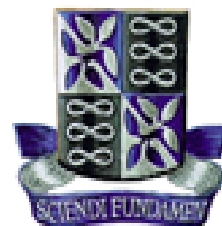




UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



INTERVALOS ERRANTES EM APLICAÇÕES DE LORENZ  
COM DISTORÇÃO LIMITADA <sup>1</sup>

*Cláudio Soares Vivas*

**Salvador-Bahia**

Agosto 2003

---

<sup>1</sup>Baseado no Artigo: 'WANDERING INTERVALS FOR LORENZ MAPS WITH BOUNDED NONLINEARITY'

D. BERRY AND B. D. MESTEL

INTERVALOS ERRANTES EM APLICAÇÕES DE LORENZ COM DISTORÇÃO  
LIMITADA.

*Cláudio Soares Vivas*

*Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.*

**Banca examinadora:**

---

*Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (Orientador).*

---

*Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Jr.*

---

*Prof. Dr. José Ferreira Alves.*

VIVAS, CLÁUDIO SOARES

“INTERVALOS ERRANTES EM APLICAÇÕES DE LORENZ COM DISTORÇÃO LIMITADA” / Cláudio Soares Vivas. Salvador-Ba, 2003.

**Orientador:** Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (UFBA).

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-graduação em Matemática da UFBA, 34 páginas.

**Palavras-Chave:** Aplicações de Lorenz, distorções limitadas, intervalos errantes.

*“Viver é mais que a gota no tempo que a vida de cada um e nós.  
Viver é mais do que sobreviver nas horas e locais difíceis da vida.  
Viver é amar,  
vir ao mundo, cumprir uma missão.  
Por isso, viver esconde muito mais do que nós imaginamos.”*

**Cláudio Vivas, 1988.**

# Agradecimentos

Neste momento de extrema alegria tenho a satisfação de agradecer à colaboração e companheirismo de algumas pessoas. Além de Deus e minha família (representada na figura de minha Mãe) agradeço com minha amizade a: Adriano Cattai, Alex, Andréa, Azly, Caliteia, Carla, Érica, Gabriela, Gilmar, Geciara, Ivana, Ismar, Jorge, Laura, Maurício, Nelson Almeida, Odete Amanda, Paulo Henrique, Reinaldo, Rosely, Rui. Aos professores Bahiano, Enaldo, Elinalva, Isaac, Marco Antonio e Maria Luiza, pelo profissionalismo e caráter, aos componentes da banca José Alves e Armando, especialmente ao professor Vilton Jeovan pela disponibilidade, sugestões e dedicada orientação. Finalmente, à secretária Tânia por ter sido sempre tão prestativa.

# Resumo

Nesta dissertação trabalharemos com dinâmica unidimensional e temos como principal objetivo classificar as aplicações de Lorenz com distorção limitada.

# Abstract

In this dissertation we will work with one dimensional dynamics and we have as main objective to classify the Lorenz applications with bounded nonlinearity.

# Sumário

Lista de Figuras . . . . .	x
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Aplicações de Lorenz</b>	<b>3</b>
<b>2 Homeomorfismos no círculo e aplicações lacuna</b>	<b>11</b>
2.1 Homeomorfismos no círculo . . . . .	11
2.2 Aplicações lacuna . . . . .	12
<b>3 Aplicações sobreposição</b>	<b>20</b>
<b>Apêndice A</b>	<b>29</b>
Estabilidade Estrutural . . . . .	31
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>33</b>



# Lista de Figuras

1.1	Variedade instável da origem $\rho \in (1, 13, 913)$ . . . . .	4
1.2	Variedade instável da origem $\rho \in (13, 913, 24, 0)$ . . . . .	4
1.3	Lorenz . . . . .	4
1.4	Fluxo através de $\Sigma$ . . . . .	6
1.5	Aplicação de Poincaré . . . . .	6
1.6	Imagem da aplicação de Poincaré . . . . .	6
1.7	Intervalo da aplicação $f$ . . . . .	7
1.8	Aplicação relacionada ao fluxo de Lorenz . . . . .	9
1.9	Tipos de aplicações de Lorenz com distorção limitada . . . . .	9
2.1	Aplicações Círculo . . . . .	11
2.2	Aplicações Lacuna . . . . .	12
2.3	Levantamento da aplicação lacuna . . . . .	13
3.1	Aplicações Sobreposição . . . . .	20
3.2	. . . . .	22
3.3	Renormalização à aplicação lacuna . . . . .	23

3.4 Gráfico da construção da  $f_1$  . . . . . 25

# Introdução

O atrator de Lorenz é um conjunto de dimensão fractal contido no  $\mathbb{R}^3$  que surgiu por volta de 1962 quando o meteorologista Edward Norton Lorenz buscava uma modela em matemática para previsão do clima. Desde os meados dos anos 70, o atrator de Lorenz vem se constituindo em uma área bastante explorada pelos dinamicistas. Como o próprio título da dissertação sugere, abordaremos neste trabalho as aplicações de Lorenz que são funções  $f : I \rightarrow I$ , onde  $I = [a, b]$ , com  $a < 0 < b$ , e que modelam o atrator original. É importante salientar que as aplicações de Lorenz tomadas aqui não são quaisquer aplicações, mas sim, aquelas que apresentam um controle da distorção. O controle da distorção é o ingrediente fundamental neste trabalho, sem o qual torna resultados apresentados aqui em problemas em aberto.

Este trabalho é baseado no artigo [BM] de D. Berry e B. D. Mestel cujo objetivo é investigar em que condições as aplicações de Lorenz apresentam intervalos errantes que são objetos indesejáveis em dinâmica unidimensional.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

No capítulo 1 mostraremos como a dinâmica original descrita por um sistema de equações diferenciais é modelada por uma aplicação de um intervalo nele próprio. Para tanto, utilizaremos o Lorenz geométrico, onde estudaremos o comportamento do campo, através de seus autovalores, na vizinhança da singularidade, no caso o  $0 = (0, 0, 0)$ . Lá veremos que a relação entre os autovalores é determinante para se classificar o atrator de Lorenz como contrativo ou expansivo. Nós trabalharemos apenas o Lorenz contrativo, com a derivada afastada do zero, e explicaremos o porquê disto. Além disso, definiremos o que são os intervalos errantes bem como veremos através de uma seção de Poincaré como as aplicações de Lorenz surgem.

Nos capítulos 2 e 3 investigaremos a ocorrência dos intervalos errantes nos três tipos de

aplicações de Lorenz a se estudar. No capítulo 2, seção 1, veremos que para os homeomorfismos no círculo com distorção limitada, também chamadas aqui de aplicações círculo, não há intervalos errantes. Na seção 2 do capítulo 2, abordaremos as aplicações de Lorenz não sobrejetivas ou aplicações lacuna, onde veremos que no caso do número de rotação  $\rho(f)$  (ver definição no apêndice) ser irracional a lacuna  $J = (f(b), f(a))$  e as suas iterações são os intervalos errantes da aplicação  $f$ .

Finalmente, no capítulo 3 estudaremos as aplicações sobreposição. Neste capítulo estão os principais resultados deste trabalho onde mostraremos que se houver intervalos errantes e a aplicação sobreposição  $f$  tiver número de rotação irracional,  $f$  é renormalizável a uma aplicação lacuna  $\tilde{f}$  em um intervalo  $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [a, b]$ , onde  $\tilde{a} < 0 < \tilde{b}$ . Portanto, podemos classificar totalmente a ocorrência dos intervalos errantes para as aplicações de Lorenz com distorção limitada.

# Capítulo 1

## Aplicações de Lorenz

Na tentativa de se criar um modelo matemático para a previsão climática, o meteorologista Edward Lorenz, chegou ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= -\sigma x + \sigma y \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \rho x - y - xz \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= xy - \beta z\end{aligned}\tag{1.1}$$

As equações diferenciais (1.1) foram obtidas por uma simplificação do desenvolvimento em série de potência da equação de Navier-Stokes para a previsão do tempo. Este sistema apresenta algum significado físico para  $\rho$  próximo de 1, porém, Lorenz encontrou comportamentos dinâmicos incomuns para  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  e  $\beta = \frac{8}{3}$ .

O sistema apresenta como soluções os pontos  $0 = (0, 0, 0)$ ,  $P^+ = \left(\sqrt{\frac{8(\rho-1)}{3}}, \sqrt{\frac{8(\rho-1)}{3}}, \rho - 1\right)$ ,  $P^- = \left(-\sqrt{\frac{8(\rho-1)}{3}}, -\sqrt{\frac{8(\rho-1)}{3}}, \rho - 1\right)$ , onde podemos observar que para  $\rho = 1$ ,  $P^+ = P^- = (0, 0, 0)$ . Além disso, a simetria de  $P^+$  e  $P^-$  pode ser verificada com uma simples substituição na segunda equação do sistema (1.1). Assim, se  $(x(t), y(t), z(t))$  é uma solução,  $(-x(t), -y(t), z(t))$  também o é.

Calculando os autovalores do campo na vizinhança da origem, obtemos um autovalor positivo  $\lambda_u = \frac{-11 + \sqrt{121 + 40(\rho - 1)}}{2}$  e dois autovalores negativos  $\lambda_s = -\frac{8}{3}$  e  $\lambda_{ss} = \frac{-11 - \sqrt{121 + 40(\rho - 1)}}{2}$ . Note que a variação de  $\rho$  gera modificações nos autovalores. Logo, estudando os efeitos dessa variação no comportamento do campo na vizinhança da origem, temos que para  $1 < \rho < \rho_1 \cong 24,022$  os pontos

$P^+$  e  $P^-$  são atratores. Veja a figura 1.1.

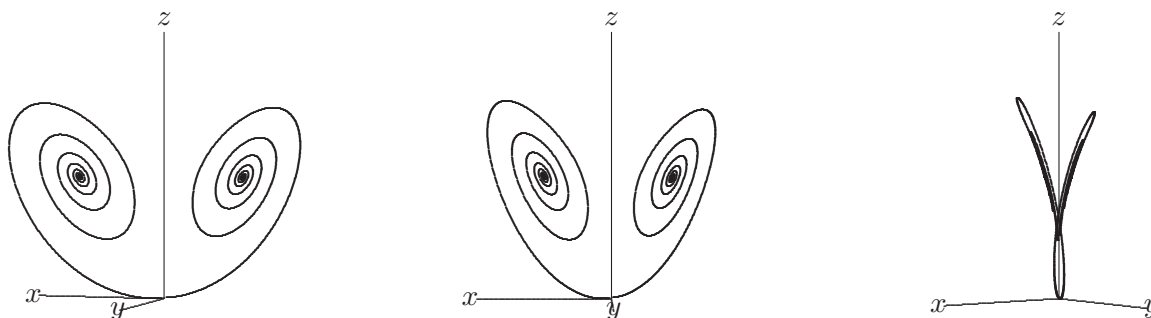


Figura 1.1: Variedade instável da origem  $\rho \in (1, 13,913)$

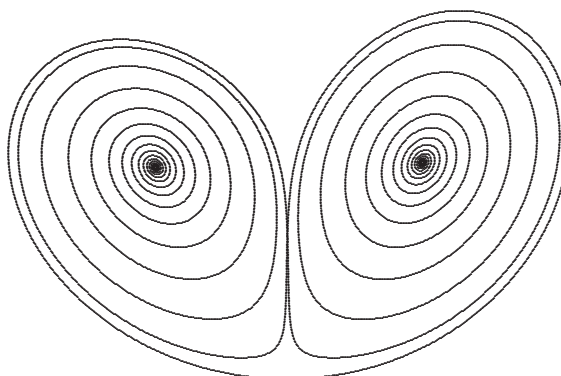


Figura 1.2: Variedade instável da origem  $\rho \in (13,913, 24,0)$ .

O principal caso, no qual Lorenz constatou um comportamento dinâmico fora do comum, para a época, se dá para  $\rho > \rho_1 \cong 24,022$ , caso no qual se encontra o valor de  $\rho = 28$  que é o valor da nossa abordagem (ver Figura 1.3).

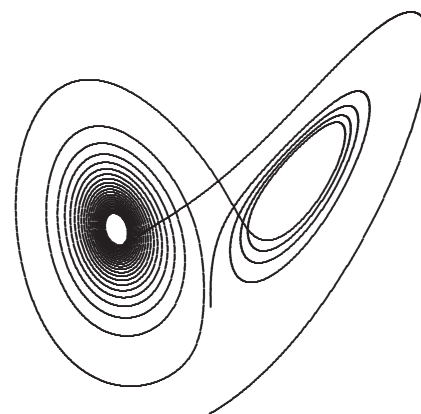


Figura 1.3: Lorenz

Para entendermos melhor o que ocorre na dinâmica para este valor de parâmetro, vamos estudar o campo na vizinhança de  $P^+$  e  $P^-$ . Nestes pontos o polinômio característico é dado pela expressão  $P(\lambda) = \lambda^3 + \frac{41}{3}\lambda^2 + \frac{8}{3}(\rho + 10)\lambda + \frac{160}{3}(\rho - 1)$  que possui para  $\rho_0 \cong 13,913 < \rho < 24,022$  uma raiz real e duas raízes complexas, onde a parte real das raízes complexas é negativa, o que

explica a estabilidade de  $P^+$  e  $P^-$ . Porém para  $\rho > 24,022$  as duas raízes complexas do polinômio característico apresentam a parte real positiva, o que explica a instabilidade que surge a partir deste valor de bifurcação. Assim, os pontos  $P^+$  e  $P^-$  para  $\rho > 24,022$ , em particular  $\rho = 28$ , agem girando e expulsando as partículas em sua proximidade, de tal forma que as variedades instáveis  $\omega^u(0)^+$  e  $\omega^u(0)^-$  cruzam a variedade estável  $\omega^s(0)$  e depois retornam, justificando assim a transitividade que há neste caso. Além disso, dois pontos tomados próximos um do outro, podem depois de um certo intervalo de tempo estar bem distantes, ou seja, a dinâmica das equações de Lorenz pode apresentar dependência sensível as condições iniciais, constituindo-se em um exemplo clássico de sistema dinâmico caótico. Para maiores detalhes de cálculos, veja [Sp].

Este estudo foi desenvolvido por Lorenz através de métodos numéricos por volta de 1962, porém só a partir da segunda metade dos anos 70 é que despertou um interesse maior dos dinamicistas com a introdução do modelo geométrico das equações de Lorenz por Guckenheimer-Williams.

O estudo do sistema (1.1) apresenta um conjunto maximal invariante  $\Delta$  que, mesmo sem se ter certeza (agora já se tem), foi tomado como sendo um conjunto atrator. Além disso, sua robustez sugere que o fluxo seja hiperbólico em  $\Delta$ , o que não é verdade, pois enquanto que na origem o espaço tangente se decompõe em soma direta de um subespaço estável de dimensão dois e um subespaço instável de dimensão um, em outro ponto a decomposição é dada por um subespaço instável, um subespaço estável e uma direção central, isto é,  $E_x^u \oplus E_x^s \oplus E_x^c$ , onde cada subespaço tem dimensão um. Logo, o fluxo descrito pelas equação (1.1) não é hiperbólico. A esse conjunto invariante e robusto  $\Delta$  damos o nome de atrator estranho de Lorenz, o qual será abordado aqui pelo seu modelo geométrico.

Uma vez que o campo  $\mathbb{X}$  das equações de Lorenz é  $C^\infty$  e o  $(0,0,0)$  é um ponto singular hiperbólico, pelo Teorema de Grobman-Hartmann [P], o campo  $\mathbb{X}$  numa vizinhança  $V$  da origem é equivalente ao campo  $D\mathbb{X}$ . Assim, na vizinhança da origem o campo é descrito pela equação linearizada,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= ax \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -by \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -cz\end{aligned}\tag{1.2}$$

onde  $a = \lambda_u \cong 11,83$ ,  $b = -\lambda_{ss} \approx 22,83$  e  $c = -\lambda_s = \frac{8}{3}$ , ou seja,  $0 < c < a < b$ . A solução das equações linearizadas é dada por  $x(t) = e^{at}x_0$ ,  $y(t) = e^{-bt}y_0$  e  $z(t) = e^{-ct}z_0$ .

Considere, agora, as seções transversais ilustradas na figura 1.4.

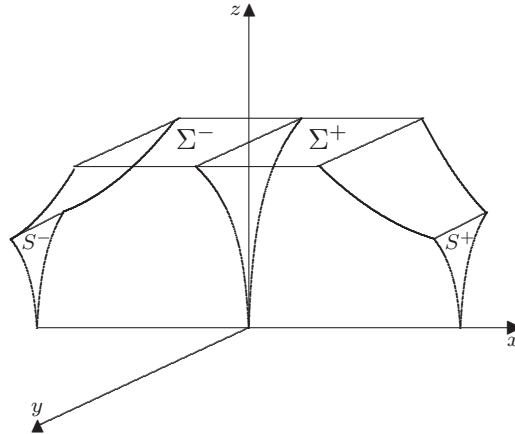


Figura 1.4: Fluxo através de  $\Sigma$

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(x, y, z_0); |x|, |y| \leq \alpha\} \\ \Sigma' &= \{\Sigma \setminus (x, y, z_0); x \neq 0\} \\ S^\pm &= \{(\pm x_1, y, z); |y|, |z| \leq \beta\} \end{aligned}$$

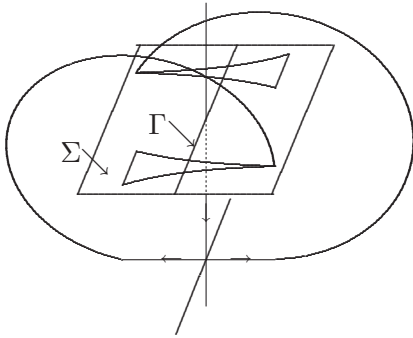


Figura 1.5: Aplicação de Poincaré

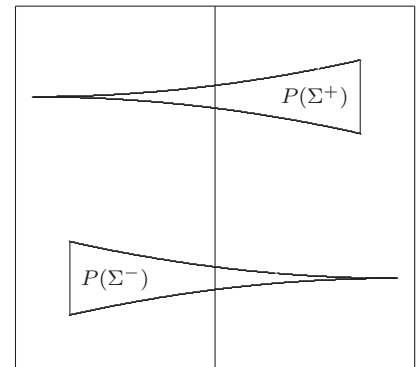


Figura 1.6: Imagem da aplicação de Poincaré

Portanto, se tomarmos  $(x, y, z_0) \in \Sigma'$ , poderemos determinar o tempo  $\tau$  de forma que  $\varphi^\tau(x, y, z_0) \in S = S^+ \cup S^-$  do seguinte modo:

$$\begin{aligned} e^{a\tau}|x| &= x_1 \\ e^\tau &= \left(\frac{x_1}{x}\right)^{\frac{1}{a}}. \end{aligned}$$

Além disso, a aplicação de Poincaré  $P_1 : \Sigma' \rightarrow S$  leva  $(x, y) \in \Sigma'$  (já que  $z_0$  é constante) em  $(y(\tau), z(\tau)) \in S^+$  ou  $S^-$ , onde em  $S^+$  e  $S^-$   $x_1$  é constante, como mostra a figura 1.4. Logo,  $P_1(x, y) = (y(\tau), z(\tau)) = (e^{-b\tau}y, e^{-c\tau}z_0) = \left(y\left[\left(\frac{x_1}{x}\right)^{\frac{1}{a}}\right]^{-b}, z_0\left[\left(\frac{x_1}{x}\right)^{\frac{1}{a}}\right]^{-c}\right) = \left(y\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{b}{a}}, z_0\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{c}{a}}\right)$ .



Observe que, se  $x > 0$ , então  $P_1(x, y) \in S^+$  e se  $x < 0$ , então  $P_1(x, y) \in S^-$ . Além disso, como  $\frac{b}{a} = \left| \frac{\lambda_{ss}}{\lambda_u} \right| \cong 1,93 > 1$  e  $\frac{c}{a} = \left| \frac{\lambda_s}{\lambda_u} \right| \cong 0,23 < 1$ , temos que  $\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{b}{a}}$  tende a zero, pois  $\frac{x}{x_1} < 1$  e  $\frac{b}{a} > 1$  e  $\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{c}{a}}$  tende a 1 já que  $\frac{c}{a} < 1$ . Logo, segmentos de reta com o mesmo valor de  $x$ , ou seja, as folhas  $(x_i, y, z_0)$  são levados em segmentos de reta com o mesmo valor  $z_j$  em  $S^+$  ou  $S^-$ , retornando depois através de uma aplicação de Poincaré  $P_2 : S^+ \rightarrow \Sigma$  ou  $P_2 : S^- \rightarrow \Sigma$  os segmentos  $(x_1, y, z_j)$  em  $S^+$  ou  $S^-$  para  $(x_{i+1}, y, z_0)$  em  $\Sigma$ . Veja figura 1.5. Logo, a composta é uma aplicação de  $\Sigma'$  em  $\Sigma$ , ou seja,  $P = P_2 \circ P_1 : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ , cuja imagem de  $\Sigma'$  por  $P$  é dada na Figura 1.6. Portanto,  $P(x, y) = (f(x), g(x, y))$ , onde para um  $x_0$  fixado, a aplicação  $g(x_0, y)$  é contrativa na direção do eixo  $y$ , isto é,

$$\begin{aligned} |g(x_0, y_1) - g(x_0, y_2)| &= \left| y_1 \cdot \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{b}{a}} - y_2 \cdot \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{b}{a}} \right| = \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{b}{a}} |y_1 - y_2| \\ &\leq \mu |y_1 - y_2|, \text{ para } 0 < \mu < 1, \end{aligned}$$

já que  $0 < \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{b}{a}} < 1$ ,  $|f'(x)| > 1$ , para todo  $x$  com  $|x| \leq \alpha$ .

Visto que  $P : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ , é uma aplicação de  $\Sigma' \subset \mathbb{R}^2$  em  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ , um questionamento natural é: como a aplicação de Lorenz é uma função  $f : I \rightarrow I$ , onde  $I = [a, b]$ , com  $a < 0 < b$ ? Observe que graças a forte contração que há, na direção do eixo  $y$ , devido ao autovalor  $\lambda_{ss}$  os pontos de  $\Sigma'$  que possuem um mesmo  $x$ , ou seja, estão numa mesma folha, têm o mesmo  $\omega$ -limite. Este comportamento é que nos permite reduzir a dimensão do problema na medida em que podemos considerar cada folha como uma classe de pontos com o mesmo  $\omega$ -limite e cujo representante é o ponto  $x$  de intersecção da folha  $\gamma$  com o segmento horizontal  $I$  de  $\Sigma$ . Desta forma, o estudo da dinâmica da aplicação  $P$  resume-se a observar a trajetória apenas do representante de cada folha.

Na figura 1.7 vemos que  $x$  é a intersecção de  $\gamma_1$  com o intervalo horizontal  $I$  de  $\Sigma$ , ou seja,  $x$  é o representante de  $\gamma_1$ . Assim,  $P(\gamma_1)$  está contido em  $\gamma_2$ , onde  $I \cap \gamma_2 = f(x)$ . Portanto, é desta forma que a aplicação de Lorenz  $f : I \rightarrow I$  é definida. Podemos ver na figura 1.8 a sua representação gráfica, onde o ponto de descontinuidade  $c$  representa a folha  $\Gamma$ .

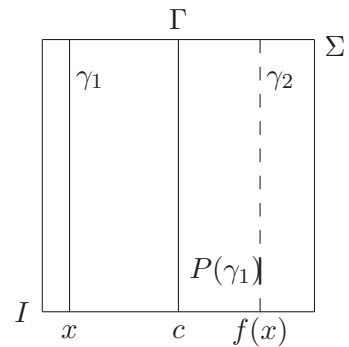


Figura 1.7: Intervalo da aplicação  $f$

Todo o trabalho desenvolvido até aqui mostra como um sistema dinâmico no  $\mathbb{R}^3$  descrito

por um conjunto de equações diferenciais pode ser reduzido a uma aplicação  $f : I \rightarrow I$  a qual é uma modelagem unidimensional do sistema original. É importante salientar também que, até aqui, utilizamos o modelo usual do atrator geométrico de Lorenz, cuja a condição é de expansão  $|\lambda_u| > |\lambda_s|$ . Já estamos, portanto, em condições de definir os elementos centrais do nosso estudo.

**1.1 DEFINIÇÃO.** *Uma aplicação  $f : I \rightarrow I$ , onde  $I = [a, b]$  com  $a \leq 0 \leq b$ , é chamada de aplicação de Lorenz, se:*

- (i)  $f|_{[a,0]}$  e  $f|_{(0,b]}$  são homeomorfismos crescentes em suas imagens;
- (ii)  $f(0-) = b$  e  $f(0+) = a$ , onde  $f(0-)$  e  $f(0+)$  denotam os limites de  $f$  em 0 à esquerda e à direita, respectivamente.

Neste trabalho a matéria de nosso estudo é na verdade uma classe específica de aplicações de Lorenz que apresentam variação limitada e cuja definição segue abaixo.

Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação de Lorenz satisfazendo:

- (a)  $f|_{[a,0-]}$  e  $f|_{[0+,b]}$  são de classe  $C^1$ ;
- (b)  $\log |Df|$  é lipschitziana (veja definição no apêndice) em  $[a, 0)$  e em  $(0, b]$ .

Denotamos por  $\mathcal{F}$  o conjunto de todas as aplicações de Lorenz satisfazendo as condições (a) e (b).

Uma outra definição importante é a seguinte:

**1.2 DEFINIÇÃO.** *Chamamos de intervalo errante para uma aplicação  $f : I \rightarrow I$ ,  $I = [a, b]$ , o intervalo  $J \subset I$  o qual satisfaz as seguintes condições:*

- (i)  $J, f(J), f^2(J), \dots$  são dois a dois disjuntos;
- (ii)  $J$  não está contido na bacia de atração de uma órbita periódica atratora.
- (iii)  $f^n|_J$  é um homeomorfismo para todo inteiro positivo  $n > 0$ .

Como já referido anteriormente, trabalhamos até aqui com o atrator de Lorenz geométrico com a condição de expansão  $|\lambda_u| > |\lambda_s|$ . Uma vez que, para esta condição,  $|f'(x)| > 1, \forall x \in I$ , (veja gráfico de  $f$  na figura 1.8), assim não faz sentido estudarmos a ocorrência de intervalos errantes para este tipo de aplicação com a condição de expansão, uma vez que, para todo intervalo  $J \subset I, |f^n(J)| \geq |J|$ , qualquer que seja  $n \geq 0$  e, portanto,  $\sum_{n=1}^{\infty} |f^n(J)| = \infty$ . Logo, pelo fato de que o comprimento dos intervalos errantes, através das iterações, tenderem a zero, temos que, para aplicações com  $|Df| \geq 1$  em todos os pontos de  $I$  não existem intervalos errantes.

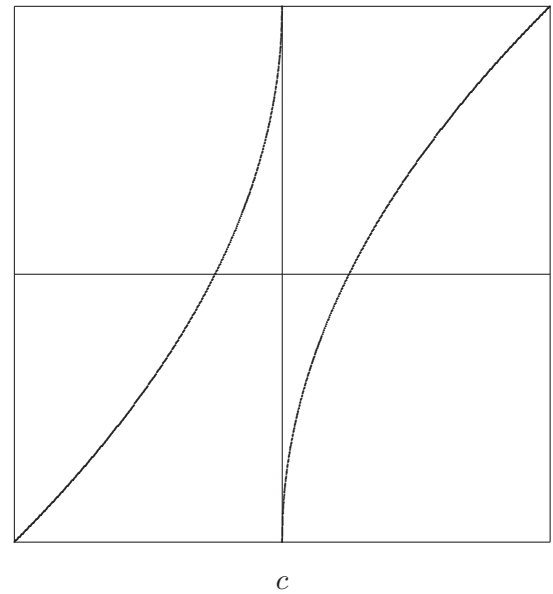


Figura 1.8: Aplicação relacionada ao fluxo de Lorenz

Assim, devemos investigar a existência desses intervalos em aplicações de Lorenz  $f$  em  $\mathcal{F}$  com  $|Df|$  não necessariamente superior a 1. Desta forma, devemos trabalhar com o atrator geométrico de Lorenz cuja condição seja a de contração, isto é,  $|\lambda_u| < |\lambda_s|$  ao invés da condição expansiva  $|\lambda_u| > |\lambda_s|$  do atrator usual.

Nos próximos capítulos estudaremos os três possíveis casos de aplicações de Lorenz ilustrados pela Figura 1.9.

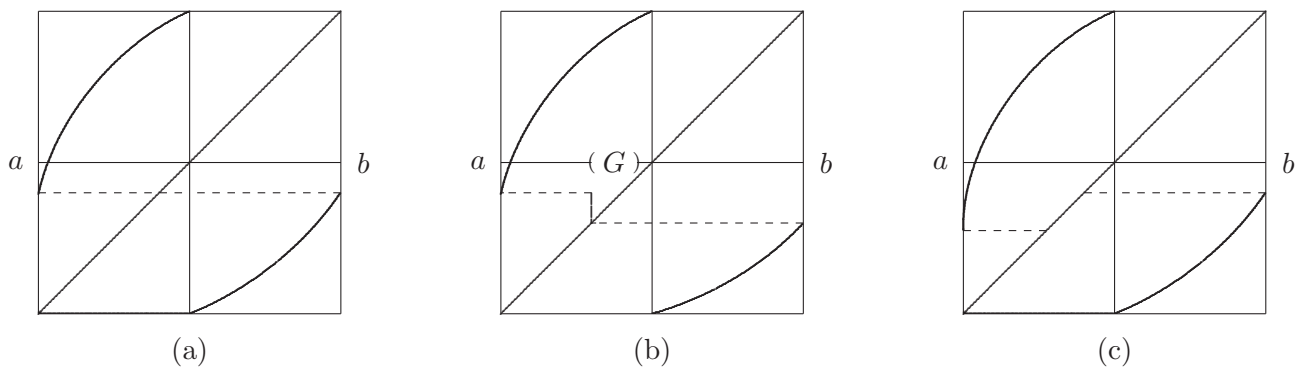


Figura 1.9: Tipos de aplicações de Lorenz com distorção limitada

É importante salientar que todo este estudo de Lorenz geométrico ainda carecia de um resultado que assegurasse que o conjunto  $\Delta$ , chamado de atrator de Lorenz, era de fato um atrator, o

que garantiria que  $\Delta$  se encaixava no modelo do Lorenz geométrico. Porém, no final da década de 90, W. Tucker apresentou o seguinte resultado o qual garante a validade da abordagem pelo modelo do Lorenz geométrico.

**1.3 TEOREMA.** *Para os parâmetros clássicos as equações de Lorenz apresentam um atrator estranho robusto.*

*Demonstração.* Ver [T] e [Tu].

## Capítulo 2

# Homeomorfismos no círculo e aplicações lacuna

### 2.1 Homeomorfismos no círculo

A Figura (2.2) ilustra o primeiro dos três tipos de aplicações de Lorenz, onde  $f(a) = f(b)$ . Neste caso, a aplicação  $f$ , que é descontínua no ponto 0, torna-se uma aplicação contínua no círculo com a identificação dos pontos  $a$  e  $b$ , constituindo assim um homeomorfismo. Os homeomorfismos no círculo são aplicações cuja dinâmica é bem conhecida e a resposta sobre a existência ou não de intervalos errantes é  $a$  facilmente dada para esse tipo de aplicação. Caso o número de rotação  $\rho(f)$  seja racional, torna-se trivial com a existência de uma órbita periódica atratora (ver definições no Apêndice). Caso contrário, isto é, o número de rotação seja irracional, a aplicação  $f$  é conjugável a rotação irracional. Para maiores detalhes veja [MS]. A demonstração dessas afirmações segue abaixo.

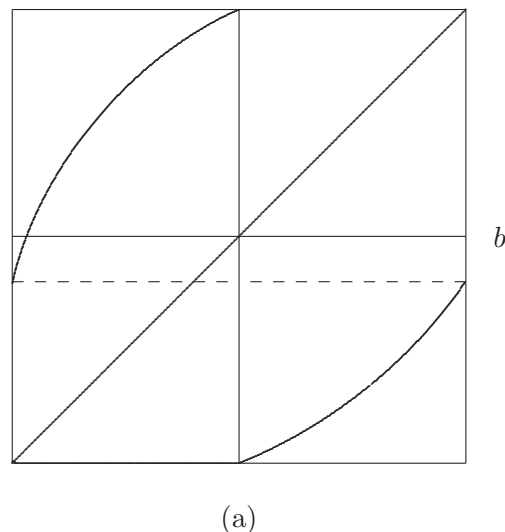


Figura 2.1: Aplicações Círculo

**2.1 PROPOSIÇÃO.** *O número de rotação  $\rho(\hat{f})$  de um homeomorfismo  $\hat{f} : S^1 \rightarrow S^1$  que preserva a orientação é racional se, e somente se, o conjunto dos pontos periódicos é diferente do vazio.*

A demonstração deste proposição encontra-se em [S] e na próxima seção apresentaremos a demonstração de um lema similar para o caso não sobrejetivo. Além disso, segue do Teorema 2.2, abaixo, que para homeomorfismos  $f \in \mathcal{F}$  sem pontos periódicos (homeomorfismos  $f \in \mathcal{F}$  com número de rotação irracional) não existem intervalos errantes, o que finaliza nossa abordagem para esse primeiro tipo de aplicação.

**2.2 TEOREMA.** *Seja  $f : I \rightarrow I$ ,  $I = [a, b]$  um homeomorfismo crescente o qual é  $C^1$  em cada intervalo,  $[a, 0^-]$  e em  $[0^+, b]$ , além disso  $\log |Df|$  é lipschitziana. Então  $f$  não tem intervalos errantes.*

Uma versão mais forte encontra-se demonstrada no Teorema 3.5.

## 2.2 Aplicações lacuna

Abordemos agora o caso não sobrejetivo das aplicações de Lorenz em  $\mathcal{F}$ , onde  $f(a) > f(b)$ , o qual chamaremos de aplicações lacuna. Estas aplicações terão um papel importante no nosso estudo de classificação. O fato da aplicação  $f$  não ser sobrejetiva não impede uma abordagem similar a feita no caso anterior, o das aplicações círculo. Novamente o conceito de número de rotação é utilizado, já que mostraremos que o intervalo  $J = (f(b), f(a))$ , o qual chamaremos de lacuna, e suas iterações é que são os intervalos errantes de  $f$  no caso do número de rotação ser irracional. Falaremos, também, do conjunto minimal atrator (ver apêndice) que, neste caso, é o conjunto de Cantor, e de sua relação com os intervalos errantes.

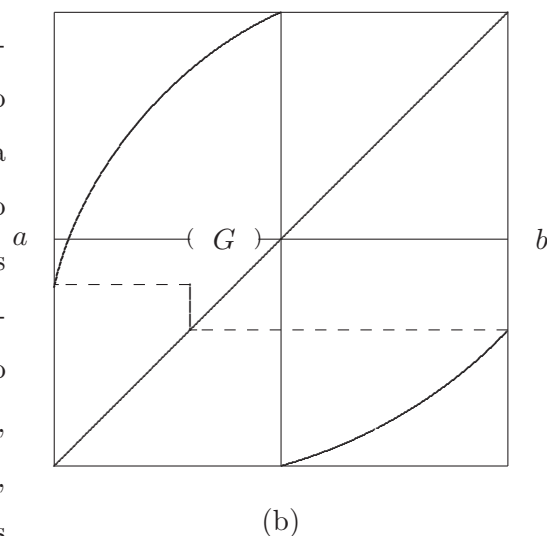


Figura 2.2: Aplicações Lacuna

Vamos agora mostrar como podemos abordar as aplicações lacuna de maneira semelhante às aplicações círculo e iniciamos nossa abordagem dando a definição de um importante elemento para o nosso trabalho.

**2.3 DEFINIÇÃO.** *Chamamos de levantamento de uma função  $\hat{f} : S^1 \rightarrow S^1$  que preserva a orientação, a aplicação  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\hat{f} \circ \pi = \pi \circ F,$$

onde  $\pi = e^{2\pi ix}$  é a aplicação projeção.

Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação de Lorenz não sobrejetiva e  $\hat{f} : S^1 \rightarrow S^1$  sua projeção no círculo. Considere as funções

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \leq c \\ 1 + f(x), & \text{se } x > c \end{cases}$$

onde  $c$  é o ponto de descontinuidade de  $f$  no intervalo  $[0, 1]$  e  $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z}/n \leq x\}$ , então o levantamento de  $\hat{f}$  é uma aplicação  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $F(x) = [x] + f_*(x - [x])$ .

Seja, agora,  $\mathbb{R}_F$  definido da seguinte forma,  $\mathbb{R}_F = \{x \in \mathbb{R}; \pi \circ F^n(x) \neq 1, n \in \mathbb{Z}\}$ . Resta-nos mostrar que  $F(x)$  é levantamento de  $\hat{f}$ . Para isto, devemos provar que:

- (i)  $F$  é não decrescente;
- (ii)  $\pi \circ F = \hat{f} \circ \pi$ .

*Demonstração.* (i) De fato, pois a função  $[x]$  é não decrescente. Além disso,  $f_*$  é crescente, pois,  $f$  o é.

(ii)  $\pi \circ F(x) = e^{2\pi i([x] + f_*(x - [x]))} = e^{2\pi i f_*(x - [x])} = \hat{f} \circ \pi(x)$ .  $\square$

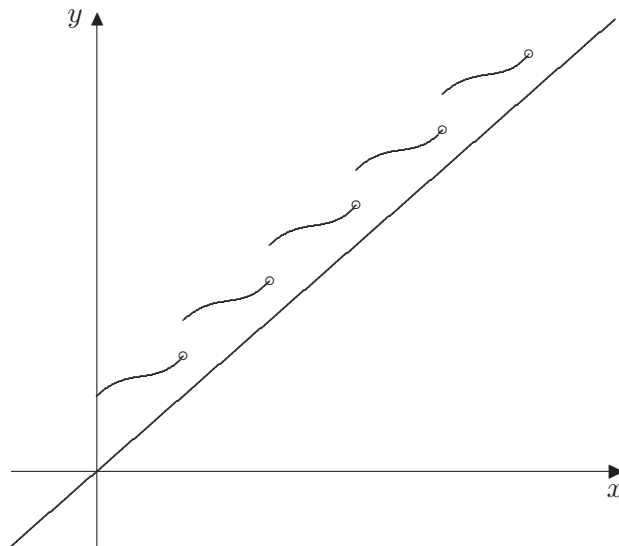


Figura 2.3: Levantamento da aplicação lacuna

**2.4 LEMA.** Se  $F$  é levantamento de  $\hat{f}$  então:

- (1)  $F(x + 1) = F(x) + 1$ ;

(2)  $F(x) - x$  é periódica de período 1.

*Demonstração.*

$$(1) F(x+1) = [x+1] + f_*(x+1 - [x+1]) = [x] + 1 + f_*(x+1 - [x] - 1) = [x] + f_*(x - [x]) + 1 = F(x) + 1;$$

(2)  $F(x+1) - (x+1) = F(x) + 1 - x - 1 = F(x) - x$ . Portanto,  $F$  é de período 1.  $\square$

**2.5 LEMA.** Se  $F$  é levantamento de  $\hat{f}$ , então, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , teremos:

$$(1) F^n(x+1) = F^n(x) + 1;$$

(2)  $F^n(x) - x$  é periódica de período um;

(3)  $F^n$  é não decrescente.

Onde  $F^n$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}_F$ , ou seja,  $F^n : \mathbb{R}_F \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Demonstração.*

(1) Provemos por indução em  $n$ . Para  $n = 1$  temos o item 1 do Lema anterior. Suponha válido para  $n - 1$ . Assim,  $F^n(x+1) = F(F^{n-1}(x+1)) = F(F^{n-1}(x) + 1) = F^n(x) + 1$ .

$$(2) F^n(x+1) - (x+1) = F^n(x) + 1 - x - 1 = F^n(x) - x.$$

(3) Imediato.  $\square$

Considere o conjunto  $S_1^1 = \{x \in S^1; \hat{f}^j(x) \neq 1, j \geq 0\}$ . Temos que  $Leb(S^1 \setminus S_1^1) = 0$ , pois, o conjunto  $\{x \in S^1; \hat{f}^j(x) = 1\}$  é enumerável e, portanto, de medida nula. Assim, temos que  $\pi(\mathbb{R}_F) = S_1^1$  e que  $Leb(\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_F) = 0$ .

**2.6 PROPOSIÇÃO.** Se  $F$  é levantamento de  $\hat{f}$  e  $e \in \mathbb{R}_F$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(e)}{n}$  existe.

*Demonstração.* Basta mostrar que  $a_n = \frac{F^n(e)}{n}$  é uma seqüência de Cauchy.

$$\text{Afirmação: } \left| \frac{F^{ab}(e)}{ab} - \frac{F^a(e)}{a} \right| \leq \frac{2(e+1)}{a}, \forall a \neq 0 \text{ e } b \neq 0 \text{ pertencentes a } \mathbb{Z}.$$



Seja  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $e + k \leq F^a(e) \leq k + 1 + e$ . Como  $F$  é crescente teremos.

$$\begin{aligned} F^a(k + e) &\leq F^{2a}(e) \leq F^a(k + 1 + e) \\ F^a(e) + k &\leq F^{2a}(e) < F^a(e) + k + 1 \\ e + k + k &\leq F^{2a}(e) \leq k + 1 + e + k + 1 \\ e + 2k &\leq F^{2a}(e) \leq e + 2(k + 1). \end{aligned}$$

Aplicando o argumento acima  $b$  vezes temos,

$$\begin{aligned} e + bk &\leq F^{ab}(e) &&\leq e + b(k + 1) \\ bk &\leq F^{ab}(e) - e &&\leq b(k + 1) \\ 0 &\leq \frac{F^{ab}(e) - e}{ab} - \frac{k}{a} &&\leq \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F^{ab}(e)}{ab} - \frac{F^a(e)}{a} \right| &= \left| \left[ \frac{F^{ab}(e)}{ab} - \left( \frac{k}{a} + \frac{e}{ab} \right) \right] - \left[ \frac{F^a(e)}{a} - \left( \frac{k}{a} + \frac{e}{ab} \right) \right] \right| \\ &\leq \left| \frac{F^{ab}(e)}{ab} - \left( \frac{k}{a} + \frac{e}{ab} \right) \right| + \left| \frac{F^a(e)}{a} - \left( \frac{k}{a} + \frac{e}{ab} \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{F^{ab}(e)}{ab} - \left( \frac{k}{a} + \frac{e}{ab} \right) \right| + \left| \frac{F^a(e)}{a} - \frac{k}{a} \right| + \left| \frac{e}{ab} \right| \\ &\leq \frac{1}{a} + \frac{e + 1}{a} + \frac{e}{a} = \frac{2(e + 1)}{a}. \end{aligned}$$

O que prova a afirmação.

Então,

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \frac{F^n(e)}{n} - \frac{F^m(e)}{m} \right| \\ &\leq \left| \frac{F^n(e)}{n} - \frac{F^{mn}(e)}{mn} \right| + \left| \frac{F^{mn}(e)}{mn} - \frac{F^m(e)}{m} \right| \\ &\leq \frac{2(e + 1)}{n} + \frac{2(e + 1)}{m}. \end{aligned}$$

Logo, quando  $n, m \rightarrow \infty$  temos que  $|a_n - a_m| \rightarrow 0$ .  $\square$

**2.7 TEOREMA.** *Seja  $\hat{f} : S_1^1 \rightarrow S^1$ , uma aplicação que preserva a orientação e  $F : \mathbb{R}_F \rightarrow \mathbb{R}$  seu levantamento. Então,*

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(y)}{n}$ , para todo  $x$  e  $y \in \mathbb{R}_F$ ;
- (2)  $\mathbb{R}_F = \mathbb{R}_G$ , para todo  $F$  e  $G$  levantamentos de  $\hat{f}$ ;
- (3) Dados  $F$  e  $G$  levantamentos de  $\hat{f}$ , existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $F^n(x) = G^n(x) + k$ .

*Demonstração.*

(1) Seja  $e \in \mathbb{R}_F$ . Então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(e)}{n}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}_F$ .

Seja  $L = [x] + 1$ , para  $x > e$ .

Uma vez que  $F^n$  é crescente,

$$\begin{aligned} F^n(e) &< F^n(x) &< F^n(e + L) \\ F^n(e) &< F^n(x) &< F^n(e) + L \\ \frac{F^n(e)}{n} &< \frac{F^n(x)}{n} &< \frac{F^n(e) + L}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(e)}{n} &< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} &< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(e)}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(e)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}. \end{aligned}$$

(2)  $\mathbb{R}_F = \mathbb{R}_G$  para quaisquer dois levantamentos  $F$  e  $G$  de  $\hat{f}$ .

Se  $F$  e  $G$  são levantamentos de  $\hat{f}$  então:

$$F(x) = [x] + f_*(x - [x]) \text{ e } G(w) = [w] + f_*(w - [w]),$$

$$\mathbb{R}_F = \{x \in \mathbb{R}; \pi \circ F^n(x) \neq 1, \forall n\} \text{ e } \mathbb{R}_G = \{w \in \mathbb{R}; \pi \circ G^n(w) \neq 1, \forall n\}.$$

*Afirmção:* Se  $x \in \mathbb{R}_F$  então  $x + c \in \mathbb{R}_F$ , onde  $c$  é uma constante inteira.

$$\begin{aligned} \pi \circ F^j(x + c) &= \pi \circ [F^j(x) + c] \\ &= e^{2\pi i F^j(x)} \cdot e^{2\pi i c} \\ &= e^{2\pi i F^j(x)} \\ &= \pi \circ F^j(x) \neq 1. \end{aligned}$$

Vamos mostrar por indução.

Para  $n = 1$ . Uma vez que  $F$  e  $G$  são levantamentos de  $\hat{f}$ ,  $[x] + f_*(x - [x]) = [w] + f_*(w - [w])$ .

$$\begin{aligned} \pi \circ [[x] + f_*(x - [x])] &= \pi \circ [[w] + f_*(w - [w])] \\ e^{2\pi i [x]} \cdot e^{2\pi i f_*(x - [x])} &= e^{2\pi i [w]} \cdot e^{2\pi i f_*(w - [w])} \\ e^{2\pi i f_*(x - [x])} &= e^{2\pi i f_*(w - [w])} \\ \pi \circ f_*(x - [x]) &= \pi \circ f_*(w - [w]) \end{aligned}$$

A restrição de  $\pi$  é injetiva. Além disso,  $\hat{f}$  também é injetiva pois,  $Df(x) \neq 0, \forall x \in I$ , então temos,

$$\begin{aligned} f_*(x - [x]) &= f_*(w - [w]) \\ x - [x] &= w - [w] \\ x &= w + b_1, \end{aligned}$$

Onde  $b_1$  é uma constante inteira, logo  $w \in \mathbb{R}_F$ .

Suponha válido para  $k = n - 1$ . Assim,

$$\begin{aligned}\pi \circ F^n(x) &= \pi \circ G^n(w) \\ \pi \circ F^{n-1}(F(x)) &= \pi \circ G^{n-1}(G(x)) \\ F(x) &= G(w) + b_n \\ [x] + f_*(x - [x]) &= [w] + f_*(w - [w]) + b_n \\ f_*(x - [x]) &= f_*(w - [w]) + c_1 \\ x &= w + c\end{aligned}$$

Logo,  $\mathbb{R}_F = \mathbb{R}_G$ .

(3) Seja  $F$  um levantamento de  $\hat{f}$ , então  $\hat{f} \circ \pi = \pi \circ F$ .

Afirmção 1:  $\hat{f}^n \circ \pi = \pi \circ F^n$ .

$\hat{f}^2 \circ \pi = \hat{f}(\hat{f} \circ \pi) = \hat{f} \circ \pi \circ F = \pi \circ F^2$ . Supondo válido para  $n = k$ , temos que

$$\hat{f}^{k+1} \circ \pi = \hat{f}(\hat{f}^k \circ \pi) = \hat{f} \circ \pi \circ F^k = \pi \circ F \circ F^k = \pi \circ F^{k+1}.$$

Com isso, se  $F$  e  $G$  são levantamentos de  $\hat{f}$  então,

$$\pi \circ F^n = \hat{f}^n \circ \pi = \pi \circ G^n \implies e^{2\pi i F^n} = e^{2\pi i G^n} \implies F^n = G^n + k. \quad \square$$

Chamamos de número de rotação de  $x \in \mathbb{R}_F$  por um levantamento  $F$  o limite,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}$  e o denotamos por  $\rho_F$ . Assim, para quaisquer dois levantamentos  $F$  e  $G$  de  $\hat{f}$  temos,

$$\begin{aligned}\rho_F &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(x) + k}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(x)}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = \rho_G\end{aligned}$$

**2.8 LEMA.** *Se o conjunto dos pontos periódicos de uma aplicação  $\hat{f} : S^1_1 \rightarrow S^1$  que preserva a orientação é diferente do vazio, então o número de rotação  $\rho(f)$  é racional.*

*Demonstração.* Seja  $p \in S^1_1$  com  $\hat{f}^k(p) = p$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Seja  $y \in \mathbb{R}_F$  tal que  $\pi(y) = p$  e  $F$  um levantamento de  $\hat{f}$ . Então:

$$\pi \circ F^k(y) = \hat{f}^k \circ \pi(y) \Leftrightarrow \pi \circ F^k(y) = \hat{f}^k(p) \Leftrightarrow \pi \circ F^k(y) = p \Leftrightarrow \pi \circ F^k(y) = \pi(y).$$

Assim,

$$\pi^{-1} \circ \pi(F^k(y)) = \pi^{-1} \circ \pi(y) \Rightarrow F^k(y) = y + r, r \in \mathbb{Z}.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
 F^{kn}(y) &= F^{kn-k+k}(y) &= F^{(n-1)k}(F^k(y)) \\
 &= F^{(n-1)k}(y+r) &= F^{(n-1)k}(y) + r \\
 &= F^{(n-2)k}(F^k(y) + r) &= F^{(n-2)k}(y) + 2r \\
 &= \vdots \\
 &= F^k(y) + (n-1)r &= y + nr,
 \end{aligned}$$

teremos

$$\begin{aligned}
 \rho_{F^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{kn}(y)}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y + nr}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y}{n} + r \\
 &= r.
 \end{aligned}$$

Além disso, uma vez que (veja em [S])

$$\rho_{F^k} = r \Leftrightarrow k\rho_F = r \Leftrightarrow \rho_F = \frac{r}{k}$$

e

$$\rho_f = \rho_F - [\rho_F]$$

temos

$$\rho_f = \frac{r}{k} - \left[ \frac{r}{k} \right] \in \mathbb{Q}. \quad \square$$

**2.9 PROPOSIÇÃO.** *Seja  $f : I \rightarrow I$ , onde  $I = [a, b]$  com  $a < 0 < b$ , uma aplicação de Lorenz em  $\mathcal{F}$  não sobrejetiva com uma lacuna  $J = (f(b), f(a))$ . Suponha  $f$  com número de rotação irracional, então  $J$  e suas iterações são os intervalos errantes de  $f$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema anterior, temos que se o número de rotação  $\rho(f)$  for irracional, não teremos pontos periódicos, particularmente, não haverá órbita periódica atratora atraindo o intervalo  $J = (p, q)$ , onde  $p = f(b)$  e  $q = f(a)$ . Além disso, supondo que existam  $i, j \in \mathbb{Z}$  com  $i > j$ , tais que  $f^i(J) \cap f^j(J) \neq \emptyset$ , então  $f^{i-j}(J) \cap J \neq \emptyset$ , o que é um absurdo, pois  $J \cap \text{Im}(f) = \emptyset$ . Logo, para todo  $i$  e  $j$  inteiros, teremos  $f^i(J) \cap f^j(J) = \emptyset$ .  $\square$

**2.10 DEFINIÇÃO.** *Definimos como um Conjunto de Cantor o conjunto  $\Lambda$  que satisfaz as seguintes condições:*

- (i)  $\Lambda$  é um conjunto fechado;
- (ii)  $\Lambda$  é totalmente desconexo, isto é, ele não contém intervalos;

(iii)  $\Lambda$  é um subconjunto perfeito de  $I$ , ou seja, todos os seus pontos são de acumulação.

Chamamos de atrator mínimo, e o denotamos por  $\Lambda$ , o conjunto complementar a união de todos os iterados do intervalo errante  $J$  em relação ao intervalo  $[a, b]$ .

**2.11 PROPOSIÇÃO.** *O conjunto atrator mínimo  $\Lambda$  da aplicação lacuna é um conjunto de Cantor.*

*Demonstração.*

*Afirmção 1:*  $\Lambda$  é um conjunto fechado.

Uma vez que  $f^n | J$  é um homeomorfismo e  $\cup f^n | J$  é um conjunto aberto e disjunto, temos que  $\Lambda$  é fechado, pois é o complementar de  $\cup f^n | J$ .

*Afirmção 2:*  $\Lambda$  é totalmente desconexo.

De fato, suponha que  $\Lambda$  não seja totalmente desconexo, isto é, que exista um intervalo maximal fechado  $L$  contido em  $\Lambda$ , sobre o qual  $f^n | L$  é um homeomorfismo, para todo  $n > 0$ . Assim, considerando  $f^n(L)$  podemos ter que  $f^n(L) \cap L = \emptyset, \forall n > 0$  ou  $f^n(L) \cap L \neq \emptyset$ , para algum  $n$ . No primeiro caso, que equivale a  $f^i(L) \cap f^j(L) = \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{Z}$  com  $n = i - j$ , teríamos  $L$  como um intervalo errante já que  $\rho(\hat{f}) \notin \mathbb{Q}$  e  $f^n | L$  é um homeomorfismo. Já o segundo caso contraria a maximalidade de  $L$ . Logo,  $\Lambda$  é totalmente desconexo.

*Afirmção 3:* Todos os pontos do conjunto atrator  $\Lambda$  são de acumulação.

Seja  $A \subset \Lambda$  o conjunto dos pontos de acumulação de  $\Lambda$ . Veja que  $A$  é um conjunto fechado. Suponha que  $A \neq \Lambda$  e escolha  $p \in \Lambda \setminus A$ . Seja  $T$  a componente conexa  $(a, b)$  de  $S^1 \setminus A$  que contenha  $p$ , claro que  $\partial T \subset A$ . Analisando, as iterações de  $T$  percebemos que  $f^i(T)$  não está contido em  $T$ , pois se assim fosse,  $T$  conteria um ponto fixo. Se  $f^i(T) \cap T \neq \emptyset$  para algum  $i \in \mathbb{Z}$  teríamos que  $a$  ou  $b$  não pertenceria a  $A$ . Além disso, caso  $f^i(T) \cap T = \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}$ , teríamos  $T$  como um intervalo errante, o que também não é possível. Logo, todos os pontos de  $\Lambda$  são de acumulação.  $\square$

## Capítulo 3

# Aplicações sobreposição

Trataremos neste capítulo das aplicações de Lorenz do tipo sobreposição. Apresentaremos os principais resultados deste trabalho os quais respondem ao questionamento da existência ou não de intervalos errantes para as aplicações de Lorenz em  $\mathcal{F}$ . Iniciamos nossa abordagem definindo, o conceito de distorção, o qual delimita os tipos de aplicações de Lorenz com as quais trabalhamos.

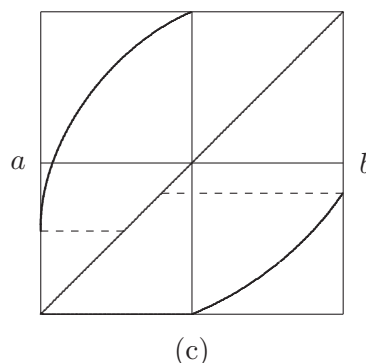


Figura 3.1: Aplicações Sobreposição

**3.1 DEFINIÇÃO.** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação  $C^1$ , onde  $I$  é um intervalo  $[a, b]$ . Se  $T \subset I$  é um intervalo tal que  $Df(x) \neq 0$  para todo  $x \in T$ , definimos a distorção de  $f$  em  $T$  como sendo*

$$Dist.(f, T) = \text{Sup}_{x, y \in T} \log \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|},$$

onde  $|Df(x)|$  denota o valor absoluto da derivada de  $f$  em  $x$ .

Dizemos que uma aplicação  $f : I \rightarrow I$  tem distorção limitada se  $\exists C > 0$  tal que  $Dist.(f, T) < C|T|$ , para todo intervalo  $T \subset I$ . Observe que é essencial a hipótese de  $|Df(x)| \neq 0$  para se obter um controle da distorção, e podemos verificar nos gráficos da Figura 1.9 que evitamos tomar  $|Df(x)| = 0$ , já que os resultados apresentados aqui não são válidos para o caso de se ter pontos críticos. Em particular, este caso está ainda em aberto.

**3.2 LEMA.** *Sejam  $f : I \rightarrow I$  e  $T$  um intervalo tal que a restrição de  $f^n$  a  $T$  é um difeomorfismo  $C^1$ .*

$$\text{Então, } \text{Dist.}(f^n, T) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist.}(f, f^i(T)).$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \log \frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} &= \log \frac{|Df(f^{n-1}(x))|}{|Df(f^{n-1}(y))|} \\ &= \log \frac{|Df(f^{n-1}(x)) \cdot Df^{n-1}(x) \cdots Df(x)|}{|Df(f^{n-1}(y)) \cdot Df^{n-1}(y) \cdots Df(y)|} \\ &= \log |Df^n(x) \cdot Df^{n-1}(x) \cdots Df(x)| - \log |Df^n(y) \cdot Df^{n-1}(y) \cdots Df(y)| \\ &= \log |Df^n(x)| - \log |Df^n(y)| + \cdots + \log |Df(x)| - \log |Df(y)| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{|Df(f^i(x))|}{|Df(f^i(y))|} \end{aligned}$$

Uma vez que,  $f^i(x), f^i(y) \in f^i(T)$ , temos que:

$$\log \frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist.}(f, f^i(T)). \quad \square$$

**3.3 COROLÁRIO.** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação  $C^1$ , por partes, tal que  $Df(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$  e tal que  $\log |Df(x)|$  tem constante de lipschitz igual a  $C$ . Então para qualquer intervalo  $T \subset I$ ,*

$$\text{Dist.}(f^n, T) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)|.$$

*Em particular, se os intervalos  $T, f(T), \dots, f^{n-1}(T)$ , forem disjuntos dois-a-dois, então*

$$\text{Dist.}(f^n, T) \leq C \cdot |I|$$

*Demonstração.*  $\log |Df(x)|$  é lipschitziana, então

$$\log |Df(x)| - \log |Df(y)| \leq C|x - y|.$$

Assim, a distorção de  $f$  em um intervalo  $J$  qualquer é limitada por  $C \cdot |J|$  e, portanto,

$$\text{Dist.}(f^n, T) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist.}(f, f^i(T)) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)|. \quad \square$$

O lema a seguir, dentro do nosso trabalho, pode ser entendido como o sinônimo do controle da distorção. Observe como a tomada específica e cuidadosa das hipóteses implicam, para a classe de funções com as quais trabalhamos, no controle da distorção.

**3.4 LEMA.** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação contínua por partes com um número finito de ramos e com  $f$  sendo  $C^1$  e  $\log |Df|$  lipschitziana em cada ramo. Então existe  $\delta > 0$  tal que para quaisquer dois intervalos  $T \supset J$  com  $\sum_{i=0}^{n-1} |f^i(J)| \leq 1$  e  $\frac{|L|}{|J|} < \delta$ ,  $\frac{|R|}{|J|} < \delta$  (ver Figura 3.2) e  $f^i$  contínua em  $T$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , temos  $|f^i(T)| \leq 2|f^i(J)|$  para  $i = 1, \dots, n$  e  $|f^i(L)| \leq |f^i(J)|, |f^i(R)| \leq |f^i(J)|$  para  $i = 1, \dots, n$ .*

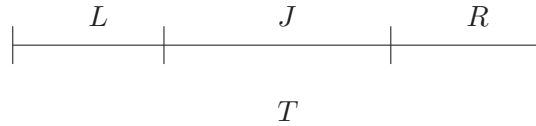


Figura 3.2:

*Demonstração.* Tome  $0 < \delta < \frac{1}{2}e^{-2C}$ . Agora, escolhendo  $T$  contendo estritamente  $J$  tal que  $|T| \leq (1 + \delta)|J|$ . Provemos por indução em  $n$ . Para  $n = 1$ , a afirmação é óbvia, uma vez que  $|T| \leq (1 + \delta)|J| < (1 + \frac{1}{2}e^{-2C})|J| < 2|J|$ . Suponha que a afirmação seja verdadeira para  $n > 1$ . Pelo Corolário 3.3, temos que a hipótese de indução implica que a distorção de  $f^n$  em  $T$  é limitada por  $2C$ . De fato,  $Dist.(f^n, T) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} 2|f^i(J)| = 2C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(J)| \leq 2C$ . Além disso, pelo Teorema do Valor Médio existe  $x_n \in J$  tal que  $Df^n(x_n) = \frac{|f^n(J)|}{|J|}$ , e assim, como  $\log \frac{|Df^n(y)|}{|Df^n(x_n)|} \leq 2C$  temos que  $|Df^n(y)| \leq e^{2C} \frac{|f^n(J)|}{|J|}$ , para todo  $y \in T$ . Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\begin{aligned}
 |f^n(T)| &= \left| \int_T Df^n(y) dy \right| \\
 &= \left| \int_J Df^n(y) dy + \int_{T \setminus J} Df^n(y) dy \right| \\
 &\leq \left| \int_J Df^n(y) dy \right| + \left| \int_{T \setminus J} Df^n(y) dy \right| \\
 &\leq \left| \int_J Df^n(y) dy \right| + e^{2C} \frac{|f^n(J)|}{|J|} \left| \int_{T \setminus J} dy \right| \\
 &\leq |f^n(J)| + e^{2C} \frac{|f^n(J)|}{|J|} |T \setminus J|,
 \end{aligned}$$

mas,  $|T \setminus J| = |T| - |J| \leq (1 + \delta)|J| - |J| = \delta|J|$ , assim

$$\begin{aligned}
 |f^n(T)| &\leq |f^n(J)| + e^{2C} \frac{|f^n(J)|}{|J|} \delta|J| \\
 &\leq (1 + \delta e^{2C})|f^n(J)| \\
 &< 2|f^n(J)|
 \end{aligned}$$

Isto completa a indução.



A segunda afirmação, ou seja,  $|f^i(L)| \leq |f^i(J)|, |f^i(R)| \leq |f^i(J)|$  para  $i = 1, \dots, n$  é uma consequência imediata da primeira afirmação. De fato, pois, se  $|f^i(L)| + |f^i(R)| + |f^i(J)| = |f^i(T)|$  e como  $|f^i(J)| + |f^i(J)| \geq |f^i(T)|$ , temos  $|f^i(J)| \geq |f^i(L)| + |f^i(R)|$ , e conseqüentemente,  $|f^i(J)| \geq |f^i(L)|$  e  $|f^i(J)| \geq |f^i(R)|$ .  $\square$

**3.5 TEOREMA.** *Se  $f : I \rightarrow I$  é uma aplicação contínua e  $C^1$  por partes com  $\log |Df|$  lipschitziana, então  $f$  não tem intervalos errantes.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que  $f$  tenha um intervalo errante  $J$ . Seja  $J \subset J_0$  onde  $J_0$  é um intervalo errante maximal contendo  $J$ , no sentido de que não existe intervalo errante maximal que contenha  $J_0$ . Indutivamente, definimos  $J_n$  como um intervalo errante maximal que contém o interior de  $f(J_{n-1})$ . Afirmamos que os intervalos que definimos são dois-a-dois disjuntos. De fato, suponha, por contradição, que existam inteiros  $0 \leq n < m$  tais que  $J_n \cap J_m \neq \emptyset$ . Uma vez que  $J_m$  contém o interior de  $f^{m-n}(J_n)$  segue que  $f^{m-n}(J_m) \cap J_m \supset f^{m-n}(J_m \cap J_n) \neq \emptyset$ , isto é uma contradição, uma vez que  $J_m$  é um intervalo errante, o que prova a afirmação. Tomando-se um intervalo  $T$  contendo  $J_0$  conforme feito no Lema 3.4, temos que  $[f^n(T)] \leq 2[f^n(J_0)]$  e como  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f^n(J_0)] = 0$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f^n(T)] = 0$ . Assim, pelo Princípio da Contração (ver enunciado do Lema 3.10 no final deste capítulo),  $T$  é um intervalo errante ou  $\omega(T)$  está contido em uma órbita periódica atratora. Mas, pelo fato de  $J_0$  ser um intervalo errante maximal,  $T$  não pode ser intervalo errante nem  $\omega(T)$  pode estar contido em uma órbita periódica atratora, o que completa a prova do teorema.  $\square$

Dizemos que uma aplicação de Lorenz  $f$  é renormalizável a uma aplicação lacuna se existe um intervalo  $\tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$  com  $\tilde{a} < 0 < \tilde{b}$ , e inteiros positivos  $n_1$  e  $n_2$  tais que a aplicação  $\tilde{f} : \tilde{I} \rightarrow \tilde{I}$  definida por:  $\tilde{f}|_{[\tilde{a}, 0^-]} = f^{n_1}$  e  $\tilde{f}|_{[0^+, \tilde{b}]} = f^{n_2}$  é uma aplicação lacuna em  $\tilde{I}$ , isto é,  $\tilde{f}(\tilde{a}) > \tilde{f}(\tilde{b})$ .

O que vamos fazer é aproveitar uma propriedade que veremos neste capítulo, que no caso da existência de intervalos errantes para  $f$ , as iterações desses intervalos acumulam ao redor do zero. Assim, podemos trabalhar com intervalos menores  $[\tilde{a}, 0^-]$  e  $[0^+, \tilde{b}]$  considerando as aplicações de retorno  $f^{n_1}|_{[\tilde{a}, 0^-]}$  e  $f^{n_2}|_{[0^+, \tilde{a}]}$ .

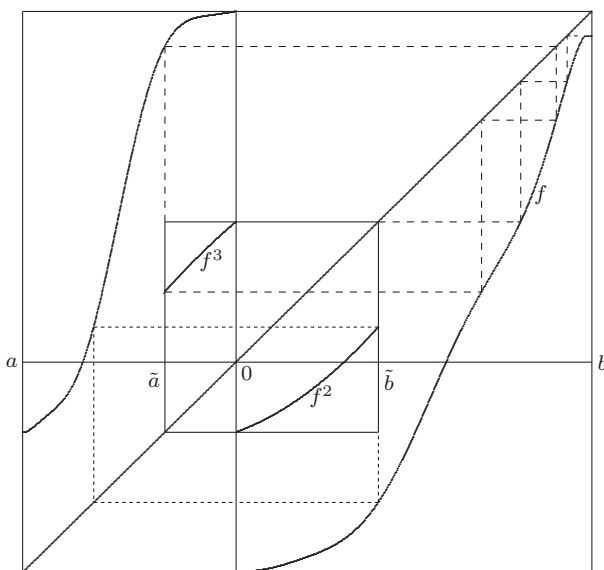


Figura 3.3: Renormalização à aplicação lacuna

Observe que, para alguns iterados,  $[\tilde{a}, 0^-]$  e  $[0^+, \tilde{b}]$  estão fora de  $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ , porém o interessante é o retorno ao intervalo  $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ .

**3.6 TEOREMA.** *Seja  $f$  uma aplicação de Lorenz em  $\mathcal{F}$ . Se  $J$  for um intervalo errante para  $f$ , então  $f$  é renormalizável a uma aplicação lacuna  $\tilde{f} : \tilde{I} \rightarrow \tilde{I}$ ,  $\tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$ , com número de rotação irracional. Além disso, existe um inteiro  $n \geq 0$  tal que  $f^n(J) \subset (\tilde{f}(\tilde{b}), \tilde{f}(\tilde{a}))$ .*

A demonstração do Teorema 3.6, que é o objetivo central no nosso trabalho, será deixada para o final deste capítulo, pois depende dos resultados a seguir que se iniciam com a seguinte proposição.

**3.7 PROPOSIÇÃO.** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação de Lorenz em  $\mathcal{F}$ . Suponha que  $f$  tenha um intervalo errante  $J$ . Então:*

- (a) *as iterações futuras  $f^n(J)$  de  $J$  acumulam no 0 do lado esquerdo e do lado direito, isto é, para todo aberto  $V$  contendo o 0 em sua fronteira, existe um inteiro  $n > 0$  tal que  $f^n(J) \subset V$ .*
- (b) *o 0 não está na fronteira de  $J$  nem de nenhuma das suas iterações futuras.*

*Demonstração.* Suponhamos que as iterações  $f^n(J)$  com  $n \rightarrow \infty$ , não se acumulem ao redor do 0. Então existe um intervalo  $V$  onde  $0 \in \partial V$  tal que  $f^n(J) \cap V = \emptyset$  para todo  $n > 0$ . Defina agora uma aplicação  $f_1 : I \rightarrow I$  satisfazendo os seguintes pontos:

- (i)  $f_1 = f$  em  $I \setminus V$ ;
- (ii)  $f_1$  é contínua em  $I$ ;
- (iii)  $f_1$  é  $C^1$  por partes e  $\log |Df_1|$  é lipschitziana.

A Figura 3.4 ilustra a construção de tal aplicação. Como  $f_1$  é igual a  $f$  em  $I \setminus V$  e  $V \cap f^n(J) = \emptyset$ , para todo  $n > 0$ , então os intervalos errantes de  $f$  serão os intervalos errantes de  $f_1$ . Porém, isto contraria a afirmação do Teorema 3.5. O que prova o item (a).

Se  $J$  é um intervalo errante então  $f^n(J)$  também o é para qualquer inteiro  $n > 0$ . Suponha que  $0 \in \partial f^n(J)$ , para algum  $n > 0$ , então podemos considerar  $f^n(J)$  como o intervalo  $V$  do item (a). Assim, renomeando o intervalo  $f^{n+1}(J)$  por  $J'$ , uma vez que ele é um intervalo errante,  $f^m(J') \cap f^n(J) = \emptyset \iff f^{m+n+1}(J) \cap f^n(J) = \emptyset$ , para todo  $m > 0$ , o que contraria o resultado do item (a), isto é,  $f^m(J')$  não acumula em pelo menos um dos lados do 0.  $\square$

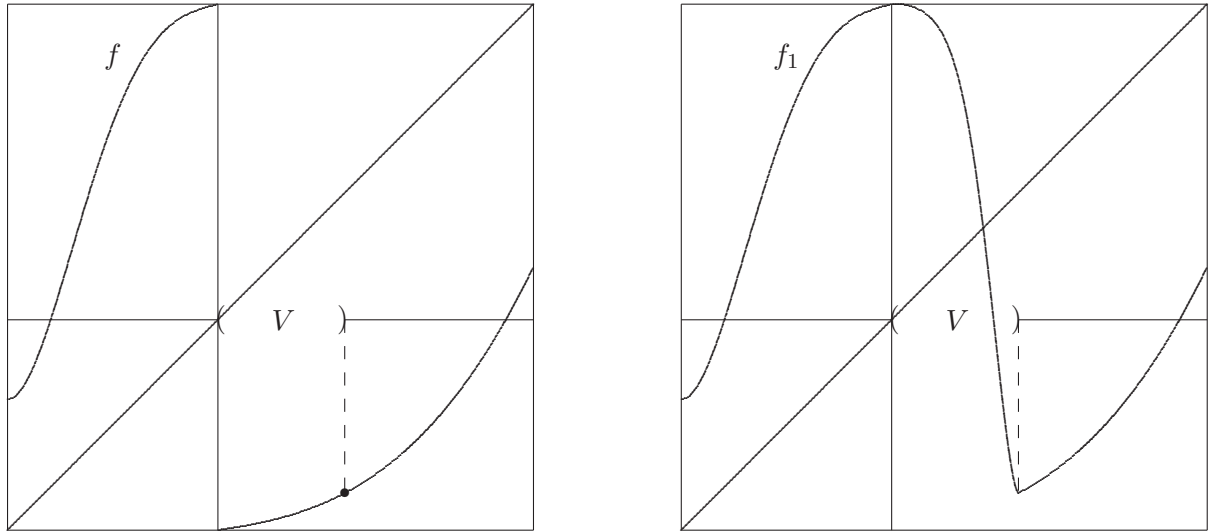


Figura 3.4: Gráfico da construção da  $f_1$

**3.8 LEMA.** *Seja  $J$  um intervalo errante para uma aplicação  $f \in \mathcal{F}$ . Então  $\bar{J}$  (fecho de  $J$ ) não contém qualquer iterado de  $0^+$  nem de  $0^-$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $J$  contenha um iterado de  $0^+$  ou de  $0^-$ . Então, pela continuidade da  $f$ , existe um intervalo fechado  $J_1$  contendo  $0^+$ , por exemplo, como ponto extremo e um inteiro  $n > 0$  tal que  $f^n(J_1) \subset J$ . Supondo agora, que  $f^m(J) \cap J_1 \neq \emptyset$  para algum  $m > 0$ , assim  $f^n(f^m(J)) \cap f^n(J_1) \neq \emptyset$  e como  $f^n(J_1) \subset J$  temos que  $f^{m+n}(J) \cap J \neq \emptyset$ , o que contraria o fato de  $J$  ser um intervalo errante. Se,  $f^m(J) \cap J_1 = \emptyset$ , para todo  $m > 0$ , teremos uma contradição ao fato das iterações de  $J$  acumularem ao redor do zero. Logo,  $\bar{J}$  não pode conter qualquer iterado de  $0^+$  ou de  $0^-$ .  $\square$

Denominamos por um par mais próximo ao 0 os iterados  $f^l(J)$  e  $f^r(J)$  tais que:

- (i)  $f^l(J) < 0 < f^r(J)$
- (ii) se  $f^l(J) < f^n(J) < f^r(J)$ , então  $n > \max(l, r)$ .

**3.9 PROPOSIÇÃO.** *Sejam  $J = (\lambda, \rho)$  um intervalo errante para uma aplicação  $f$  e  $f^l(J)$  e  $f^r(J)$  um par mais próximo do 0. Seja  $n$  o menor inteiro tal que  $n > \max(l, r)$  e  $f^n(J)$  está estritamente entre  $f^l(J)$  e  $f^r(J)$ . Seja agora  $k = [\xi, \eta]$ , o intervalo fechado máximo contendo  $J$  sobre o qual  $f^i$  é contínua para todo  $1 \leq i \leq n$ . Se  $f^n(\xi) > f^l(\rho)$ ,  $f^n(\eta) < f^r(\lambda)$  e  $a, b \notin \partial(k)$ , então  $f$  é renormalizável a uma aplicação de Lorenz  $\tilde{f}$  com uma lacuna  $\tilde{J}$ . Além disso,  $f^n(J) \subset \tilde{J}$ .*

*Demonstração.* Vamos provar a proposição para o caso que  $f^l(J) < f^n(J) < 0 < f^r(J)$ . O caso quando  $f^n(J) > 0$  é similar. Denotemos por  $L$  e  $R$  as componentes à esquerda e à direita respectivamente de  $k \setminus J$ . Da maximalidade de  $k$  e do fato de que  $b \notin \partial k$  devemos ter  $f^i(\eta) = 0^-$  para algum  $i < n$ , e uma vez que  $f^n(J)$  é o primeiro iterado de  $J$  que fica entre  $f^l(J)$  e  $f^r(J)$ , temos que  $f^i(J) \leq f^l(J)$  (incluindo a possibilidade de  $i = l$ ). Similarmente,  $f^j(\xi) = 0^+$  para algum  $j < n$ , e temos que  $f^j(J) \geq f^r(J)$  (com a possibilidade de  $j = r$ ). Agora,  $f^{n-i}$  é contínua em  $f^i(R)$  e aplica  $f^i(R)$  em  $(f^n(\rho), f^n(\eta)) \subset f^i(R) \cup f^j(L)$ , isto porque  $f^n(\eta) < f^r(\lambda) \leq f^j(\lambda)$ . Do mesmo modo, usando a desigualdade  $f^i(\rho) \leq f^l(\rho) < f^n(\xi)$ , podemos mostrar que  $f^{n-j}$  é contínua em  $f^j(L)$  e aplica  $f^j(L)$  em  $(f^n(\xi), f^n(\lambda)) \subset f^i(R) \cup f^j(L)$ .

$$\begin{aligned} f^{n-i}(f^i(R)) &= f^n(\rho, \eta) = (f^n(\rho), f^n(\eta)) \subset f^i(R) \cup f^j(L) \\ f^{n-j}(f^j(L)) &= f^n(\xi, \lambda) = (f^n(\xi), f^n(\lambda)) \subset f^i(R) \cup f^j(L). \end{aligned}$$

De fato, pois:

$$\begin{aligned} f^n(\eta) &< f^r(\lambda) \leq f^j(\lambda) \\ f^i(\rho) &\leq f^l(\rho) < f^n(\xi) \end{aligned}$$

Definamos, agora, a seguinte função:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f^{n-i}, & \text{em } f^i(R) \\ f^{n-j}, & \text{em } f^j(L) \end{cases}$$

Vamos mostrar que a função  $\tilde{f}$  é uma aplicação lacuna.

$$[\tilde{a}, \tilde{b}] := [\tilde{f}(0^+), \tilde{f}(0^-)] = [f^{n-j}(f^j(\xi)), f^{n-i}(f^i(\eta))] = [f^n(\xi), f^n(\eta)].$$

Claramente,  $f^n(\xi) < f^n(J) < 0$ , pois,  $f^n(J)$  é um homeomorfismo que preserva a orientação, para cada  $n > 0$ . Devemos provar que  $f^n(\eta) > 0$ . Suponha que  $f^n(\eta) \leq 0$ . Então  $f^{n-i}$  é uma aplicação contínua crescente de  $f^i(R)$  em si próprio. Assim, todos os pontos de  $f^i(R)$  convergem sob iterações a um ponto fixo de  $f^{n-i}$ . Uma vez que  $f^i(R)$  contém iterados de  $J$ , obtemos uma contradição, pois  $J$  e seus iterados não podem estar na bacia de atração de uma órbita periódica atratora já que são intervalos errantes. Então,  $f^n(\xi) < 0 < f^n(\eta)$ .

Agora:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{b}) &= f^{n-j}(f^n(\eta)) < f^{n-j}(f^j(\lambda)) = f^n(\lambda). \\ \tilde{f}(\tilde{a}) &= f^{n-i}(f^n(\xi)) > f^{n-i}(f^i(\rho)) = f^n(\rho). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,  $f^n(J) = (f^n(\lambda), f^n(\rho)) \subset \tilde{J} = (\tilde{f}(b), \tilde{f}(a))$ . Então,  $\tilde{f}$  é uma aplicação lacuna com um vazio  $\tilde{J}$ , e além disso  $f^n(J) \subset \tilde{J}$ .  $\square$

Voltemos agora a demonstração do Teorema 3.6.

*Demonstração.* Seja  $f$  uma aplicação em  $\mathcal{F}$  tendo um intervalo errante  $J = (\lambda, \rho)$ . Podemos supor que  $J$  é maximal no sentido de que ele não está contido em nenhum intervalo errante maior. Nós mostraremos que  $f$  é renormalizável a uma aplicação lacuna  $\tilde{f}$  com uma lacuna  $\tilde{J}$  e que  $f^n(J) \subset \tilde{J}$ , para algum  $n \geq 0$ .

Sabemos, pela Proposição 3.7, que  $f^n(J)$  acumula no 0 do lado esquerdo e do lado direito. Definamos agora uma seqüência de pares mais próximos ao zero da seguinte forma: seja  $f^{n(1)}(J)$  o primeiro iterado de  $J$  que fica do lado oposto a  $J$  em relação ao 0. Este iterado existe porque as iterações de  $J$  acumulam em ambos os lados do 0. Sejam  $f^{l(1)}(J)$  e  $f^{r(1)}(J)$  os intervalos do conjunto  $J, f(J), \dots, f^{n(1)}(J)$  mais próximos do 0 à esquerda e à direita, respectivamente (um será  $f^{l(1)}(J)$  e o outro pode ser  $J$ ). Então,  $f^{l(1)}(J) < 0 < f^{r(1)}(J)$  é um par mais próximo do 0. Definimos  $l(k)$  e  $r(k)$ ,  $k = 2, \dots$ , por indução. Suponha que os pares  $l(k-1)$  e  $r(k-1)$  tenham sido definidos e sejam pares mais próximos ao 0 com  $f^{l(k-1)}(J) < 0 < f^{r(k-1)}(J)$ . Seja  $f^{n(k)}(J)$  o primeiro iterado maior que  $\max\{l(k-1), r(k-1)\}$  tal que  $f^{l(k-1)}(J) < f^{n(k)}(J) < f^{r(k-1)}(J)$  e  $n(k)$  existe por causa da Proposição 3.7. Então, se  $f^{n(k)}(J) < 0$ , pomos  $l(k) = n(k)$  e  $r(k) = r(k-1)$ , caso contrário, se  $f^{n(k)}(J) > 0$ , temos  $l(k) = l(k-1)$  e  $r(k) = n(k)$ . Assim, em cada caso, temos que  $f^{l(k)}(J), f^{r(k)}(J)$  é um par mais próximo ao 0 e  $f^{l(k)}(J) < 0 < f^{r(k)}(J)$ . Isto complementa a indução.

Agora, seja  $K_k$  o conjunto maximal fechado contendo o intervalo  $J$  tal que  $f^i$  é contínua sobre  $K_k$ , para todo  $1 \leq i \leq n(k)$ . Sejam  $K_k = [\xi_k, \eta_k]$  e  $L_k$  e  $R_k$  denotando as componentes de  $K_k \setminus J$ . Pela Proposição 3.7(b),  $L_k$  e  $R_k$  são não-vazios. Além disso, uma vez que  $J$  é um intervalo errante maximal, teremos que  $|L_k|$  e  $|R_k|$  tende a 0 quando  $k$  tende ao infinito, pois, caso contrário, existiria um intervalo aberto  $M$  contendo estritamente  $J$  sobre o qual  $f^n$  é contínua, para todo  $n \geq 0$ , e uma vez que  $J$  é um intervalo errante maximal, existem inteiros  $n \geq 0$  e  $m > 0$  tais que  $f^{n+m}(M) \cap f^n(M) \neq \emptyset$ . Assim,  $T = \bigcup_{j \geq 0} f^{n-jm}(M)$  é um intervalo sobre o qual  $f^m$  é contínua, crescente, e além disso,  $f^m(J) \subset T$ . Conseqüentemente, todo ponto em  $T$  é levado pela  $f^m$  a um ponto fixo de  $f^m$  e como  $f^n(J) \subset T$  teremos que  $J$  é atraído por uma órbita de  $f$ , o que é um absurdo, pois  $J$  é um intervalo errante. O que assegura que  $|L_k|$  e  $|R_k|$  tendem para o 0. Como seqüência, existe um inteiro  $k_0$  tal que, para todo  $k \geq k_0$ ,  $\frac{|L_k|}{|J|} < \delta$  e  $\frac{|R_k|}{|J|} < \delta$ , onde  $\delta < \frac{1}{2}e^{-2C}$ ,  $C$  é a constante de Lipschitz da aplicação  $\log |Df|$

e  $a, b \notin \partial K_k$ . Seja, agora,  $k \geq k_0$  e  $f^{n(k)}(\xi_k)$  e  $f^{n(k)}(\eta_k)$  os iterados de  $0^+$  e  $0^-$ , respectivamente, e pelo Lema 3.8, tanto  $0^+$  quanto  $0^-$  não podem cair em  $f^{l(k-1)}(J)$  ou em  $f^{r(k-1)}(J)$ . Suponha que, para todo  $k \geq k_0$ , tenhamos que  $f^{n(k)}(\xi_k) > f^{l(k-1)}(\rho)$  e  $f^{n(k)}(\eta_k) < f^{r(k-1)}(\lambda)$ . Então, pela Proposição 3.9,  $f$  é renormalizável a uma aplicação lacuna  $\tilde{f}$  com um número de rotação irracional e uma lacuna  $\tilde{J}$  tal que  $f^{n(k)}(J) \subset \tilde{J}$ , onde  $f^{n(k)}(J)$  é um intervalo errante para  $\tilde{f}$ .

Suponha agora que, para todo  $k \geq k_0$ , tenhamos  $f^{n(k)}(\xi_k) < f^{l(k-1)}(\rho)$  ou  $f^{n(k)}(\eta_k) > f^{r(k-1)}(\lambda)$ , ou ambos. Então, é claro que  $f^{l(k-1)}(J) \subset f^{n(k)}(L_k)$  ou  $f^{r(k-1)}(J) \subset f^{n(k)}(R_k)$ , ou ambos. Assim, pelo Lema 3.4  $|f^{n(k)}(L_k)| \leq |f^{n(k)}(J)|$  e  $|f^{n(k)}(R_k)| \leq |f^{n(k)}(J)|$  e, conseqüentemente, ou  $|f^{l(k-1)}(J)| \leq |f^{n(k)}(L_k)| \leq |f^{n(k)}(J)|$  ou  $|f^{r(k-1)}(J)| \leq |f^{n(k)}(R_k)| \leq |f^{n(k)}(J)|$ . Então,  $|f^{n(k)}(J)| \geq \min\{|f^{l(k-1)}(J)|, |f^{r(k-1)}(J)|\}$ , e, uma vez que  $n(k)$  é igual a  $l(k)$  ou a  $r(k)$ , segue que  $|f^{n(k)}(J)| \geq \min\{|f^{l(k_0)}(J)|, |f^{r(k_0)}(J)|\}$ , para todo  $k \geq k_0$ , o que contradiz o fato de  $\sum_{n \geq 0} |f^n(J)|$  ser finito. O que prova o teorema.  $\square$

Na introdução deste trabalho nos referimos aos intervalos errantes como elementos indesejáveis num sistema dinâmico unidimensional. Saber a importância da não existência desses intervalos é essencial para a compreensão do nosso trabalho. Uma vez que os intervalos com os quais trabalhamos apresentam  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(I)| = 0$  a não existência de intervalos errantes nos garante a existência de uma órbita periódica atratora. Este resultado é assegurado pelo Lema da Contração [MS] cujo enunciado segue abaixo.

**3.10 LEMA.** *Se  $I = [a, b]$ ,  $a < 0 < b$  é um intervalo tal que  $\inf_{n \leq 0} |f^n(I)| = 0$ , onde  $f : I \rightarrow I$  é uma aplicação de Lorenz com distorção limitada, então  $I$  é um intervalo errante ou existe uma órbita periódica  $\mathcal{O}$  tal que  $f^k(I) \rightarrow \mathcal{O}$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Em particular, se  $I$  contém um intervalo errante  $J$  então ele também é um intervalo errante.*

# Apêndice

Como já mencionado na introdução deste trabalho, apresentaremos neste apêndice algumas definições e resultados que serviram de base para o trabalho desenvolvido nos capítulos anteriores.

No capítulo 1 nos referimos a função lipschitziana cuja a definição é a seguinte.

**A.11** DEFINIÇÃO. Dizemos que  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é lipschitziana se existe uma constante  $c > 0$ , tal que, para todo  $x, y \in A$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ .

No capítulo 2 nos referimos a órbita periódica atratora cuja definição daremos a seguir. Seja  $f : I \rightarrow I$ ,  $I = [a, b]$ . Um ponto  $P \in I$  é periódico de período  $n \in \mathbb{N}$  se  $f^n(P) = P$  e  $f^j(P) \neq P$ , para todo  $0 < j < n$ . O conjunto  $\{P, f(P), f^2(P), \dots, f^{n-1}(P)\}$  é chamado de órbita periódica e denotamos por  $\mathcal{O}(P)$ . A bacia de um ponto periódico  $P$  é o conjunto de pontos no qual o  $\omega$ -limite (limite futuro) contém  $P$ , ver [MS]. Assim, dizemos que um ponto periódico  $P$  de período  $n$  é atrator e a sua órbita  $\mathcal{O}(P)$  é chamada órbita periódica atratora se sua bacia contém um conjunto aberto.

Define-se um conjunto  $S$  como minimal se por uma aplicação  $f$ ,  $S$  satisfizer as seguintes propriedades:

- (i)  $S$  é um conjunto fechado, não vazio e invariante;
- (ii) Se  $R$  é um subconjunto fechado, não vazio e invariante de  $S$ , então  $R = S$ .

Um conceito que também utilizamos no capítulo 2 e que é de fundamental importância para a compreensão dos resultados é o de número de rotação, o qual definiremos neste Apêndice. Para isto, vamos dar algumas definições e resultados importantes.

**A.12** DEFINIÇÃO. Chamamos de levantamento de um homeomorfismo que preserva a orientação  $f : S^1 \rightarrow S^1$  a aplicação contínua  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\pi \circ F = f \circ \pi$ , onde  $\pi = e^{2\pi i x}$  é aplicação projeção.

**A.13** LEMA. [S] Se  $F$  e  $G$  são dois levantamentos de  $f$ , então existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $F(x) = G(x) + k$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**A.14** LEMA. [S] Se  $F$  é levantamento de  $f$  então:

- (1)  $F(x + 1) = F(x) + 1$ ;
- (2)  $F(x) - x$  é periódica de período um;
- (3)  $F$  é crescente.

**A.15** COROLÁRIO. [S] Se  $F$  é levantamento de  $f$ , então, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos:

- (1)  $F^n(x + 1) = F^n(x) + 1$ ;
- (2)  $F^n(x) - x$  é periódica de período um;
- (3)  $F^n$  é crescente.

**A.16** TEOREMA. [S] Sejam  $f : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $f$ . Se existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n}$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**A.17** LEMA. [S] Sejam  $f : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $F$  é um levantamento de  $f$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n}$  existe.

**A.18** LEMA. [S] Sejam  $f : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $F$  é um levantamento de  $f$ , então existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = \lambda$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**A.19** DEFINIÇÃO. Seja  $F$  um levantamento de  $f$ , definimos o número de rotação de  $F$ , e o denotamos por  $\rho(F)$ , como sendo  $\rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n}$ .

**A.20** LEMA. [S] Seja  $f$  um homeomorfismo que preserva a orientação e  $F$  um levantamento para  $f$ . Então  $\rho(F^n) = n\rho(F)$ .

**A.21** DEFINIÇÃO. Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo que preserva a orientação e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $f$ . Então, o número de rotação de  $f$ , o qual denotamos por  $\rho(f)$  é definido por:

$$\rho(f) = \rho(F) - [\rho(F)],$$

onde  $[\alpha]$  é a parte inteira de um número  $\alpha$ .



Se  $x \in S^1$ , a idéia do número de rotação  $\rho(f)$  de  $x$  por uma aplicação  $f : S^1 \rightarrow S^1$ , é de que  $\rho(f(x))$  é a quantidade média de voltas por iterados que o ponto  $x$  dá.

## Estabilidade Estrutural

No capítulo 1 nos referimos a sistemas dinâmicos robustos e hiperbólicos. Essas definições surgiram na década de 60, do século passado, quando Smale se interessou pelo conceito de sistema dinâmico estruturalmente estável introduzido por A. Andronov e L. Pontryagin. Na verdade é importante salientar a diferença significativa entre os dois diferentes sentidos de estabilidade. Um deles se refere a trajetória estável (ou trajetória atratora) que significa que pontos próximos ficam cada vez mais próximos com o passar do tempo. Nós nos referimos, no capítulo 1, a este tipo de estabilidade quando falamos de variedade estável,  $W^s(0)$ . O outro tipo de estabilidade, se aplica ao sistema como um todo, e significa que o comportamento dinâmico global não é afetado com pequenas mudanças na lei de evolução. Essas pequenas mudanças são o que chamamos de perturbações. Um sistema robusto ou estruturalmente estável é aquele cujo comportamento topológico  $[P]$  de suas órbitas não se alteram mediante pequenas perturbações do campo (maiores detalhes em  $[S]$ ). Os campos estruturalmente estáveis são, basicamente, os campos hiperbólicos, o que fez  $\Delta$  parecer ser um deles, fato esse que não ocorre e mostramos no capítulo 1 o porquê.

A seguir, daremos mais três definições importantes para a compreensão do texto.

**A.22 DEFINIÇÃO.** *Um conjunto invariante  $\Lambda$  por um fluxo  $\phi^t$  tem estrutura hiperbólica invariante, se:*

(i) *cada ponto  $p$  em  $\Lambda$ , o espaço tangente para  $M$  se divide como soma direta de uma direção instável  $E_p^u$ , uma direção estável  $E_p^s$  e uma direção central (direção do campo)  $E_p^c = \text{span}(X(p))$ .*

(ii) *a separação é invariante sob a ação da derivada no sentido que:*

$$\begin{aligned} D(\phi^t)_p E_p^u &= E_{\phi^t(p)}^u \\ D(\phi^t)_p E_p^s &= E_{\phi^t(p)}^s \\ D(\phi^t)_p X(p) &= X\phi^t(p) \end{aligned}$$

(iii)  *$E_p^u$  e  $E_p^s$  varia continuamente com  $p$ .*

(iv) *Existem  $\mu > 0$  e  $C \geq 1$  tal que para  $t \geq 0$*

$$\begin{aligned} |D(\phi^t)_p v^s| &= C e^{-\mu t} |v^s|, \text{ para } v^s \in E_p^s \\ |D(\phi^{-t})_p v^u| &= C e^{-\mu t} |v^u|, \text{ para } v^u \in E_p^u. \end{aligned}$$

Existe também o conceito de conjunto invariante com estrutura hiperbólica por um difeomorfismo  $f$  que é o seguinte:

**A.23** DEFINIÇÃO. *Um conjunto invariante  $\Lambda$  tem uma estrutura hiperbólica por um difeomorfismo  $f$  em  $M$  se:*

- (i) *em cada ponto  $p$  em  $\Lambda$  o espaço tangente de  $M$  se divide em soma direta de  $E_p^u$  e  $E_p^s$ ,*  
 $T_p M = E_p^u \oplus E_p^s$
- (ii) *a separação é invariante sob a ação da aplicação derivada no sentido que  $Df_p(E_p^u) = E_{f(p)}^u$  e  $Df_p(E_p^s) = E_{f(p)}^s$ .*
- (iii) *existem  $0 < \lambda < 1$  e  $C \geq 1$  independente de  $p$  tais que para todo  $n \geq 0$ ,*

$$\begin{aligned} |Df_p^n v^s| &= c \lambda^n |v^s| \text{ para } v^s \in E_p^s \\ |Df_p^{-n} v^u| &= c \lambda^n |v^u| \text{ para } v^u \in E_p^u \end{aligned}$$

Também no capítulo 1 nos referimos a ponto singular hiperbólico cuja definição é a seguinte:

**A.24** DEFINIÇÃO. *Seja  $X$  um campo  $C^r$  sobre uma variedade  $M$  e  $p$  uma singularidade de  $X$ . Dizemos que  $p$  é uma singularidade hiperbólica se  $DX_p : T_p M \rightarrow T_p M$  é um campo linear hiperbólico, isto é,  $DX_p$  não tem autovalor com parte real igual a zero.*

# Bibliografia

- [BM] Berry, D. and Mestel, B. D. – ‘*Wandering intervals for Lorenz maps with bounded nonlinearity*’ (1991), London Math. Soc. 23 183-189.
- [Ka] Katok, A. and Hasselblat, B. – ‘*Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*’ (1995) Cambridge: Cambridge University Press - XVIII, 802 p.
- [MS] de Melo, W. and van Strien, S. J. – ‘*One-Dimensional Dynamics*’ (1993), Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- [P] Palis, J. e Melo, W. – ‘*Introdução aos Sistemas Dinâmicos*’ (1978), IMPA, CNPq.
- [PT] Palis, J. and Takens, F. – ‘*Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations: fractal dimensions and infinitely attractors*’ (1993), Cambridge university press.
- [Pu] Pujals, E. R. – ‘*Singular Circles and Explosions of the Non-Wandering Set*’ (1996), Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro.
- [R] Robinson, C. – ‘*Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*’ (1999), CRC Press LLC, Florida.
- [S] Santana, C. de S. – ‘*Caos em sistemas óticos distribuídos*’ (2002), UFBA, Salvador-Br.
- [Sp] Sparrow, C. – ‘*The Lorenz equations: Bifurcations, chaos and strange attractors*’ (1982), Springer-Verlag, New Yorg, Heidelberg and Berlin.
- [T] Tucker, W. – ‘*The Lorenz attractors exists*’ (1998), PhD thesis, Univ. Uppsala.
- [Tu] Tucker, W. – ‘*The Lorenz attractors exists*’ (1999), C. R. Acad. Sci. Paris, 328, Série I: 1197-1202.

Universidade Federal da Bahia-UFBA  
Instituto de Matemática/Depto. de Matemática

---

Campus de Ondina, Av. Adhemar de Barros s/n, CEP:40170-110

[www.im.ufba.br/hpinst/mestrado](http://www.im.ufba.br/hpinst/mestrado)