

## Conteúdos para exames de qualificação escritos

### ANALISE

#### Análise Funcional

- 1) Teoremas de Hahn-Banach real, complexo e geométrico.
- 2) Teoremas da Aplicação aberta e do gráfico fechado
- 3) Topologias fracas e o teorema de Banach-Alaoglu
- 4) A representação de Riesz em espaços de Hilbert e o adjunto de Hilbert. Representação em espaços pré-hilbertianos.
- 5) Espaços reflexivos e compacidade sequencial
- 6) Operadores compactos em espaços de Hilbert: operadores de posto finito, de Hilbert-Schmidt e densidade.
- 7) Teorema espectral para operadores compactos auto-adjuntos

#### Teoria espectral

- 1) Espectro e Componentes Espectrais. Espaços Invariantes Associados. Semicontinuidade de Componentes Espectrais e continuidade de Espaços Associados..
- 2) Teorema Espectral: Cálculo funcional contínuo e mapeamento espectral para operadores auto-adjuntos e normais.
- 3) Teorema Espectral: Projeções espectrais. Critério de Weyl. Espectros essencial e discreto.
- 4) Teorema Espectral para operadores Normais: Forma Multiplicativa. Dedução da forma Multiplicativa a partir do Cálculo Funcional contínuo e vice-versa.
- 5) Teorema Espectral para operadores normais limitados: Cálculo Funcional Mensurável.
- 6) Operadores Fechados e Fecháveis. Critérios. Teorema Espectral para operadores ilimitados auto-adjuntos.
- 7) Grupos fortemente Contínuos e o Teorema de Stone.
- 8) Transformada de Fourier no  $\mathbb{R}^n$  e Funções de Operador Laplaciano. Espaços de Sobolev

### SISTEMAS DINÂMICOS

#### Dinâmica Hiperbólica

- 1) Teorema de Grobman-Hartman e estabilidade local de pontos fixos hiperbólicos de campo de vetores
- 2) Teorema de Kupka-Smale para difeomorfismos
- 3) Teorema da Variedade Estável para ponto fixo hiperbólico de difeomorfismo e campo de vetores
- 4) Teorema da Variedade Estável para conjunto hiperbólico de difeomorfismo e campo de vetores.

- 5) Teorema de Decomposição espectral para difeomorfismos Axioma A.
- 6) Teorema de Decomposição espectral para campos de vetores Axioma A.
- 7) Lema de somreamento de peças básicas de um difeomorfismo e aplicações.
- 8) Estabilidade estrutural de peças básicas localmente maximais de difeomorfismo.

## Teoria Ergódica

- 1) Teorema de Recorrência de Poincaré (mensurável e topológico), transformações de primeiro retorno e Teorema de Kac;
- 2) Teorema de Birkhoff, ergodicidade, mixing, ergodicidade de sistemas Anosov
- 3) Existência de medidas invariantes para transformações contínuas e Teorema de Decomposição Ergódica.
- 4) Sistemas fortemente misturadores, fracamente misturadores e unicamente ergódicos.
- 5) Existência de medida invariante absolutamente contínua para sistemas uniformemente expansores.
- 6) Entropia, Teorema de Kolmogorov-Sinai e Teorema de Shannon-McMillan-Breiman
- 7) Pressão Topológica e Princípio Variacional. Exemplos.

## **GEOMETRIA DIFERENCIAL**

Primeira disciplina:

### Geometria Riemanniana I

1. Geodésicas, vizinhanças normais e convexas e existência de coordenadas geodésicas;
2. Primeira e Segunda variações de energia e Aplicações;
3. Campos de Jacobi e pontos conjugados;
4. Lema do Índice e Teorema do Índice de Morse;
5. Teoremas de Comparação de Rauch e aplicações;
6. Teorema de Comparação da Hessiana;
7. Teorema de Bonnet Myers e Teorema de Hadamard
8. Teorema de Hopf-Rinow;

Segunda disciplina:

### Opção 1: Geometria Riemanniana II

1. Subvariedades e suas equações Fundamentais;
2. Subvariedades mínimas e sua caracterização variacional;
3. O princípio da tangência e o Teorema de Alexandrov;
4. O Teorema de Takahashi e aplicações;
5. Fórmula de Bochner para funções suaves e Teorema de Obata;
6. O princípio do máximo de Hopf;
7. A fórmula de Reilly e aplicações.

Opção 2: Métodos geométricos em EDP não lineares

1. Grupos e Algebras de Lie
2. Teorema de Frobenius e aplicações na integração de equações diferenciais.
3. Variedades simpléticas e teorema de Darboux.
4. Geometria das EDP da primeira ordem e método das características.
5. Leis de conservação e teorema de Noether.
6. Distribuição de Cartan e simetrias
7. Formalismo hamiltoniano para EDP evolutivas
8. Sistemas bi-hamiltonianos.

## ÁLGEBRA

### Opção 1

#### Algebra Comutativa

1. Anéis e Módulos de Fração – Anéis Locais e Localização.
2. Condição da cadeia, Anéis Noetherianos e Artinianos.
3. Anéis de valorização discreta e Anéis de Dedekind.
4. Decomposição primária em anéis Noetherianos.
5. Dependência Integral: Teoremas going-up e going-down.
6. Teorema da base de Hilbert e aplicações.
7. Teorema da normalização de Noether e aplicações.
8. Teorema dos zeros de Hilbert e aplicações.

#### Teoria Algébrica dos Números

1. Anel dos inteiros algébricos de um corpo de números, normas e traços.
2. Bases integrais e discriminante de corpos de números.
3. Decomposição de ideais em um domínio de Dedekind.
4. Norma e classes de ideais: finitude do número de classes.
5. Decomposição de ideais primos em uma extensão..
6. A decomposição de ideais primos em extensões Galoisianas.
7. Representação geométrica de números algébricos e aplicações.

### Opção 2

#### Teoria de Grupos

1. séries derivadas e centrais
2. propriedades dos grupos nilpotentes
3. Subgrupos de Frattini e Fitting.
4. Grupos livres
5. Aplicação do homomorfismo Transfer
6. Teoria da extensão
7. Representação matricial de grupos

## Teoria dos Anéis

1. A Álgebra dos ideais de um anel
2. Localização em anéis
3. Condições de cadeia: Anéis artinianos e noetherianos.
4. Módulos semi-simples
5. Anéis e o radical de Jacobson
6. Anéis primitivos
7. Radicais de Brown-McCoy e Levitzki
8. Anéis de grupos

## PROBABILIDADE

### Teoria da Probabilidade

1. Lei 0-1 de Kolmogorov
2. Lei Fraca dos Grandes Números
3. Lei Forte dos Grandes Números
4. Teorema Central do Limite de Lindeberg-Feller
5. Convergência fraca e Teorema de Portmanteau
6. Rigidez e Teorema de Prohorov
7. Funções Características e Teorema de Continuidade de Lévy.
8. Teorema de Donsker.

### Processos estocásticos I

1. Desigualdade de "Downcrossings" e convergência quase certa.
2. Desigualdade de Doob
3. Integrabilidade uniforme e convergência em  $L^p$  de martingais.
4. Teorema da Parada Opcional
5. Cadeias de Markov: medidas invariantes, propriedade de Markov
6. Convergência em Variação Total de Cadeias de Markov e acoplamento
7. Recorrência e transiência de passeios aleatórios.