_{i,j=1}^{n} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij}.$$

De fato, sabemos que

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i \qquad \text{e} \qquad T_1 = S_1 I - B = nHI - B,$$

onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é o referencial geodésico.

Daí,

$$\begin{aligned} T_1\nabla f &= \sum_{i=1}^{n}(nHI - B)f_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(nHf_i e_i - f_i Be_i)\ . \end{aligned}$$

Como $Be_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ji}e_j$, temos

$$\begin{aligned} T_1\nabla f &= \sum_{i=1}^{n}\left(nHf_i e_i - f_i\sum_{j=1}^{n} h_{ji}e_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ji})f_i e_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_i e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_i\right)e_j\ . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} div(T_1\nabla f) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} nH_j\delta_{ij} - h_{ijj}\right)f_i + \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} nH_j\delta_{ij}\right)f_i - \sum_{i,j=1}^{n} h_{ijj}f_i + \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} nH_j\delta_{ij}f_i - \sum_{i=1}^{n} nH_i f_i + \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} nH_i f_i - \sum_{i=1}^{n} nH_i f_i + \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij}\ . \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$div(T_1\nabla f) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij}\ .$$

Em um certo sentido, os operadores L_r generalizam o operador Laplaciano Δ, pois, para $r = 0$,

$$\begin{aligned} L_0(f) &= div(T_0\nabla f) \\ &= div(\nabla f) \\ &= \Delta f. \end{aligned}$$

Vale observar que esses operadores são muito usados em estudos de hipersuperfícies com r-ésima curvatura H_r constante.

Os resultados apresentados neste trabalho, a partir de agora, estarão relacionados ao operador L_1.

Definindo L_1 de um campo como sendo o campo cujas coordenadas são L_1 aplicado a cada uma das coordenadas do campo original, vamos agora calcular $L_1(X)$ e $L_1(N)$, onde X e N são o vetor posição e o vetor normal de M, respectivamente.

Proposição 2.2. *Sejam X e N o vetor posição e o vetor normal de M, respectivamente. Então,*

a) $L_1(X) = n(n-1)RN$;

b) $L_1(N) = (-S_1S_2 + 3S_3)N - \frac{1}{2}n(n-1)\sum_{k=1}^{n} R_k e_k$.

Prova. Seja $\{e_1, ...e_n\}$ um referencial ortonormal em M. Então,

$$\nabla_{e_i}X = e_i.$$

Daí,

$$X_{ij} = \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}X = \nabla_{e_j}e_i = h_{ij}N,$$

ou seja,

$$X_{ij} = h_{ij}N\ . \tag{2.3}$$

Além disso,

$$N_i \;=\; \sum_{k=1}^{n}\langle N_i, e_k\rangle e_k + \langle N_i, N\rangle N\ .$$

Sabemos que $\langle N, e_k \rangle = 0$ e $\langle N, N \rangle = 1$. Dessas igualdades, concluímos que $\langle N_i, e_k \rangle = -h_{ki}$ e $\langle N_i, N \rangle = 0$.

Assim,

$$N_i = -\sum_{k=1}^{n} h_{ki} e_k \ .$$

Logo,

$$\begin{aligned} N_{ij} &= -\sum_{k=1}^{n} h_{kij} e_k - \sum_{k=1}^{n} h_{ki} \nabla_{e_j} e_k \\ &= -\sum_{k=1}^{n} h_{kij} e_k - \sum_{k=1}^{n} h_{ki} h_{kj} N. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Calculemos o valor de $L_1(X)$. Por (2.1),

$$L_1(X) = \sum_{i,j=1}^{n} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) X_{ij} \ .$$

Substituindo o valor encontrado em (2.3), temos

$$\begin{aligned} L_1(X) &= \sum_{i,j=1}^{n} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) h_{ij} N \\ &= \left((nH)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^2 \right) N \\ &= \left((\sum_{i=1}^{n} k_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \right) N \\ &= \left(2 \sum_{i<j} k_i k_j \right) N \\ &= (2S_2) N \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Visto que $R = \frac{2}{n(n-1)} S_2$, também podemos escrever $L_1(X)$ como

$$L_1(X) \ = \ n(n-1) R N \ . \tag{2.6}$$

Analogamente, calculamos o valor de $L_1(N)$, substituindo a expressão (2.4) em (2.1), ou seja,

$$\begin{aligned} L_1(N) &= \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij}-h_{ij})N_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij}-h_{ij})(-\sum_{k=1}^{n}h_{kij}e_k-\sum_{k=1}^{n}h_{ki}h_{kj}N) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij}-h_{ij})(\sum_{k=1}^{n}h_{ki}h_{kj})N-\sum_{i,j,k=1}^{n}(nH\delta_{ij}-h_{ij})h_{kij}e_k. \end{aligned}$$

Usando Codazzi e a bilinearidade de B,

$$\begin{aligned} L_1(N) &= -\sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij}-h_{ij})(\sum_{k=1}^{n}h_{ik}h_{kj})N-\sum_{k=1}^{n}\left[nH(nH)_k-\sum_{i,j=1}^{n}h_{kij}h_{ij}\right]e_k \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij}-h_{ij})(\sum_{k=1}^{n}h_{ik}h_{kj})N-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}n(n-1)R_ke_k \\ &= \left(-\sum_{i,j,k=1}^{n}nH\delta_{ij}h_{ik}h_{kj}+\sum_{i,j,k=1}^{n}h_{ij}h_{ik}h_{kj}\right)N-\frac{1}{2}n(n-1)\sum_{k=1}^{n}R_ke_k \\ &= (-nH\parallel B\parallel^2+trB^3)N-\frac{1}{2}n(n-1)\sum_{k=1}^{n}R_ke_k. \end{aligned}$$

Como $trB^3 = nH \parallel B \parallel^2 - \frac{1}{2}n^2(n-1)HR + 3S_3$, ver equação (1) em [R1], temos

$$\begin{aligned} L_1(N) &= \left(-\frac{1}{2}n^2(n-1)HR+3S_3\right)N-\frac{1}{2}n(n-1)\sum_{k=1}^{n}R_ke_k \\ &= (-S_1S_2+3S_3)N-\frac{1}{2}n(n-1)\sum_{k=1}^{n}R_ke_k. \end{aligned}$$

Assim,

$$L_1(N) = (-S_1S_2+3S_3)N-\frac{1}{2}n(n-1)\sum_{k=1}^{n}R_ke_k. \tag{2.7}$$

■

Proposição 2.3. *Sejam X e N o vetor posição e o vetor normal de M, respectivamente e seja v vetor fixo em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então,*

a) $L_1(\langle X, v\rangle) = n(n-1)R\langle N, v\rangle$;

b) $L_1(\langle N, v\rangle) = (-S_1S_2 + 3S_3)\langle N, v\rangle - \frac{1}{2}n(n-1)\sum_{k=1}^{n} R_k\langle e_k, v\rangle$.

Prova. Afirmamos que $L_1(\langle X, v\rangle) = \langle L_1(X), v\rangle$. Com efeito,

$$\begin{aligned} L_1(\langle X, v\rangle) &= \sum_{ij=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})\langle X, v\rangle_{ij} \\ &= \sum_{ij=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})\langle X_{ij}, v\rangle \\ &= \left\langle \sum_{ij=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})X_{ij}, v \right\rangle \\ &= \langle L_1(X), v\rangle. \end{aligned}$$

Então, usando (2.5) e (2.6),

$$\begin{aligned} L_1(\langle X, v\rangle) &= \langle (2S_2)N, v\rangle && (2.8) \\ &= \langle n(n-1)RN, v\rangle \\ &= n(n-1)R\langle N, v\rangle. && (2.9) \end{aligned}$$

Usando (2.7), temos

$$L_1(\langle N, v\rangle) = (-S_1S_2 + 3S_3)\langle N, v\rangle - \frac{1}{2}n(n-1)\sum_{k=1}^{n} R_k\langle e_k, v\rangle. \qquad (2.10)$$

■

Uma propriedade importante do operador L_1 é o fato dele ser auto-adjunto.

Proposição 2.4 ([CY1], Proposição 1)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e orientável. Então, o operador L_1 é auto-adjunto.*

Prova. Por (2.2) e usando o produto interno definido por $\langle f, g\rangle = \int_M fg\, dM$ para $f, g : M \to \mathbb{R}$, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \langle L_1(f), g\rangle &= \langle div(T_1\nabla f), g\rangle \\ &= \langle g, div(T_1\nabla f)\rangle \\ &= \int_M g div(T_1\nabla f) dM\ . \end{aligned}$$

Fazendo $X = T_1\nabla f$ em (1.1) e usando o Teorema da Divergência (ver p.10), pois M é compacta sem bordo, concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle L_1(f), g\rangle &= \int_M g div(T_1\nabla f)dM \\
&= \int_M div(gT_1\nabla f)dM - \int_M \langle \nabla g, T_1\nabla f\rangle dM \\
&= -\int_M \langle \nabla g, T_1\nabla f\rangle dM \ .
\end{aligned}$$

Agora, usando o mesmo argumento temos que

$$\begin{aligned}
\langle f, L_1(g)\rangle &= \langle f, div(T_1\nabla g)\rangle \\
&= \int_M f div(T_1\nabla g)dM \\
&= \int_M div(fT_1\nabla g)dM - \int_M \langle \nabla f, T_1\nabla g\rangle dM \\
&= -\int_M \langle \nabla f, T_1\nabla g\rangle dM \ .
\end{aligned}$$

Como T_1 é auto-adjunto, isto é,

$$\langle \nabla f, T_1\nabla g\rangle = \langle T_1\nabla f, \nabla g\rangle \ ,$$

temos a igualdade desejada, ou seja,

$$\langle L_1(f), g\rangle = \langle f, L_1(g)\rangle \ .$$

■

O resultado a seguir é uma desigualdade, *Princípio do Mini-Max*, para o operador L_1. A demonstração desse fato usa uma estimativa para seu primeiro auto-valor (ver [C], p.16).

Proposição 2.5 ([CY1], Proposição 2)**.** *Seja L_1 um operador elíptico auto-adjunto de segunda ordem , possivelmente degenerado, definido em uma variedade M compacta com bordo. Seja f uma função positiva de classe C^2. Então, para qualquer função $g \in C^2$ não-negativa tal que $g\big|_{\partial M} = 0$, temos*

$$\left(-\int_M gL_1 g\right) \ \geq \ \inf_M \left(-\frac{L_1 f}{f}\right)\left(\int_M g^2\right)^{-1} \ . \tag{2.11}$$

Prova. Se g é identicamente nula nada temos a demonstrar. Então, suponhamos $g \not\equiv 0$ e notemos que precisamos apenas provar (2.11) assumindo que L_1 é elíptico não-degenerado. Caso contrário, podemos substituir L_1 por $L_1 + \epsilon\Delta$ e fazer $\epsilon \to 0$.

Sejam λ o primeiro auto-valor e g_λ a primeira auto-função de L_1 sobre D com a condição $g_\lambda\big|_{\partial D} = 0$.

É bem conhecido que

$$\lambda \leq \left(-\int_M gL_1g\right)\left(\int_M g^2\right)^{-1}$$

e g_λ é positiva no interior de D.

Considere a função $\frac{g_\lambda}{f}$ definida em D (temos $\frac{g_\lambda}{f}\big|_{\partial D} = 0$).

Nos pontos onde $\frac{g_\lambda}{f}$ atinge seu máximo, podemos verificar que

$$\lambda = -\frac{L_1g_\lambda}{g_\lambda} \geq -\frac{L_1f}{f}\ .$$

Logo, provamos a seguinte estimativa:

$$\left(-\int_M gL_1g\right)\left(\int_M g^2\right)^{-1} \geq \inf_M\left(-\frac{L_1f}{f}\right)\ .$$

■

A condição suficiente para o operador L_1 ser elíptico é dada pela proposição seguinte (ver[CY1], p.201).

Proposição 2.6. *Se S_2 é constante positiva, então L_1 é elíptico.*

Prova. Como $L_1(f) = \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij}$, temos

$$a_{ij} = nH\delta_{ij} - h_{ij}.$$

Visto que a segunda forma fundamental é diagonalizável, basta analisarmos a_{ij} para $i = j$. Assim,

$$\begin{aligned} a_j &= nH - k_j \\ &= S_1 - k_j. \end{aligned}$$

Pela definição de operador elíptico (ver p.11) devemos ter $a_j > 0$.

Para cada j, sabemos que

$$S_1^2 = \sum_{j=1}^{n} k_j^2 + 2S_2 > k_j^2,$$

ou seja,

$$S_1^2 - k_j^2 > 0.$$

Daí,

$$(S_1 + k_j)(S_1 - k_j) > 0.$$

Supondo $S_1 + k_j < 0$ e $S_1 - k_j < 0$ e somando essas duas desigualdades, encontramos

$$2S_1 < 0.$$

Logo, temos um absurdo, pois $S_1 > 0$. Portanto, $S_1 - k_j > 0$ e, consequentemente,

$$a_j > 0, \; j = 1, ..., n.$$

Assim, quando S_2 é constante positiva, L_1 é um operador elíptico .

■

Esse resultado é fundamental na demonstração dos teoremas principais deste trabalho, pois o fato de L_1 ser um operador elíptico nos permite utilizar o princípio do módulo máximo (ver Teorema 1.1, p.12).

Capítulo 3

Hipersuperfície completa, não-compacta, com curvatura escalar constante

O objetivo deste capítulo é provar que, se M é uma hipersuperfície completa não-compacta no espaço Euclidiano, com curvatura seccional não negativa e curvatura escalar S_2 constante, M é um cilindro generalizado. Este resultado foi obtido por Cheng e Yau em [CY1].

A idéia central da demonstração deste resultado é provar que M é flat, isto é, provar que M possui curvatura escalar identicamente nula. Assim, poderemos aplicar o Teorema de Hartman e Nirenberg (Teorema 1.2, p.12) e concluir a demonstração.

Enunciemos então, o resultado de Cheng e Yau.

Teorema 3.1 ([CY1], Teorema 4)**.** *Seja M^n uma hipersuperfície completa não-compacta no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura seccional não-negativa. Se a curvatura escalar de M é constante, então M é um cilindro generalizado.*

Prova. Como M é completa, com curvatura seccional não-negativa, concluímos que M é convexa (ver p.11).

No capítulo anterior (ver Proposição 2.6, p.21) provamos o seguinte fato: se S_2 é constante positiva, então L_1 é elíptico. Então, se tivermos L_1 elíptico degenerado, significa que em algum ponto de M, $\sum_{i \neq j} k_i = 0$ para alguma curvatura principal k_i, ou seja, $k_i = 0$ para todo $i \neq j$ Assim, a curvatura escalar de M neste ponto é zero.

Quando a curvatura escalar de M é zero, M é flat e o resultado segue-se do Teorema de Hartman-Nirenberg (ver Teorema 1.2, p.12).

O fato da imagem da aplicação normal de Gauss de uma hipersuperfície convexa completa situar-se num hemisfério aberto, nos permite garantir a existência do vetor unitário a no espaço Euclidiano tal que $\langle N, a\rangle \geq 0$, onde N é vetor normal em M (ver [W], p. 279).

Agora, afirmamos que se $\langle N, a\rangle = 0$ em algum ponto de M, temos que $\langle N, a\rangle$ é identicamente nula.

Com efeito, calculemos o sinal de $L_1(\langle N, a\rangle)$.

$$\begin{aligned} L_1(\langle N, a\rangle) &= \langle L_1(N), a\rangle \\ &= -\sum_{j,l=1}^{n}(nH\delta_{jl} - h_{jl})\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ji}h_{il}\right)\langle N, a\rangle \\ &= -n(n-1)R\sum_{i=1}^{n} h_{ij}^2\langle N, a\rangle \ . \end{aligned}$$

Logo, $L_1\langle N, a\rangle \leq 0$.

Assim, nossa afirmação segue-se do princípio do mínimo aplicado à equação elíptica acima, ou seja, como $L_1\langle N, a\rangle \leq 0$ e $\langle N, a\rangle \geq 0$, se $\langle N, a\rangle$ assume seu mínimo (que é zero), então $\langle N, a\rangle$ será constante e igual a zero.

Concluímos que, ou $\langle N, a\rangle$ é sempre positiva ou $\langle N, a\rangle \equiv 0$.

No segundo caso, diferenciando a equação $\langle N, a\rangle \equiv 0$, obtemos $k_i\langle e_i, a\rangle \equiv 0$ para todas as curvaturas principais k_i e direções principais e_i. Projetando a em M, obtemos o campo de vetores unitários $\sum_i\langle a, e_i\rangle e_i$ que é paralelo em M. Portanto, podemos retirar uma linha e continuar por indução a prova do teorema.

Quando $f = \langle N, a\rangle$ é estritamente positiva, aplicamos a Proposição 2.5 (ver p.20), e garantimos que

$$\left(-\int_M gL_1g\right)\left(\int_M g^2\right)^{-1} \geq \inf_M\left(\frac{\sum_{j,l=1}^{n}(nH\delta_{jl} - h_{jl})(\sum_{i=1}^{n} h_{ji}h_{il})\langle N, a\rangle}{\langle N, a\rangle}\right),$$

ou ainda,

$$\left(-\int_D gL_1g\right)\left(\int_D g^2\right)^{-1} \geq \min_D\left(\sum_{j,l=1}^{n}(nH\delta_{jl} - h_{jl})(\sum_{i=1}^{n} h_{ji}h_{il})\right) \tag{3.1}$$

para toda função suave g com suporte compacto D.

Com as propriedades que M possui, é possível afirmar (ver [W], Teorema 2, p. 280) que M é essencialmente um gráfico sobre a e com isso, o conjunto $D_r = \{X; \langle X, a\rangle \leq r\}$ é compacto para todo $r > 0$.

Podemos aplicar a função $g(p) = r - \langle X(p), a\rangle$ em (3.1) substituindo D por D_r. Assim,

$$\frac{-\int_{D_r}(r-\langle X,a\rangle)L_1(r-\langle X,a\rangle)}{\int_{D_r}(r-\langle X,a\rangle)^2} \geq \min_{D_r}\left(\sum_{j,l=1}^{n}(nH\delta_{jl}-h_{jl})(\sum_{i=1}^{n}h_{ji}h_{il})\right).$$

Por outro lado, por (2.9), temos

$$\begin{aligned}\frac{-\int_{D_r}(r-\langle X,a\rangle)L_1(r-\langle X,a\rangle)}{\int_{D_r}(r-\langle X,a\rangle)^2} &= \frac{-\int_{D_r}(r-\langle X,a\rangle)(-\langle n(n-1)RN,a\rangle)}{\int_{D_r}(r-\langle X,a\rangle)^2}\\ &\leq \frac{\int_{D_r} rn(n-1)R\langle N,a\rangle}{\int_{D_r}(r-\langle X,a\rangle)^2}\\ &= \frac{rn(n-1)R\int_{D_r}\langle N,a\rangle}{\int_{D_r}(r-\langle X,a\rangle)^2}.\end{aligned}$$

Seja $D_{\frac{r}{2}} = \{X; \langle X,a\rangle \leq \frac{r}{2}\}$. Então, em $D_{\frac{r}{2}}$ vale a seguinte desigualdade,

$$r-\langle X,a\rangle \geq r-\frac{r}{2}\ ,$$

ou seja,

$$r-\langle X,a\rangle \geq \frac{r}{2}\ .$$

Daí,

$$\begin{aligned}\frac{rn(n-1)R\int_{D_r}\langle N,a\rangle}{\int_{D_r}(r-\langle X,a\rangle)^2} &\leq \frac{rn(n-1)R\int_{D_r}\langle N,a\rangle}{\int_{D_{\frac{r}{2}}}(\frac{r}{2})^2}\\ &\leq \frac{rn(n-1)R\int_{D_r}}{\frac{r^2}{4}\int_{D_{\frac{r}{2}}}}\\ &= \frac{4n(n-1)Rvol(D_r)}{rvol(D_{\frac{r}{2}})}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{-\int_{D_r}(r-\langle X,a\rangle)L_1(r-\langle X,a\rangle)}{\int_{D_r}(r-\langle X,a\rangle)^2} \leq 4n(n-1)r^{-1}Rvol(D_r)[volD_{\frac{r}{2}}]^{-1}. \tag{3.2}$$

O fato de M ser convexa também nos garante a existência de constantes c_1 e c_2 tais que $vol(D_r) \leq c_1 r^n + c_2$ (ver [SY], p. 23-25). Isto implica que

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-\epsilon} vol(D_r)[volD_{\frac{r}{2}}]^{-1} = 0, \ \forall\, \epsilon > 0. \tag{3.3}$$

Combinando (3.1), (3.2) e (3.3), temos

$$\inf_M \sum_{j,l=1}^{n} (nH\delta_{jl} - h_{jl}) \left(\sum_{i=1}^{n} h_{ji} h_{il} \right) = 0. \tag{3.4}$$

Sejam k_1 e k_2 curvaturas principais tais que $k_1 k_2 \geq R$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^{n} (nH\delta_{kl} - h_{kl}) \left(\sum_{i=1}^{n} h_{ki} h_{il} \right) &\geq k_1 k_2^2 + k_2 k_1^2 \\ &\geq (k_1 k_2)(k_1 + k_2) \\ &\geq k_1 k_2 \sqrt{2 k_1 k_2} \\ &\geq \sqrt{2} R^{3/2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como R é constante, concluímos de (3.4) e (3.5) que $R = 0$ e o resultado é conseqüência imediata do Teorema de Hartmam-Nirenberg (Teorema 1.2, p.12).

■

Comentário. Em 1978, P. Hartman (ver [H1]) generalizou o resultado de Cheng e Yau para curvatura média H_r constante positiva.

Teorema (Hartman). *Seja $M = M^n$ uma variedade Riemanniana completa conexa com curvatura seccional não-negativa. Seja $X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de classe C^∞ tal que X(M) possui a r-ésima curvatura média satisfazendo $H_r = c > 0$ para algum r, $1 \leq r \leq n$. Então, M é um cilindro generalizado.*

Capítulo 4

Estimativa de altura

O resultado apresentado neste capítulo é uma estimativa obtida por Rosenberg [R2], para a distância máxima dos pontos de M ao seu bordo, quando M é uma hipersuperfície mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura escalar S_2 constante positiva e bordo em $\mathbb{R}^n$.

A demonstração deste teorema é um bom exemplo de aplicação das propriedades do operador L_1.

Inicialmente, vamos demonstrar o resultado seguinte.

Proposição 4.1. *Se H_1, H_2,..., H_i são não-negativas, então*

$$H_1 H_{i+1} \geq H_{i+2}\ , \tag{4.1}$$

para $0 \leq i \leq n-2$.

Prova. Sabemos que

$$\begin{aligned} H_{i-1}H_{i+1} &\leq H_i^2,\ i = 1, 2, ..., n-1 \text{ e} \\ H_i H_{i+2} &\leq H_{i+1}^2,\ i = 0, 1, ..., n-2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

são equivalentes (ver [HLP], p.104).

Para $i = 0$, temos, por (4.2) e a equação de Gauss,

$$H_1^2 - H_2 \geq 0. \tag{4.3}$$

Para $i = 1$, $H_2 > 0$ (isto implica $H_1 > 0$), temos, usando (4.2), que

$$H_1 H_3 \leq H_2^2 \quad \text{, isto é,} \quad H_2 \geq \frac{H_1 H_3}{H_2}. \tag{4.4}$$

Agora, por (4.3) e (4.4),

$$H_1 \geq \frac{H_2}{H_1} \geq \frac{H_1 H_3}{H_1 H_2} = \frac{H_3}{H_2},$$

isto é,

$$H_1 H_2 - H_3 \geq 0. \tag{4.5}$$

Para $i = 2$ e $H_3 > 0$ (isto implica $H_1 > 0,\ H_2 > 0$), temos por (4.2),

$$H_2 H_4 \leq H_3^2 \quad \text{, isto é,} \quad H_3 \geq \frac{H_2 H_4}{H_3} \ . \tag{4.6}$$

Agora, por (4.5) e (4.6), obtemos

$$H_1 \geq \frac{H_3}{H_2} \geq \frac{H_2 H_4}{H_3 H_2} = \frac{H_4}{H_3},$$

isto é,

$$H_1 H_3 - H_4 \geq 0.$$

Suponhamos que a proposição vale para $i = n - 3$, isto é,

$$H_1 H_{n-2} - H_{n-1} \geq 0. \tag{4.7}$$

Então, para $i = n - 2$ e $H_{n-1} \geq 0$ temos, por (4.2),

$$H_{n-2} H_n \leq H_{n-1}^2 \quad \text{, ou seja,} \quad H_{n-1} \geq \frac{H_{n-2} H_n}{H_{n-1}}. \tag{4.8}$$

Por (4.7) e (4.8), temos

$$H_1 \geq \frac{H_{n-1}}{H_{n-2}} \geq \frac{H_{n-2} H_n}{H_{n-1} H_{n-2}} = \frac{H_n}{H_{n-1}}.$$

Portanto,

$$H_1 H_{n-1} - H_n \geq 0.$$

■

Teorema 4.1 ([R2], Teorema 6.1). *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta mergulhada com $\partial M \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0$. Se S_2 é constante positiva, então a distância máxima de M ao hiperplano $\mathbb{R}^n$ é $\sqrt{\frac{2n(n-1)}{S_2}}$.*

Prova. Inicialmente, consideremos uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^{n+1}$, compacta, com S_2 constante positiva, como sendo o gráfico de uma função X_{n+1} definida num compacto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial M \subset \mathbb{R}^n$.

Escolheremos o vetor N normal a M, tal que $N_{n+1} \leq 0$. Observe que com esta escolha, o operador L_1 é elíptico positivo definido.

Sejam H_i as i-ésimas funções curvaturas médias de M, definidas por $S_i = \binom{n}{i} H_i$.

É conhecido que (ver [HLP]),

$$H_{i-1}H_{i+1} \leq H_i^2 \ (1 \leq i < n), \tag{4.9}$$
$$H_1 \geq H_2^{1/2} \geq H_3^{1/3} \geq ... \geq H_i^{1/i}, \tag{4.10}$$

quando H_1, H_2,..., H_i são não-negativas.

Agora, observe que podemos reescrever a desigualdade (4.1) em função das S_i, isto é,

$$(n-i-1)S_1S_{i+1} - n(i+2)S_{i+2} \geq 0, \tag{4.11}$$

$i \leq n-2$.

Assim, como S_2 é constante positiva em M, temos $H_i > 0$ para $i \leq 2$ e, portanto, podemos usar a desigualdade (4.11) com $i = 1$, ou seja,

$$(n-2)S_1S_2 - 3nS_3 \geq 0 \tag{4.12}$$

Definamos a função $f = \left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} X_{n+1} + N_{n+1}$, onde $c_2 = \binom{n}{2}$.

Baseado nos resultados do Capítulo 2, iremos calcular o valor de L_1 aplicado à função f definida acima.

Podemos escrever f como o produto $\left\langle \left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} X + N, (0, ..., 0, 1) \right\rangle$.

Assim,

$$\begin{aligned} L_1(f) &= L_1\left(\left\langle \left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} X + N, (0,0,...,0,1) \right\rangle\right) \\ &= L_1\left(\left\langle \left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} X, (0,0,...,0,1) \right\rangle + \langle N, (0,0,...,0,1)\rangle\right). \end{aligned}$$

Como $L_1(\langle X, v\rangle) = \langle L_1(X), v\rangle$ e $L_1(\langle N, v\rangle) = \langle L_1(N), v\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} L_1(f) &= L_1\left(\left\langle \left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} X, (0,0,...,0,1)\right\rangle + \langle N, (0,0,...,0,1)\rangle\right) \\ &= \left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} \langle L_1(X), (0,0,...,0,1)\rangle + \langle L_1(N), (0,0,...,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados em (2.8) e (2.10) e observando que $R_k = 0$ quando S_2 é constante, obtemos

$$\begin{aligned} L_1(f) &= \left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} \langle L_1(X), (0,0,...,0,1)\rangle + \langle L_1(N), (0,0,...,0,1)\rangle \\ &= \left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} \langle 2S_2N, (0,0,...,0,1)\rangle + \langle(-S_1S_2 + 3S_3)N, (0,0,...,0,1)\rangle \\ &= \left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} (2S_2N_{n+1} + (-S_1S_2 + 3S_3)N_{n+1}) \\ &= \left[S_2\left(2\left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} - S_1\right) + 3S_3\right] N_{n+1} \\ &= \left[S_2\left(2\left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} - S_1\right) + \left(\frac{n-2}{n}\right) S_1S_2 - \left(\frac{n-2}{n}\right) S_1S_2 + 3S_3\right] N_{n+1} \\ &= \left[S_2\left(2\left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} - S_1 + S_1 - \frac{2}{n}S_1\right) - \left(\frac{(n-2)S_1S_2 - 3nS_3}{n}\right)\right] N_{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto, usando (4.12) e o fato que $N_{n+1} \leq 0$,

$$L_1(f) \geq S_2\left(2\left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{n}S_1\right) N_{n+1}.$$

Como S_1 e S_2 são não-negativas, temos, por (4.2), que $\left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{S_1}{n}$. Concluímos então que $L_1(f) \geq 0$.

Por outro lado, por hipótese, $\partial M \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0$. Logo, $X_{n+1}\big|_{\partial M} = 0$ e, portanto, $f\big|_{\partial M} \leq 0$.

Como o operador L_1 é elíptico, o Princípio do Máximo nos garante que f atinge seu máximo no interior de M somente se f for constante, o que não é o caso. Então, o máximo de f é não positivo, daí $f \leq 0$ em toda M, ou seja,

$$\left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} X_{n+1} + N_{n+1} \leq 0 \text{ em } M.$$

Portanto,

$$\left(\frac{S_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} X_{n+1} \leq -N_{n+1} \leq 1,$$

isto é,

$$X_{n+1} \leq \left(\frac{c_2}{S_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Consideremos agora, M hipersuperfície compacta, mergulhada, com $\partial M \subset \mathbb{R}^n$. A conclusão do teorema será uma aplicação da idéia da prova do princípio de reflexão de Alexandrov a M(ver [A]). Com efeito, consideremos um hiperplano Q paralelo a $\mathbb{R}^n$ cuja interseção com M é vazia. Fazendo Q se aproximar paralelamente da hipersuperfície $\mathbb{R}^n$ temos um novo plano Q_1 (transladado de Q) tocando M num primeiro ponto. Quando fazemos Q_1 deslizar (sempre na mesma direção) para um posição Q_2, temos que a reflexão em relação a Q_2 da parte de M que se encontra acima deste hiperplano, localiza-se no interior da região limitada por M e pela região na hipersuperfćie $\mathbb{R}^n$ que é limitada pela fronteira de M (isso é conseqüência imediata do princípio da tangência), ou seja, a parte de M acima de Q_2 é um gráfico. Podemos usar este argumento até que a reflexão da parte acima do hiperplano transladado toque a hipersuperfície $\mathbb{R}^n$, onde está o bordo de M. Isso ocorre, exatamente, quando o hiperplano transladado divide a altura de M em duas partes iguais. Com isso, garantimos que a parte de M acima de tal hiperplano é gráfico, e pelo resultado acima, com altura máxima $\left(\frac{c_2}{S_2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Então, a altura máxima de M será $2\left(\frac{c_2}{S_2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

■

Comentários. Heinz em [H2], 1955, obteve estimativa de altura para gráfico de curvatura média constante em $\mathbb{R}^{n+1}$, além disso, como o objetivo desse trabalho é tratar das hipersuperfícies com curvatura escalar constante, particularizamos o *Teorema de Rosenberg* para $r = 1$, mas o resultado vale para $r = 0, 1, ..., n-1$. Assim,

Teorema (Rosenberg). *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície compacta, mergulhada, com $\partial M \subset \mathbb{R}^n$. Se S_{r+1} é constante positiva em M, então a distância máxima de M para o hiperplano $\mathbb{R}^n$ é $2\left(\frac{c_{r+1}}{S_{r+1}}\right)^{\frac{1}{r+1}}$, onde $c_{r+1} = \binom{n}{r+1}$.*

Bibliografia

[A] Alexandrov, A. D., *A characteristic property of spheres*, Annali di Matematica, **58** (1962), 303-315.

[BC] Barbosa, J.L., Colares, A.G., *Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature*, Ann. Global Anal. Geom., **15** (1997), 277-297.

[C] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemanniana Geometry*, Academic Press, New York, 1984.

[CY1] Cheng, S.Y., Yau, S.T., *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann., **225** (1977), 195-204.

[CY2] Cheng, S.Y., Yau, S.T., *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Commun. Pure Appl. Math., **XXVIII** (1975), 333-354.

[dC] Carmo, M. do, *Riemannian Geometry* , Birkhäuser Boston, 1992.

[GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlim, Second Edition, 1983.

[H1] Hartman, P., *On complete hypersurfaces of non negative sectional curvatures and constant m'th mean curvature*, Trans. Amer. Math. Soc., **245** (1978), 363-373.

[H2] Heinz, E., *Über Flächen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind* , Math Ann., **129** (1955), 451-454.

[HLP] Hardy, G., Littlewood, J. E. and Pólya G., *Inequalities*, Second Edition, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1989.

[HN] Hartman, P., Nirenberg, L., *On spherical image maps whose Jacobians do note change sign.*, Amer. J. Math., **81** (1959), 901.

[R1] Reilly, R., *Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms*, J. Diff. Geom., **8** (1973), 465-477.

[R2] Rosenberg, H., *Hypersurfaces of constant curvature in space formas*, Bull. Sc. Math., 2^e série, **117** (1993), 211-239.

[S] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Second edition, vol.4, Publish or Perish, Berkeley, 1979.

[SY] Schoen, R. and Yau, S.-T., *Lectures on Differential Geometry*, vol.1, International Press, 23-25, 1994.

[V] Voss, K., *Einige differentialgeometrische Kongruenzätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen*, Math. Ann., **131** (1956), 189-218.

[W] Wu, H., *The spherical images of convex hypersurfaces*, J. Differential Geometry, **9** (1974), 279-290.