Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Algumas Caracterizações do Catenóide

Adson Sampaio Melo

Salvador — Bahia

Julho 2006

Algumas Caracterizações do Catenóide

Adson Sampaio Melo

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta (Orientador)

Prof. Dr. Marco Antonio Nogueira Fernandes

Prof. Dr. Nedir do Espírito Santo

Adson Sampaio Melo
"Algumas Caracterizações do Catenóide" /Salvador-Ba, 2006.

Orientador: Dr. Enaldo Silva Vergasta.
Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-graduacão em Matemática da UFBA, 47 páginas.

Palavras-Chave: Catenóide, Representação de Weierstrass, Mergulho mínimo e Curvatura total finita.

À Mario Melo Filho

(in memorian)

Agradecimentos

Antes de mais nada, agradeço a Deus que me protege e ilumina meus caminhos, agradeço a ele por mais esta vitória na minha vida. Gostaria de agradecer a todos os funcionários do IM que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste sonho.

Aos professores, muita sabedoria e dedicação. Em especial, aos professores José Fernandes, José Nelson, Ézio, Joseph, Armando, Edson e a meu orientador Enaldo.

Aos meus queridos e inesquecíveis colegas, Abílio, Gil, Maurício, Jarbas, Jackson, Rolando, Kleyber, Josaphat, Ariane, Mariana, Gabriela, Rosane, Silvia e Elisângela entre outros. A vocês meu muito obrigado pelos momentos de alegria e descontração que vivemos, mesmo nos momentos de dificuldades.

A minha mãe Janete, meus irmãos Márcia e Marcelo e em especial a meu pai que infelizmente já não se encontra mais em nosso plano.

A Jamile, minha companheira.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos resultados que caracterizam o catenóide a partir de algumas de suas propriedades geométricas e/ou topológicas.

Sumário

Introdução

O catenóide é uma superfície mínima obtida pela rotação da catenária em torno de um eixo. Esta superfície mínima pode ser caracterizada de várias formas. Vários pesquisadores deram contribuições significativas neste sentido. Pérez e Ros [PR1] e [PR2] mostraram que um mergulho próprio mínimo em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e força vertical é o catenóide. Como conseqüência desse resultado obtiveram, ainda, o catenóide, trocando-se a hipótese de força vertical por gênero zero. Seguindo a mesma linha, Osserman [Os1] mostrou que o catenóide caracteriza-se de outras maneiras, como a única superfície mínima mergulhada propriamente em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total igual a -4π ou com aplicação normal de Gauss injetiva. Hoffman e Karcher [HK] provaram que o catenóide é a única superfície mínima mergulhada propriamente em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total maior do que -8π, além de apresentar os mesmos resultados obtidos por Pérez e Ros. Finalmente, utilizando a técnica de reflexão de Alexandrov, Schoen [Sc] estabelece que o catenóide é a única superfície mínima mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e dois fins mergulhados.

O propósito deste trabalho é apresentar algumas caracterizações do catenóide, enunciadas a seguir.

Teorema 5.1: A única superfície mínima de revolução não-plana é o catenóide.

Teorema 5.2: O único anel mínimo mergulhado completo com curvatura total finita é o catenóide.

Teorema 5.3: A única superfície mínima não-plana completa propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e força vertical é o catenóide.

Teorema 5.4: A única superfície mínima não-plana completa propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e gênero zero é o catenóide.

Teorema 5.5: A única superfície mínima completa propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com

$\displaystyle\int_M KdA = -4\pi$ é o catenóide.

Teorema 5.6: A única superfície mínima não-plana completa propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com $\displaystyle\int_M KdA > -8\pi$ é o catenóide.

Teorema 5.7: A única superfície mínima completa propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita cuja a aplicação normal de Gauss é injetiva é o catenóide.

Teorema 5.8: A única superfície mínima completa propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e dois fins mergulhados é o catenóide.

A prova desses resultados é baseada nos trabalhos [PR1], [PR2], [Os1], [HK] e [Sc].

Estruturamos este trabalho da seguinte forma: No primeiro capítulo, apresentamos alguns conceitos e resultados de variáveis complexas e geometria diferencial que surgirão e serão utilizados no decorrer do trabalho. O resultado mais importante desse capítulo é o Teorema da Representação de Weierstrass. Esse teorema permite obtermos imersões mínimas a partir de uma função meromorfa e uma 1-forma holomorfa que satisfazem certas condições, onde cada superfície mínima é parametrizada e associada a um par dessa natureza. Outro aspecto interessante segue-se da influência de algumas propriedades desse par na geometria da superfície.

No segundo capítulo definimos curvatura total finita e apresentamos alguns resultados interessantes. Vemos que uma superfície mínima com curvatura total finita apresenta propriedades que não encontramos em outras superfícies mínimas. Osserman [Os1] mostrou que uma superfície desse tipo é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta menos um número finito de pontos, que correspondem aos fins da superfície. Mais do que isso, a aplicação normal de Gauss estende-se meromorficamente a estes pontos, ou seja, podemos determinar o vetor normal nestes pontos. Por outro lado, se a superfície for mergulhada, esses vetores são todos paralelos, o que implica nos fins organizados por altura. Além disso, a curvatura total dessas superfícies é fortemente relacionada com aspectos provenientes de sua topologia como, o gênero e número de fins.

No terceiro e quarto capítulos definimos força e λ-deformação associadas a uma superfície mínima, abordando alguns resultados e propriedades que servirão de base para o que faremos no quinto capítulo, principalmente nos Teoremas 5.3 e 5.4. O fato de utilizarmos a λ-deformação decorre do aspecto de que a família de imersões obtidas a partir da imersão original preserva algumas propriedades, além do fato de algumas dessas propriedades se relacionarem.

Finalmente, no quinto capítulo apresentamos algumas caracterizações do catenóide, demonstrando os teoremas 5.1 a 5.7.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo expomos alguns resultados conhecidos, tanto de variáveis complexas como de geometria diferencial que serão de grande utilidade para o desenvolvimento deste trabalho. Além disso, vamos fixar algumas notações que usamos mais adiante.

Considere $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ uma função contínua, onde $\mathbb{U}$ é um aberto de $\mathbb{C}$ identificado com $\mathbb{R}^2$. Dizemos que f é *holomorfa* em $z_0 \in \mathbb{U}$, se existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

O número complexo $f'(z_0)$ é chamado de *derivada* de f em z_0. Se f for holomorfa em todos os pontos de $\mathbb{U}$, diremos simplesmente que f é holomorfa.

Utilizando a identificação canônica de $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, escrevendo $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, se f é uma função *holomorfa* em $(x, y) \in \mathbb{U}$, então f satisfaz as *equações de Cauchy-Riemann*, isto é

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Definimos o *Laplaciano* Δf de uma função diferenciável $f : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pela expressão

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Dizemos que f é uma *função harmônica* em $\mathbb{U}$ se $\Delta f = 0$.

Seja $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Temos então, das equações de Cauchy-Riemann, que $u, v : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ são funções harmônicas, ou seja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Dada uma função harmônica $u : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ é natural perguntar se u é a parte real de alguma função holomorfa $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$, ou seja, se existe uma função $v : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ também harmônica, tal que $f = u + iv$ é uma função holomorfa. Neste caso, dizemos que v é uma *harmônica conjugada* de u. A resposta afirmativa para esta questão é garantida sempre que $\mathbb{U}$ é um aberto simplesmente conexo.

Denotamos por $D_r(z_0)$ o disco de centro em z_0 e raio r e por $D_r^*(z_0) = D_r(z_0) - \{z_0\}$ o disco perfurado de raio r e centro z_0.

Seja f uma função holomorfa num aberto $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$. Dizemos que $z_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{U}$ é uma *singularidade isolada* de f se existe um número real $r > 0$ tal que $D_r^*(z_0)$ está contido em $\mathbb{U}$. Ou seja, f está definida e é holomorfa em todos os pontos de uma vizinhança de z_0, exceto em z_0.

Sejam $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{U}$ uma singularidade isolada de f. Podemos considerar o desenvolvimento de f em *série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

em $D_r^*(z_0) = D_r(z_0) - \{z_0\}$ e os coeficientes a_j são dados por $a_j = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)dw}{(w - z)^{j+1}}$, onde $\gamma \subset D_r^*(z_0)$ é uma curva fechada simples.

O *resíduo* de f em z_0 é por definição o número complexo

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma f(w)dw.$$

Dizemos que z_0 é um *polo de ordem* n de f se existe $n > 0$ tal que $a_{-n} \neq 0$ e $a_j = 0$, para todo $j < -n$ na série de Laurent.

1.1 PROPOSIÇÃO. *Um ponto z_0 é um polo de ordem $k \geq 1$ de f se, e somente se, o limite*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$$

existe e é um número complexo não-nulo.

Dizemos que uma função f é *meromorfa* num aberto $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$ se existe um conjunto discreto $\Gamma \subset \mathbb{U}$ tal que f é uma função holomorfa em $\mathbb{U} - \Gamma$ e os pontos de Γ são os polos de f.

Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma curva fechada em $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C} - \gamma([a, b])$. Definimos o *índice de* γ com respeito a z_0 por

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Este número pode ser interpretado geometricamente como o número de voltas que a curva $\gamma(t)$ dá em torno do ponto z_0.

A seguir enunciamos três teoremas importantes de variáveis complexas que servirão para o cálculo de algumas integrais que surgirão no desenvolvimento deste trabalho.

1.2 TEOREMA. *(Teorema dos resíduos) Sejam $\gamma : I \to \mathbb{C}$ um caminho fechado simples, R a região interior a $\gamma(I)$ e $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa que possui um número finito de singularidades isoladas em R, digamos $z_1, ..., z_n$. Suponhamos que γ esteja orientado positivamente com respeito a R e que $\mathbb{U} \supset \overline{R} - \{z_1, ..., z_n\}$. Então*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i).$$

1.3 TEOREMA. *(Fórmula integral de Cauchy para derivadas) Sejam $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida em um aberto simplesmente conexo $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$ e $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma curva fechada simples em $\mathbb{U}$. Então $f \in C^\infty$ e*

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} \quad \forall z_0 \in Int(\gamma).$$

1.4 TEOREMA. *Sejam f uma função meromorfa em $\mathbb{U}$ e $\gamma : I \to \mathbb{U}$ um caminho simples fechado e R a região interior a $\gamma(I)$. Suponhamos que γ esteja orientada positivamente com respeito a R e que $\overline{R} \subset \mathbb{U}$. Suponhamos também que f não possui polos ou zeros em $\gamma(I)$. Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z(f, R) - P(f, R) = I(f \circ \gamma, 0),$$

onde $I(f \circ \gamma, 0)$ é o índice do caminho $f \circ \gamma$ com respeito a 0, $Z(f, R)$ e $P(f, R)$ são o número de zeros e polos de f em R, respectivamente.

A seguir expomos alguns conceitos e resultados conhecidos de geometria diferencial.

Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular* ou simplesmente uma *superfície* se, para cada $p \in M$, existem uma vizinhança $\mathbb{V}$ de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\psi : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{V} \cap M$, onde $\mathbb{U}$ é um aberto, tais que

(i) ψ é homeomorfismo;

(ii) ψ é diferenciável de classe C^∞;

(iii) Para todo $q = (u, v) \in \mathbb{U}$, a diferencial de ψ em q, $d\psi_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, é injetora.

Uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ é *mínima* se, e somente se, a curvatura média é igual a zero em todos os pontos de M.

Dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$, temos uma maneira natural de medir comprimentos de vetores tangentes a M. O produto interno do $\mathbb{R}^3$, induz, em cada plano tangente T_pM, um produto interno. Se u, $v \in T_pM \subset \mathbb{R}^3$, $< u, v >$ é igual ao produto interno de u e v como vetores de $\mathbb{R}^3$. Uma *métrica* numa superfície M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $< \, , >_p$ no plano tangente T_pM. A esse produto interno corresponde uma forma quadrática $I_p : T_pM \to \mathbb{R}$, definida por

$$I_p(v) = < v, v >_p = |v|^2 \geq 0.$$

A forma quadrática I_p em T_pM, definida acima, é chamada a *primeira forma quadrática* ou *primeira forma fundamental* da superfície M no ponto p.

1.5 Teorema. *(Princípio do máximo para superfícies mínimas)[DHKW] Se S_1 e S_2 são duas superfícies mínimas conexas com um ponto p em comum, tal que S_1 está em um mesmo lado de S_2, então uma vizinhança de p em S_1 coincide com uma vizinhança de p em S_2. Em particular, se S_1 e S_2 são ambas completas, então $S_1 = S_2$.*

1.6 Teorema. *Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície compacta, então a característica de Euler-Poincaré $\chi(M)$ assume um dos valores $2, 0, -2, ..., -2n, ...$ Além disso, se $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3$ é outra superfície compacta e $\chi(M) = \chi(\widetilde{M})$, então M é homeomorfa a $\widetilde{M}$.*

Toda superfície compacta $M \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa a uma esfera com um certo número k de asas. O número $k = \frac{2-\chi(M)}{2}$ é chamado de *gênero* de M.

Uma aplicação diferenciável $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ de uma superfície M em $\mathbb{R}^3$ é uma *imersão* se a diferencial $d\psi_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, ψ é homeomorfismo sobre $\psi(M) \subset \mathbb{R}^3$, diz-se que ψ é um *mergulho*.

Fazemos algumas considerações e mostramos alguns resultados no intuito de levantar condições para provar uma das ferramentas principais deste trabalho, o Teorema da Representacao de Weierstrass. Este teorema permitirá, dentro de certas condições, parametrizar superfícies mínimas. Além disso, vemos mais adiante de que forma podemos estudar certas propriedades dessas superfícies utilizando esse teorema.

Sejam $\psi : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, onde $\mathbb{U}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, e

$$\psi(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)).$$

Os coeficientes da primeira forma quadrática de ψ são definidos por

$$E(u,v) =< \psi_u(u,v), \psi_u(u,v) >,$$

$$F(u,v) =< \psi_u(u,v), \psi_v(u,v) >$$

e

$$G(u,v) =< \psi_v(u,v), \psi_v(u,v) > .$$

Dizemos que ψ é uma *superfície parametrizada isotérmica* se

$$E(u,v) = G(u,v) \quad e \quad F(u,v) = 0$$

em todos os pontos (u, v) de $\mathbb{U}$.

1.7 PROPOSIÇÃO. *Se $\psi : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada isotérmica, então*

$$\psi_{uu} + \psi_{vv} = 2EHN,$$

onde H é a curvatura média e N é o vetor normal unitário.

Prova. Como ψ é uma parametrização isotérmica, tem-se

$$E(u,v) =< \psi_u(u,v), \psi_u(u,v) >=< \psi_v(u,v), \psi_v(u,v) >= G(u,v) \tag{1.1}$$

e

$$F(u,v) =< \psi_u(u,v), \psi_v(u,v) >= 0 \tag{1.2}$$

Derivando (1.1) em relação a u, temos

$$< \psi_{uu}, \psi_u >=< \psi_{vu}, \psi_v >=< \psi_{uv}, \psi_v > . \tag{1.3}$$

Agora, derivando (1.2) em relação a v, temos

$$< \psi_{uv}, \psi_v > + < \psi_u, \psi_{vv} >= 0. \tag{1.4}$$

Verificamos, a partir de (1.3) e (1.4), que

$$< \psi_{uu}, \psi_u >= - < \psi_u, \psi_{vv} >,$$

ou seja,

$$< \psi_{uu} + \psi_{vv}, \psi_u >= 0.$$

Derivando (1.1) em relação a v, temos

$$< \psi_{uv}, \psi_u >=< \psi_{vv}, \psi_v >=< \psi_{vu}, \psi_u > . \tag{1.5}$$

Agora derivando (1.2) em relação a u, temos

$$< \psi_{uu}, \psi_v > + < \psi_u, \psi_{vu} >= 0. \tag{1.6}$$

Verificamos a partir de (1.5) e (1.6), que

$$< \psi_{uu}, \psi_v >= - < \psi_{vv}, \psi_v >,$$

logo,

$$< \psi_{uu} + \psi_{vv}, \psi_v >= 0.$$

Como $< \psi_{uu} + \psi_{vv}, \psi_u >=< \psi_{uu} + \psi_{vv}, \psi_v >= 0$, então $\psi_{uu} + \psi_{vv}$ é paralelo a N.

Considerando

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2} = \frac{Eg + Ee}{2E^2} = \frac{g + e}{2E}$$

temos

$$g + e = 2EH,$$

onde

$$g =< \psi_{vv}, N > \quad \text{e} \quad e =< \psi_{uu}, N > .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\psi_{uu} + \psi_{vv} &= <\psi_{uu} + \psi_{vv}, N> N \\
&= (<\psi_{uu}, N> + <\psi_{uu}, N>)N \\
&= (e+g)N \\
&= 2EHN,
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

1.8 COROLÁRIO. *Seja*

$$\begin{aligned}
\psi : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
(u,v) &\mapsto \psi(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))
\end{aligned}$$

uma superfície parametrizada isotérmica. Então ψ é uma superfície mínima se, e somente se, suas funções coordenadas x_1, x_2 e x_3 são harmônicas.

Prova. Suponhamos que ψ é uma superfície mínima, ou seja, $H = 0$. Então, pela Proposição 1.25,

$$\psi_{uu} + \psi_{vv} = (\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2}) + (\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 x_3}{\partial v^2}) = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial v^2} &= 0
\end{aligned}$$

logo, x_1, x_2 e x_3 são funções harmônicas.

Reciprocamente, se x_1, x_2 e x_3 são harmônicas, isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial v^2} &= 0
\end{aligned}$$

então, pela Proposição 1.25, temos

$$2EHN = \psi_{uu} + \psi_{vv} = 0.$$

Logo, $H = 0$ e concluímos daí que ψ é uma superfície mínima. ■

1.9 LEMA. *Sejam* $\psi = (x_1, x_2, x_3) : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *uma aplicação diferenciável e* $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ *dadas por*

$$\phi_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u} - i\frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \phi_2 = \frac{\partial x_2}{\partial u} - i\frac{\partial x_2}{\partial v} \quad e \quad \phi_3 = \frac{\partial x_3}{\partial u} - i\frac{\partial x_3}{\partial v}.$$

Então $< \psi_u, \psi_u >=< \psi_v, \psi_v >$ *e* $< \psi_u, \psi_v >= 0$ *se, e somente se,* $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$*. Neste caso,* ψ *é uma superfície parametrizada regular (e isotérmica) se, e somente se, as funções* ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 *não se anulam, simultaneamente, em ponto algum do domínio.*

Prova. Primeiramente, observemos que

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= (x_u - ix_v)^2 + (y_u - iy_v)^2 + (z_u - iz_v)^2 \\ &= < \psi_u, \psi_u > - < \psi_v, \psi_v > -2i < \psi_u, \psi_v > . \end{aligned}$$

Logo $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ se, e somente se, $< \psi_u, \psi_u >=< \psi_v, \psi_v >$ e $< \psi_u, \psi_v >= 0$. Neste caso, em cada ponto do domínio, os vetores ψ_u e ψ_v são ortogonais e têm o mesmo comprimento. Daí, ψ é uma superfície parametrizada regular se, e somente se, ψ_u (e, portanto, também ψ_v) é não nulo em todos os pontos, o que, pela definição das funções ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, é equivalente a dizer que estas funções não se anulam, simultaneamente, em ponto algum do domínio. ∎

1.10 LEMA. *(i) Se* ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 *são funções holomorfas em* $\mathbb{U}$*, satisfazendo*

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0,$$

então existem uma função holomorfa f *e uma função meromorfa* g *em* $\mathbb{U}$*, tais que*

$$\phi_1 = \frac{1}{2} f(1 - g^2) \tag{1.7}$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2} f(1 + g^2) \tag{1.8}$$

$$\phi_3 = fg \tag{1.9}$$

e cada polo de ordem m *de* g *é um zero de ordem* k *de* f*, com* $k \geq 2m$*.*

Reciprocamente, se f *é uma função holomorfa em* $\mathbb{U}$ *e* g *é uma função meromorfa em* $\mathbb{U}$*, tais que cada polo de ordem* m *de* g *é um zero de ordem pelo menos* $2m$ *de* f*, então as funções* $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ *definidas, respectivamente, por* (1.7), (1.8) *e* (1.9)*, são holomorfas e satisfazem*

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0.$$

(ii) Em um polo qualquer de g*, tem-se* $k > 2m$ *se, e somente se,* ϕ_1, ϕ_2*, e* ϕ_3 *se anulam neste ponto.*

Prova. (i) Como $\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2=0$, podemos escrever $\phi_1^2+\phi_2^2=-\phi_3^2$, que equivale a

$$(\phi_1-i\phi_2)(\phi_1+i\phi_2)=-\phi_3^2. \tag{1.10}$$

Se $\phi_3\equiv 0$, tomando $g\equiv 0$ e $f=2\phi_1$, vemos que (1.7), (1.8) e (1.9) são satisfeita. Se, por outro lado, ϕ_3 não é identicamente nula, por (1.10), vemos que a função holomorfa $(\phi_1-i\phi_2)$ também não se anula.

Definindo, $f=\phi_1-i\phi_2$ e $g=\frac{\phi_3}{\phi_1-i\phi_2}$, claramente f é holomorfa e g é meromorfa. Além disso, por (1.10) temos

$$\phi_1+i\phi_2=-\frac{\phi_3^2}{\phi_1-i\phi_2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f(1-g^2) &= \frac{1}{2}(\phi_1-i\phi_2)(1-\frac{\phi_3^2}{(\phi_1-i\phi_2)^2})=\phi_1,\\
\frac{i}{2}f(1+g^2) &= \frac{i}{2}(\phi_1-i\phi_2)(1+\frac{\phi_3^2}{(\phi_1-i\phi_2)^2})=\phi_2,\\
fg &= (\phi_1-i\phi_2)(\frac{\phi_3}{\phi_1-i\phi_2})=\phi_3.
\end{aligned}$$

Portanto, (1.7), (1.8) e (1.9) são satisfeitas.

Como ϕ_1 e f são holomorfas, da equação (1.7), obtemos a holomorfia de fg^2. Agora se w_0 é um polo de ordem m de g na vizinhança de w_0, escrevemos

$$g(w)=\frac{g_1(w)}{(w-w_0)^m}, \quad \text{com } g_1(w_0)\neq 0$$

e

$$f(w)=(w-w_0)^k f_1(w), \quad \text{com } f_1(w_0)\neq 0 \text{ e } k\geq 0.$$

Como $fg^2(w)=(w-w_0)^{k-2m}f_1(w)g_1(w)$ é holomorfa, então devemos ter $k-2m\geq 0$, isto é, w_0 é um zero de f com multiplicidade pelo menos $2m$.

Para provar a recíproca, observemos que na vizinhança de cada polo w_0 de g podemos escrever

$$g(w)=\frac{g_1(w)}{(w-w_0)^m}, \quad \text{com } g_1(w_0)\neq 0$$

e

$$f(w)=(w-w_0)^k f_1(w), \quad \text{com } f_1(w_0)\neq 0 \text{ onde } k\geq 2m.$$

Então

$$fg(w) = (w - w_0)^{k-m} f_1(w) g_1(w)$$

e

$$fg^2(w) = (w - w_0)^{k-2m} f_1(w) g_1^2(w). \tag{1.11}$$

Como $k - 2m \geq 0$, conclui-se que fg e fg^2 são holomorfas. De (1.7), (1.8) e (1.9), como f é holomorfa e a soma de funções holomorfas é ainda holomorfa, concluímos que ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 são holomorfas.

Ainda por (1.7), (1.8) e (1.9), temos

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= \frac{1}{4} f^2(1 - 2g^2 + g^4) - \frac{1}{4} f^2(1 - 2g^2 + g^4) + f^2 g^2 \\ &= -\frac{1}{2} f^2 g^2 - \frac{1}{2} f^2 g^2 + f^2 g^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Seja w_0 um polo de ordem m de g. Já sabemos que w_0 é um zero de ordem pelo menos $2m$ de f. Logo, por (1.7), (1.8) e (1.9), w_0 é um zero de ϕ_1 e ϕ_2 se, e somente se, é um zero de fg^2. Pela equação (1.11), w_0 é um zero de fg^2 se, e somente se, $k > 2m$. ■

1.11 Teorema. *(Representação de Weierstrass). Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima e $\psi = (x_1, x_2, x_3) : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde $\psi(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$, uma parametrização isotérmica de M, definida num domínio simplesmente conexo $\mathbb{U}$. Então existem uma função holomorfa f e uma função meromorfa g em $\mathbb{U}$, tais que*

$$x_1 = Re \int_{z_0}^{z} \frac{1}{2} f(1 - g^2) dz \tag{1.12}$$

$$x_2 = Re \int_{z_0}^{z} \frac{i}{2} f(1 + g^2) dz \tag{1.13}$$

$$x_3 = Re \int_{z_0}^{z} fg dz \tag{1.14}$$

para algum $z_0 \in \mathbb{U}$, e cada polo de g com multiplicidade m corresponde a um zero de f com multiplicidade $2m$.

Reciprocamente, se f é uma aplicação holomorfa e g uma função meromorfa num aberto simplesmente conexo $\mathbb{U}$, tais que cada polo de g com multiplicidade m é zero de f com multiplicidade $2m$, então $\psi : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por (1.12), (1.13) e (1.14) é uma superfície parametrizada isotérmica mínima.

Prova. Seja

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto \psi(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)) \end{aligned}$$

uma superfície isotérmica mínima. Como vimos na Proposição 1.8, as funções coordenadas x_1, x_2 e x_3 são harmônicas. Sendo o domínio $\mathbb{U}$ simplesmente conexo, existe para cada uma delas uma função harmônica conjugada $\widetilde{x_1}$, $\widetilde{x_2}$ e $\widetilde{x_3}$ respectivamente, todas definidas no mesmo domínio $\mathbb{U}$, de modo que

$$\theta_1 = x_1(u,v) + i\widetilde{x_1}(u,v)$$

$$\theta_2 = x_2(u,v) + i\widetilde{x_2}(u,v)$$

e

$$\theta_3 = x_3(u,v) + i\widetilde{x_3}(u,v)$$

são holomorfas.

Derivando as funções θ_1, θ_2 e θ_3 em relação à variável complexa $w = u+iv$, obtemos três funções, também holomorfas, dadas por

$$\phi_1 = \theta_1'(w) = \frac{\partial x_1}{\partial u} - i\frac{\partial x_1}{\partial v} \tag{1.15}$$

$$\phi_2 = \theta_2'(w) = \frac{\partial x_2}{\partial u} - i\frac{\partial x_2}{\partial v}$$

e

$$\phi_3 = \theta_3'(w) = \frac{\partial x_3}{\partial u} - i\frac{\partial x_3}{\partial v}.$$

Observemos que

$$x_1 = Re\theta_1' = Re\int_{z_0}^{z} \phi_1 \tag{1.16}$$

$$x_2 = Re\theta_2' = Re\int_{z_0}^{z} \phi_2 \tag{1.17}$$

$$x_3 = Re\theta_3' = Re\int_{z_0}^{z} \phi_3 \tag{1.18}$$

para algum $z_0 \in \mathbb{U}$ e, como ψ é isotérmica, pelo lema (1.9), temos $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$.

Usando a parte (i) do Lema 1.10, vemos que existem funções f e g tais que f é holomorfa, g é meromorfa, cada polo de g com multiplicidade m é zero de f com multiplicidade $k \geq 2m$. Se $k > 2m$ em algum polo w_0 então a parte (ii) do Lema 1.10 afirma que $\phi_1(w_0) = \phi_2(w_0) = \phi_3(w_0) = 0$. Daí, por (1.15), $\frac{\partial x_1}{\partial u}(w_0) = \frac{\partial x_1}{\partial v}(w_0) = 0$, o que não é possível pois a superfície é regular. Concluímos então que $k = 2m$.

Reciprocamente, se f e g satisfazem as condições requeridas então, definindo ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 por (1.7), (1.8) e (1.9), respectivamente, segue-se do Lema 1.10 que ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 são holomorfas e satisfazem

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0.$$

Definindo x_1, x_2 e x_3 por (1.12), (1.13) e (1.14), respectivamente, temos de acordo com o Lema 1.9 e a parte (ii) do Lema 1.10, que ψ é uma superfície parametrizada regular isotérmica. Além disso, como x_1, x_2 e x_3 são definidas respectivamente por (1.12), (1.13) e (1.14), cada uma das funções x_1, x_2 e x_3 é a parte real de uma função holomorfa, logo são harmônicas. Concluímos, usando a Proposição 1.8, que ψ é uma superfície mínima. ■

Enunciamos a Representação de Weierstrass do ponto de vista de superfície de Riemann e vemos que alguns resultados importantes são obtidos. Para isto apresentamos algumas definições.

Uma *superfície de Riemann* é um espaço topológico M, munido de uma família $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in L}$ de aplicações, $\psi_\alpha : \mathbb{U}_\alpha \subset \mathbb{C} \to \mathbb{V}_\alpha$, tais que

(i) $\bigcup_{\alpha \in L} \mathbb{V}_\alpha = M$;

(ii) ψ_α é um homeomorfismo, $\forall \in L$;

(iii) Se $\mathbb{V}_\alpha \cap \mathbb{V}_\beta \neq \emptyset$, então $\psi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta : \psi_\beta^{-1}(\mathbb{V}_\beta) \to \psi_\alpha^{-1}(\mathbb{V}_\alpha)$ é holomorfa.

Podemos estender a noção de aplicação holomorfa para superfícies de Riemann. Se M e $\overline{M}$ são superfícies de Riemann, dizemos que $f : M \to \overline{M}$ é *holomorfa* quando toda representação $\psi_\beta^{-1} \circ f \circ \psi_\alpha$ de f, em termos de parametrizações como acima definidas (em M e $\overline{M}$), é uma função holomorfa.

Dizemos que uma bijeção $f : M \to \overline{M}$ é uma bijeção holomorfa se f e f^{-1} são funções holomorfas. Dadas duas superfícies de Riemann M e $\overline{M}$, se existe uma bijeção holomorfa $f : M \to \overline{M}$ dizemos que M e $\overline{M}$ são *conformemente equivalentes*. Uma 1-forma

ϕ em uma superfície de Riemann M é uma *1-forma holomorfa* se, em cada parametrização conforme $\psi : \mathbb{U} \subset \mathbb{C} \to M$, ϕ se escreve como $\phi = \omega(z)dz$, onde $\omega : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ é uma aplicação holomorfa.

1.12 Teorema. *[Os2] Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de Riemann, $g : M \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ uma função meromorfa e ϕ uma 1-forma holomorfa em M. Suponha que*

(i) Os únicos zeros de ϕ coincidem com os zeros ou polos de g, com a mesma ordem;

(ii) Para qualquer curva fechada $\gamma \subset M$, tem-se

$$Re \int_\gamma \Phi = Re \int_\gamma (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 0, \tag{1.19}$$

onde

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(g^{-1} - g)\phi, \tag{1.20}$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2}(g^{-1} + g)\phi \tag{1.21}$$

e

$$\phi_3 = \phi. \tag{1.22}$$

Então a aplicação $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\psi(p) = Re \int_{p_0}^{p} (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \tag{1.23}$$

é uma imersão conforme mínima de M. O par (g, ϕ) é chamado de dados de Weierstrass da superfície M.

A condição (1.19) diz que as 1-formas ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 não têm períodos reais.

Uma propriedade interessante da função g, que decorre desta representação, é o fato dela descrever a aplicação normal de Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2(1)$. Mais precisamente, pode-se verificar que, se $\pi : \mathbb{S}^2(1) - \{(0,0,1)\} \to \overline{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é a projeção estereográfica a partir do polo norte de $\mathbb{S}^2(1)$, então $g = \pi \circ N$.

A seguir, damos alguns exemplos de superfícies mínimas parametrizadas pela Representação de Weierstrass, que serão de grande utilidade para o desenvolvimento deste trabalho. Para isto, vamos considerar $\psi : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima.

Exemplo **1.1.** *O catenoíde pode ser parametrizado pelos dados de Weierstrass*

$$(g(z) = z, \phi = \frac{dz}{z}) \quad e \quad M = \mathbb{C} - \{0\},$$

ou seja, a imersão

$$\psi(z) = Re \int_{z_0}^{z} (\frac{1}{2}(z^{-1} - z), \frac{i}{2}(z^{-1} + z), 1)\frac{dz}{z}$$

é o catenoíde.

Exemplo **1.2.** *A superfície de Enneper de ordem k pode ser parametrizada pelos dados de Weierstrass*

$$(g(z) = z^k, \phi = g(z)dz) \quad e \quad M = \mathbb{C},$$

ou seja, a imersão

$$\psi(z) = Re \int_{z_0}^{z} (\frac{1}{2}(z^{-k} - z^k), \frac{i}{2}(z^{-k} + z^k), 1)z^k dz$$

é a superfície de Enneper de ordem k.

Uma propriedade interessante desta superfície mínima é que tem auto-interseções no infinito.

Vemos algumas quantidades básicas de M (ver [BC]) em termos de g e ϕ. A métrica induzida em M pode ser expressa como

$$ds = \frac{1}{2}(|g| + |g|^{-1})|\phi|, \tag{1.24}$$

a curvatura Gaussiana dessa métrica é dada por

$$K = \frac{-16}{(|g| + |g|^{-1})^4} . \mid \frac{dg}{g\phi} \mid^2, \tag{1.25}$$

e, finalmente, podemos expressar o vetor normal num ponto p com

$$N(p) = \frac{2}{1 + |g|^2}(Re(g), Im(g), \frac{|g|^2 - 1}{2}).$$

Uma *curva divergente* em M é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0, \infty) \rightarrow M$ tal que para todo compacto $K \subset M$ existe $t_0 \in (0, \infty)$ com $\alpha(t) \notin K$ para $t > t_0$. Define-se o comprimento de uma curva divergente α por

$$\int_\alpha ds = \lim_{t \to \infty} \int_0^t |\alpha'(t)|dt.$$

A superfície M é *completa* se $\int_\alpha ds = \infty$ para qualquer curva divergente α em M. Nesse caso diz-se também que a métrica é completa.

Capítulo 2

Superfície mínima com curvatura total finita

Neste capítulo, apresentamos o conceito de curvatura total finita, abordando alguns resultados fortes e até mesmo surpreendentes do ponto vista geométrico de algumas superfícies. Vemos que o fato de uma superfície mínima apresentar curvatura total finita implica em propriedades que não obtemos em outras superfícies mínimas.

Como a função curvatura Gaussiana K de uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ é o produto das curvaturas principais, se M é uma superfície mínima, então as curvaturas principais tem sinais opostos e portanto, K é uma função não-positiva. Outra maneira de obter K é como o determinante da matriz da diferencial da aplicação normal de Gauss. A área da imagem esférica de M, contando com multiplicidade, pode ser calculada como (ver [dC_1])

$$A(N(M)) = -\int_M KdA.$$

Esta integral é denominada *curvatura total* da superfície mínima M.

Na família das superfícies mínimas completas, temos uma importante e natural subclasse das superfícies cuja integral da curvatura de Gauss $C(M) = \int_M KdA$ é finita. Quando isso ocorre dizemos que a superfície mínima tem *curvatura total finita*. As superfícies desta subclasse apresentam várias propriedades interessantes, como vemos no teorema que se segue.

Antes de mencionar estas propriedades vamos definir aplicação própria.

Uma aplicação $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é *própria* se $f^{-1}(K)$ é compacto em X para todo compacto $K \subset Y$.

O teorema que apresentamos a seguir descreve algumas propriedades das superfícies mínimas de curvatura total finita.

2.1 TEOREMA. *[Os1] Seja $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa (não necessariamente mergulhada) com curvatura total finita. Então*

(i) M é conformemente equivalente a $\overline{M} - \{p_1, ..., p_r\}$, onde $\overline{M}$ é uma superfície de Riemann compacta de gênero k, os pontos $p_1, ..., p_r$ são os fins de M e $r \geq 1$;

(ii) ψ é própria;

(iii) Os dados Weierstrass (g, ϕ) extendem-se meromorficamente a $\overline{M}$;

(iv) A curvatura total é um múltiplo de 4π e satisfaz

$$\int_M KdA \leq -4\pi(k + r - 1);$$

(v) Se ψ é um mergulho então todos vetores normais em $p_1, ..., p_r$ são paralelos e, depois de uma rotação, se necessário, podemos assumir que $N(p_i) = (0, 0, \pm 1), i = 1, ..., r$.

Seja D_j uma vizinhança perfurada de $p_j \in \overline{M}$. Denominamos $\psi(D_j)$ como um *fim* de M.

Observemos que o gênero de M coincide com o gênero da compactificação $\overline{M}$.

Dada uma superfície de Riemann M e uma aplicação meromorfa $F : M \to \mathbb{S}^2$, para qualquer $q \in \mathbb{S}^2$ o conjunto $F^{-1}(q) = \{p \in M / F(p) = q\}$ tem o mesmo número de elementos s, que é chamado *grau* da aplicação meromorfa F.

Podemos determinar o grau de N em termos do gênero da superfície de Riemann compacta $\overline{M}$ e o número de fins da imersão pela *Fórmula Jorge-Meeks* [JM]. Quando M tem fins mergulhado, esta fórmula estabelece que

$$grau(N) = k + r - 1.$$

Note da fórmula acima que o grau da aplicação normal de Gauss é fortemente relacionada com a curvatura total da imersão ψ. Além disso, segue diretamente da definição de grau que a aplicação normal de Gauss é injetiva se, e somente se, grau(N)=1.

Exemplos simples de superfície mínima completa com curvatura total finita são o plano e o catenoíde. Estes dois exemplos constituem os modelos no infinito para qualquer superfície mínima mergulhada, pois, como mostramos mais adiante, cada fim mergulhado de uma superfície mínima completa com curvatura total finita deve ser assintótico a um semi-catenoíde ou a um plano.

Se permitimos que tais superfícies tenham auto-intersecções, então fins mais complicados podem aparecer, como na superfície de Enneper.

Fora de um conjunto compacto uma superfície mínima completa mergulhada M com curvatura total finita tem uma forma absolutamente controlada, como mostramos na Proposição 2.4, além disso, pelo item (i) do Teorema 2.1 existe um número finito de fins paralelos.

Mostramos alguns resultados importantes, nesse contexto, a respeito do plano.

2.2 PROPOSIÇÃO. *O plano é a única superfície mínima completa mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e exatamente um fim.*

Prova. Seja $\psi = (x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{R}^3$ um mergulho mínimo completa com curvatura total finita e um fim. Observe que este fim deve ser do tipo planar. Caso contrário, seria do tipo catenóide e $x_3 : M \to \mathbb{R}^3$ seria ilimitada. Como o fim é do tipo planar, a função terceira coordenada $x_3 : M \to \mathbb{R}^3$ é harmônica e limitada superiormente (ou inferiormente). Assim x_3 deve ser constante, logo a superfície $\psi(M)$ deve ser um plano. ■

2.3 PROPOSIÇÃO. *O plano é a única superfície mínima completa propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita igual a zero.*

Prova. Seja $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ um mergulho próprio mínimo completo com curvatura total igual a zero. Pelo item (iv) do Teorema 2.1 a curvatura total de ψ satisfaz a condição

$$\int_M KdA \leq -4\pi(k + r - 1)$$

e por hipótese temos $\displaystyle\int_M KdA = 0$. Assim $0 \leq -4\pi(k + r - 1)$, isto implica em $k + r \leq 1$. Decorre daí e pelo fato de $r \geq 1$ que $r = 1$, logo, pela Proposição 2.2, a superfície $\psi(M)$ é um plano. ■

A seguir vemos como se comporta a terceira função coordenada $x_3 : D - \{p\} \to \mathbb{R}$ de um fim mergulhado de curvatura total finita.

2.4 PROPOSIÇÃO. *[Sc] Suponha que $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ tem um fim mergulhado $\psi : D - \{p\} \to \mathbb{R}^3$ de curvatura total finita e que a aplicação de Gauss no ponto p é igual a $(0, 0, \pm 1)$. Então,* *fora de um conjunto compacto, $\psi(D - \{p\})$ é um gráfico com o seguinte comportamento assintótico:*

$$x_3(x_1, x_2) = \alpha \log \rho + \beta + \rho^{-2}(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \tag{2.1}$$

onde $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Além disso, as duas primeiras componentes ϕ_1, ϕ_2 em (1.19) têm polos de ordem dois em p e não têm resíduo, enquanto a terceira componente ϕ_3, também em (1.19), ou é regular (que ocorre se e somente se $\alpha = 0$ em (2.1)) ou tem um polo simples.

Prova. Provamos esta proposição no caso em que a aplicação de Gauss no fim mergulhado é injetiva. Neste caso assumimos, sem perda de generalidade, que $p = 0$ e $g(z) = z$ em $D = \{z/|z| < R\}$. (Em geral podemos assumir que $g(z) = z^k$ em $D = \{z/|z| < R\}$ e pode-se mostrar que $\alpha = 0$ quando $k > 1$).

Por (1.12), (1.13) e (1.14), temos,

$$\begin{aligned} x_1(z) &= Re \int_{z_0}^{z} \phi_1 = Re \int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}(g^{-1} - g)\phi = Re \int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}(z^{-1} - z)\phi \\ x_2(z) &= Re \int_{z_0}^{z} \phi_2 = Re \int_{z_0}^{z} \frac{i}{2}(g^{-1} + g)\phi = Re \int_{z_0}^{z} \frac{i}{2}(z^{-1} + z)\phi \\ x_3(z) &= Re \int_{z_0}^{z} \phi. \end{aligned}$$

Observe que

$$2(x_1 - ix_2) = \int_{z_0}^{z} g^{-1}\phi - \overline{\int_{z_0}^{z} g\phi} = \int_{z_0}^{z} z^{-1}\phi - \overline{\int_{z_0}^{z} z\phi}.$$

Expressamos agora ϕ mais precisamente, escrevendo,

$$\phi = (c_{-k}z^{-k} + ... + c_{-1}z^{-1} + c_0 + zw_1(z))dz,$$

onde $w_1(z)$ é uma função holomorfa.

Observemos que $x_1 - ix_2$ não é bem-definida se $c_0 \neq 0$, pois a primeira integral na expressão $x_1 - ix_2$ produziria um termo $c_0 \ln z$, que não é uma função bem-definida em z, logo $c_0 = 0$. Por razões similares (usando a segunda integral), obtemos que $c_{-2} = 0$.

2.1 Afirmação. *ϕ tem um polo em zero.*

Prova. Suponha que ϕ não tem um polo em zero, isto significa que $\phi = zw_1(z)dz$, onde w_1 é uma função holomorfa.

Considere uma curva divergente $\alpha : [0,1) \to M$ definida por $\alpha(t) = (1-t)z_0$, onde $z_0 \in D$.

Escolha uma bola compacta $\overline{D}(0,r) \subset D$, onde $r > |z_0|$. Como w_1 é contínua e $\overline{D}(0,r)$ é compacto, podemos encontrar $c > 0$, tal que $|w_1(z)| < c$ sempre que $|z| < r$.

Calculando a integral de ds, ao longo de α, temos

$$\begin{aligned}
\int_\alpha ds &= \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{(|z|^2+1)}{|z|}|zw_1(z)||dz| \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (|z|^2+1)|w_1(z)||dz| \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\beta\to 1}\int_0^\beta (|\alpha(t)|^2+1)|w_1(\alpha(t))||\alpha'(t)|dt \\
&< \frac{c(R^2+1)}{2}\lim_{\beta\to 1}\int_0^\beta |\alpha'(t)|dt \\
&= \frac{c(R^2+1)|z_0|}{2}.
\end{aligned}$$

Isto contradiz o fato da métrica ds ser completa, portanto ϕ tem um polo em zero.

2.2 Afirmação. *ϕ tem um polo simples em $p = 0$.*

Prova. Suponha, por absurdo, que o polo de ϕ não é simples. Isto implica, pela Afirmação 2.2, que $c_{-k} \neq 0$ para $k \geq 3$.

Considere $f(z) = (x_1 - ix_2)(z) = \int_{z_0}^z z^{-1}\phi - \overline{\int_{z_0}^z z\phi}$, onde $\phi = (c_{-k}z^{-k} + ... + c_0 + zw_1(z))dz$. Por integração podemos expressar $f(z)$ como

$$f(z) = -\frac{c_{-k}z^{-k}}{k} - ... - c_{-1}z^{-1} + \frac{\overline{c}_{-k}\overline{z}^{-k+2}}{k-2} + ... + \overline{c}_{-1}\overline{z}^{-1} + w_3(z) + \text{constante},$$

onde w_3 é contínua.

Escolha $\gamma \subset D$ um círculo $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ de raio suficientemente pequeno e de modo que a região R, limitada por γ, não contenha nenhum zero de $f(z)$.

Como $f \circ \gamma$ é uma curva fechada em M, pois f é contínua e γ é uma curva fechada, e f tem um polo de ordem k e não tem zeros em R, então, pelo Teorema 1.4, $I(f \circ \gamma, 0) = -k$, $k \geq 3$. Logo $f \circ \gamma$ tem auto-interseções.

Por outro lado, como o fim é mergulhado, a imagem do círculo $z = re^{i\theta}$ é uma curva que não tem auto-interseções. Além disso, como γ é um círculo de raio suficientemente pequeno e tomado próximo de um ponto correspondente a um fim de ψ, segue-se daí que o vetor normal ao longo desta curva se aproxima da vertical.

Estes dois fatos se contradizem, pois a projeção da imagem do círculo $z = re^{i\theta}$ em M não pode ter auto-interseções, como em $f \circ \gamma$. Assim ϕ tem um polo simples em zero.

Portanto, pelas Afirmações (2.1) e (2.2), obtemos que $\phi = (c_{-1}z^{-1} + zw_1(z))dz$, onde $w_1(z)$ é holomorfa.

Analisemos agora

$$\begin{aligned} x_3 &= Re \int_\gamma \phi \\ &= Re \int_\gamma (c_{-1}z^{-1} + zw_1(z))dz \\ &= Re(2\pi i c_{-1}), \end{aligned}$$

onde $\gamma \subset D$ é uma curva fechada. Como x_3 é bem-definida, ou seja , $Re \displaystyle\int_\gamma \phi = 0$, então c_{-1} deve ser um número real.

Provamos, agora, que ϕ_1 e ϕ_2 têm polo duplo em $p = 0$ e não têm resíduos em $p = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} z^2\phi_1 &= \lim_{z\to 0} z^2(z^{-1} - z)(c_{-1}z^{-1} + zw_1(z)) \\ &= \lim_{z\to 0}(c_{-1} + z^2w_1(z) - c_{-1}z^2 - z^4w_1(z)) \\ &= c_{-1} \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto ϕ_1 tem um polo duplo em $p = 0$. De forma análoga, conclui-se que ϕ_2 também tem um polo duplo em $p = 0$. Além disso

$$\begin{aligned} Res(\phi_1, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma (z^{-1} - z)(c_{-1}z^{-1} + zw_1(z))dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{1}{z^2}(c_{-1} + z^2w_1(z) - c_{-1}z^2 - z^4w_1(z))dz, \end{aligned}$$

onde $\gamma \subset D - \{p\}$ e γ é uma curva fechada. Aplicando a Fórmula integral de Cauchy para derivadas na última igualdade obtemos

$$\begin{aligned} Res(\phi_1, 0) &= 2z_0w_1(z_0) + z_0^2w_1'(z_0) - 2c_{-1}z_0 + 4z_0^3w_1(z_0) + z_0^4w_1'(z_0) \mid_{z_0=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De forma análoga concluímos que $\mathrm{Res}(\phi_2, 0) = 0$.

Agora podemos escrever

$$x_1 - ix_2 = c_{-1}/z + M_0 + zw_2(z) + \overline{zw_3(z)}$$

e

$$x_3 = M_1 + c_{-1}\ln|z| + \mathcal{O}(|z|^2),$$

onde $w_i(z)$ é holomorfa e M_i é uma constante, e pode-se mostrar que

$$x_3(z) = const. - c_{-1}\ln\rho - \rho^{-2}c_{-1}Re(x_1 - ix_2).c + \mathcal{O}(\rho^{-2}), \tag{2.2}$$

onde $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e c é uma constante. ■

A partir da Proposição 2.4, podemos observar alguns fatos importantes a respeito de um fim de uma superfície mínima mergulhada com curvatura total finita e definir algumas coisas.

2.5 Observação. *(i) Um fim mergulhado de curvatura total finita é assintótico a um catenóide ($x_3 = \alpha\log r + \beta$) ou a um plano ($x_3 = \beta$);*

(ii) Observe da equação (2.2) que o crescimento logaritmo de um fim mergulhado, parametrizado num disco perfurado $D - \{p\}$, é igual a $-c_{-1}$, onde c_{-1} é o resíduo de ϕ em p;

(iii) Considere um fim mergulhado de uma superfície mínima completa de curvatura total finita. O fim é tipo planar se $\alpha = 0$ na equação (2.1) e é um fim tipo catenóide caso contrário.

(iv) Em termos da representação de Weierstrass, um fim mergulhado completo $\psi : D - \{p\} \to \mathbb{R}^3$ de curvatura total finita onde a aplicação de Gauss extendida em p é igual a $(0, 0, \pm 1)$, pode ser parametrizado na forma

$$g(z) = z^k \quad e \quad \phi = z^k(\frac{\alpha}{z^2} + h(z))dz,$$

onde uma das seguintes possibilidades ocorrem:

(iv.1) Fim tipo catenóide: $k = 1$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ (α é o crescimento logarítmico do fim). Neste caso, o fim é assintótico a um semi-catenóide;

(iv.2) Fim tipo planar: $k \geq 2$ e $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$. Agora o fim é assintótico a um plano.

Observe que os dados de Weierstrass acima devem satisfazer a condição (i) do Teorema 1.12, o que de fato ocorre.

Capítulo 3

Superfície mínima com força vertical

Neste capítulo, vemos o conceito de força numa superfície mínima, como se comporta a força em um fim mergulhado de curvatura total finita, algumas propriedades, quais as condições para termos forças verticais e abordamos tal conceito e propriedades via Representação de Weierstrass. Vemos de que forma podemos transportar tudo isto para o teorema que permite parametrizar as superfícies mínimas. Para isto fazemos algumas considerações iniciais.

Consideremos uma imersão mínima conforme $\psi : M \to \mathbb{R}^3$. Dada uma curva fechada $\gamma \subset M$, denotemos $\eta = -d\psi(J\gamma')$ o vetor conormal ao longo de γ, onde, em cada plano tangente, J é a rotação de 90^0 no sentido positivo e γ' é a derivada de γ com respeito ao parâmetro comprimento de arco.

A *força de* ψ ao longo de γ é definida por

$$F(\psi, \gamma) = \int_{\gamma} \eta ds.$$

Quando γ é o bordo de um domínio regular $\Omega \subset M$, pelo teorema da Divergência temos

$$F(\psi, \gamma) = \int_{\partial\Omega} \eta ds = \int_{\Omega} \Delta\psi dA = 0,$$

pois ψ é mínima, daí suas coordenadas são harmônicas, ou seja, $\Delta\psi = 0$.

Assim, se γ e ξ são curvas numa mesma classe de homologia, considerando um domínio regular tal que $\partial\Omega = \gamma \cup \xi$, ($\gamma$ e ξ com orientações opostas), obtemos

$$0 = \int_{\Omega} \Delta\psi dA = \int_{\partial\Omega} \eta ds = \int_{\gamma\cup\xi} \eta ds = \int_{\gamma} \eta ds - \int_{\xi} \eta ds$$

logo,

$$\int_\gamma \eta ds = \int_\xi \eta ds.$$

Portanto, a força de ψ ao longo de γ não depende da curva em uma mesma classe de homologia.

Considerando-se que a imersão conforme mínima $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ em (1.23) é bem-definida, isto é, $Re \int_\gamma \Phi = 0$, é natural questionar sobre o significado geométrico de $Im \int_\gamma \Phi$. Para responder essa questão enunciamos e provamos a proposição a seguir.

3.1 PROPOSIÇÃO. *Se $\Phi = d(\psi + i\psi^*)$ é a forma Weierstrass de ψ, onde ψ^* é a imersão mínima conjugada que globalmente não é bem-definida e $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, então a força de ψ ao longo de γ coincide com o período de ψ^* ao longo da mesma curva.*

Prova. Seja

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{U} \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (x_1(x), x_2(x), x_3(x)), \end{array}$$

onde $\mathbb{U}$ é um aberto simplesmente conexo.

Como as funções coordenadas x_1, x_2 e x_3 são funções reais, podemos expressar a diferencial de ψ no ponto p como

$$\begin{array}{rcl} d\psi_p(x) & = & (dx_1(p)(x), dx_2(p)(x), dx_3(p)(x)) \\ & = & (\frac{\partial x_1}{\partial u}(p).u + \frac{\partial x_1}{\partial v}(p).v, \frac{\partial x_2}{\partial u}(p).u + \frac{\partial x_2}{\partial v}(p).v, \frac{\partial x_3}{\partial u}(p).u + \frac{\partial x_3}{\partial v}(p).v), \end{array}$$

onde $p = (a, b)$ e $x = (u, v) \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

Além disso, pelo fato de $\mathbb{U}$ ser um aberto simplesmente conexo, podemos garantir a existência das funções harmônicas conjugadas x_1^*, x_2^* e x_3^*.

Observe que

$$\psi + i\psi^* = (x_1 + ix_1^*, x_2 + ix_2^*, x_3 + ix_3^*),$$

onde ψ^* é a imersão mínima conjugada cuja as funções coordenadas são x_1^*, x_2^* e x_3^*. Pelas equações de Cauchy-Riemann, temos

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x_1^*}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\frac{\partial x_1^*}{\partial u}$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = \frac{\partial x_2^*}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial v} = -\frac{\partial x_2^*}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} = \frac{\partial x_3^*}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial v} = -\frac{\partial x_3^*}{\partial u}.$$

Agora, aplicando as equações de Cauchy-Riemann na diferencial de ψ, concluímos

$$\begin{aligned} d\psi_p(x) &= (\frac{\partial x_1^*}{\partial v}(p).u - \frac{\partial x_1^*}{\partial u}(p).v, \frac{\partial x_2}{\partial v}(p).u - \frac{\partial x_2}{\partial u}(p).v, \frac{\partial x_3}{\partial v}(p).u + \frac{\partial x_3}{\partial u}(p).v) \\ &= (dx_1^*(p)(Jx), dx_2^*(p)(Jx), dx_3^*(p)(Jx)) \\ &= d\psi_p^*(Jx), \end{aligned}$$

logo

$$d\psi_p(u,v) = d\psi_p^*(-v,u).$$

Concluímos daí

$$F(\psi,\gamma) = \int_\gamma \eta ds = -\int_\gamma d\psi(J\gamma')ds = -\int_\gamma d\psi^*(J^2\gamma')ds = \int_\gamma d\psi^*(\gamma')ds$$

e, portanto

$$F(\psi,\gamma) = Im\int_\gamma \Phi.$$

■

Usando os dados de Weierstrass $(g,\, \phi)$, a equação acima reduz-se a

$$F(\psi,\gamma) = Im\int_\gamma (\frac{1}{2}(g^{-1}-g), \frac{i}{2}(g^{-1}+g), 1)\phi.$$

A proposição a seguir revela sobre quais condições temos forca vertical.

3.2 Proposição. *$F(\psi,\gamma)$ é vertical se, e somente se, $\int_\gamma g\phi = \int_\gamma g^{-1}\phi = 0$ para qualquer curva fechada $\gamma \subset M$, isto é, $g\phi$ e $g^{-1}\phi$ são formas diferenciais exatas em M.*

Prova. Suponha que F(ψ,γ) é vertical, então

$$Im\int_\gamma (g^{-1}-g)\phi = Im\int_\gamma i(g^{-1}+g)\phi = 0. \tag{3.1}$$

Como ψ é bem-definida isto implica em

$$Re\int_\gamma (g^{-1}-g)\phi = Re\int_\gamma i(g^{-1}+g)\phi = 0. \tag{3.2}$$

Observe que

$$Re\int_\gamma (g^{-1}+g)\phi = Im\int_\gamma i(g^{-1}+g)\phi = 0 \tag{3.3}$$

e

$$Re\int_\gamma i(g^{-1}+g)\phi = -Im\int_\gamma (g^{-1}+g)\phi = 0. \tag{3.4}$$

Logo pelas igualdades (3.2) e (3.3) temos

$$Re\int_\gamma (g^{-1}-g)\phi = Re\int_\gamma (g^{-1}+g)\phi = 0$$

e daí

$$Re\int_\gamma g\phi = Re\int_\gamma g^{-1}\phi = 0.$$

De forma análoga, usando as igualdades (3.1) e (3.4) obtemos

$$Im\int_\gamma (g^{-1}-g)\phi = -Im\int_\gamma (g^{-1}+g)\phi = 0$$

e portanto

$$Im\int_\gamma g\phi = Im\int_\gamma g^{-1}\phi = 0.$$

Assim

$$\int_\gamma g\phi = \int_\gamma g^{-1}\phi = 0.$$

Em particular, $g\phi$ e $g^{-1}\phi$ são formas diferenciais exatas em M.

Para a prova da recíproca, é imediato que

$$\int_\gamma g\phi = \int_\gamma g^{-1}\phi = 0$$

implica em força vertical. ■

A seguir apresentamos um resultado que permite observar como é o comportamento da força em um fim mergulhado de curvatura total finita de uma superfície mínima.

3.3 PROPOSIÇÃO. *Sejam $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme com curvatura total finita, γ uma curva fechada contida numa vizinhança perfurada D_j de um ponto $p_j \in \overline{M}$ tal que p_j pertence a região limitada por γ e $\psi(D_j)$ um fim mergulhado da imersão. Então*

$$F(\psi,\gamma) = (0,0,2\pi\alpha),$$

onde α é o crescimento logarítmico do fim.

Em particular, $F\,(\psi,\gamma)$ é vertical no fim tipo catenóide e é zero num fim tipo planar.

Prova. Seja $\gamma \subset D_j$ uma curva fechada numa vizinhança perfurada de $p_j \in \overline{M}$. Pela Proposição 3.1

$$F(\psi,\gamma) = Im\int_\gamma \Phi = Im\int_\gamma (\phi_1,\phi_2,\phi_3).$$

Aplicando o Teorema dos Resíduos na integral acima, temos

$$F(\psi,\gamma) = Im(2\pi i Res(\phi_1,p), 2\pi i Res(\phi_2,p), 2\pi i Res(\phi_3,p)).$$

Segundo a Proposição 2.4, $\mathrm{Res}(\phi_1,p) = \mathrm{Res}(\phi_2,p) = 0$ logo,

$$F(\psi,\gamma) = Im(0,0,2\pi i Res(\phi_3,p)) = Im(0,0,2\pi i Res(\phi,p)) = (0,0,2\pi\alpha).$$

Em particular, no fim tipo planar ($\alpha = 0$), temos $\mathrm{F}(\psi,\gamma) = (0,\ 0,\ 0)$ e no fim tipo catenóide ($\alpha \neq 0$), temos $\mathrm{F}(\psi,\gamma) = (0,\ 0,\ 2\pi\alpha)$. ■

Capítulo 4

λ-Deformação de uma superfície mínima

Neste capítulo, vemos o conceito de λ-deformação e alguns resultados a respeito. Vimos no Teorema 1.12 que podemos parametrizar superfícies mínimas, a partir de um par (g, ϕ), onde g é uma função meromorfa, ϕ uma 1-forma holomorfa e ambas satisfazem certas condições. Considerando-se $\lambda > 0$, o par $(\lambda g, \phi)$ pode determinar, via Teorema 1.12, uma imersão mínima. Um ponto importante é saber quais propriedades da imersão dada pelo par $(\lambda g, \phi)$ são herdadas da imersão dada pelo par (g, ϕ), e como se relacionam as propriedades das duas imersões.

Mostramos na Proposição 4.1 que a condição da imersão ψ ter força vertical garante que a imersão ψ_λ é bem-definida em M para todo $\lambda > 0$, isto é, a verticalidade das forças de ψ é equivalente à existência de uma deformação a um parâmetro via Representação de Weierstrass. Para cada número positivo λ, considere em M a aplicação meromorfa $g_\lambda = \lambda g$. Então o par $(g_\lambda,\ \phi)$ determina uma aplicação bem-definida $\psi_\lambda : M \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\psi_\lambda(z) = Re \int_{z_0}^{z} \Phi_\lambda = Re \int_{z_0}^{z} (\frac{1}{2}(\lambda^{-1}g^{-1} - \lambda g), \frac{i}{2}(\lambda^{-1}g^{-1} + \lambda g), 1)\phi. \tag{4.1}$$

Observe que os zeros e polos de $(\lambda g, \phi)$ são os mesmos de (g, ϕ) e a terceira função coordenada é a mesma para ψ e ψ_λ.

Sejam $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima e (g, ϕ) os dados de Weierstrass dessa imersão. Denominamos de λ-*deformação* a família $\{\psi_\lambda\}_{\lambda>0}$, onde $(\lambda g, \phi)$ são seus dados de Weierstrass.

O próximo resultado mostra a equivalência entre os fatos da imersão ψ_λ, dada por (4.1), ser bem-definida para todo $\lambda > 0$ e a verticalidade das forças de ψ.

4.1 PROPOSIÇÃO. *A imersão ψ_λ é bem-definida para todo $\lambda > 0$ se, e somente se, ψ tem força vertical.*

Prova. Suponha que ψ não tem força vertical, ou seja,

$$Im \int_\gamma (g^{-1} - g)\phi \neq 0 \quad \text{ou} \quad Im \int_\gamma i(g^{-1} + g)\phi \neq 0.$$

Considere $Im \int_\gamma i(g^{-1} + g)\phi \neq 0$. Então

$$Re \int_\gamma g^{-1}\phi = Im \int_\gamma ig^{-1}\phi \neq -Im \int_\gamma ig\phi = -Re \int_\gamma g\phi,$$

ou seja,

$$Re \int_\gamma (g^{-1} + g)\phi \neq 0.$$

Isto contradiz o fato da imersão ψ_λ ser bem-definida para todo $\lambda > 0$, logo ψ tem força vertical.

Se $Im \int_\gamma (g^{-1} - g)\phi \neq 0$ a prova é análoga.

Reciprocamente, dada uma curva fechada $\gamma \subset M$, temos

$$\begin{aligned} \int_\gamma \Phi &= Re \int_\gamma \Phi + iIm \int_\gamma \Phi \\ &= Re \int_\gamma \Phi + iF(\psi, \gamma) \\ &= iF(\psi, \gamma) \\ &= iIm \int_\gamma (\frac{1}{2}(g^{-1} - g), \frac{i}{2}(g^{-1} + g), 1)\phi, \end{aligned}$$

pois ψ é bem-definida, isto é, $Re \int_\gamma \Phi = 0$. A partir desta identidade observe que a condição de ter força vertical, pela Proposição 3.2, é equivalente ao fato de $g\phi$ e $g^{-1}\phi$ serem exatas, ou seja, $\int_\gamma g\phi = \int_\gamma g^{-1}\phi = 0$. Então concluímos

$$\int_\gamma \lambda^{-1} g^{-1}\phi = \lambda^{-1} \int_\gamma g^{-1}\phi = 0$$

e

$$\int_\gamma \lambda g\phi = \lambda \int_\gamma g\phi = 0.$$

Como

$$\psi_\lambda = Re \int \Phi_\lambda = Re \int (\frac{1}{2}(\lambda^{-1}g^{-1} - \lambda g), \frac{i}{2}(\lambda^{-1}g^{-1} + \lambda g), 1)\phi$$

e $Re \int_\gamma \phi = 0$, pois ψ é bem-definida, obtemos daí e da conclusão acima que $Re \int \Phi_\lambda = 0$, ou seja, a ψ_λ é bem-definida para todo $\lambda > 0$. ■

A métrica e a curvatura de ψ_λ de acordo com (1.24) e (1.25), são dadas por

$$ds_\lambda = \frac{1}{2}(\lambda|g| + \lambda^{-1}|g|^{-1})|\phi| \quad e \quad K_\lambda = \frac{-16}{(\lambda|g| + \lambda^{-1}|g|^{-1})^4} . \mid \frac{dg}{g\phi} \mid^2 .$$

Daqui por diante, $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ denotará uma imersão mínima não-plana com força vertical. Mostramos alguns resultados a respeito da λ-deformação.

4.2 PROPOSIÇÃO. *Seja $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme:*

(i) ψ é completa se, e somente se, ψ_λ é completa para todo $\lambda > 0$;

(ii) A curvatura total de ψ é finita se, e somente se, a curvatura total de ψ_λ é finita para todo $\lambda > 0$.

Prova. (i) Considere $a = min\{\lambda^{-1}, \lambda\}$, $b = max\{\lambda^{-1}, \lambda\}$ e $\lambda > 0$. Então

$$\begin{aligned} ads &= \frac{1}{2}(a|g| + a|g|^{-1})|\phi| \\ &\le \frac{1}{2}(a|g| + b|g|^{-1})|\phi| \\ &= ds_\lambda \\ &\le \frac{1}{2}(b|g| + b|g|^{-1})|\phi| \\ &= bds. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$ads \le ds_\lambda \le bds, \tag{4.2}$$

onde ds e ds_λ são as métrica de ψ e ψ_λ, respectivamente.

A partir desta desigualdade podemos obter a desigualdade

$$b^{-1}ds_\lambda \le ds \le a^{-1}ds_\lambda. \tag{4.3}$$

Para provarmos o item (i) é suficiente mostrar que as métricas ds e ds_λ são completas.

Suponha, por absurdo, que ds_λ não é completa. Então existe uma curva divergente $\gamma \subset M$ tal que $\displaystyle\int_\gamma ds_\lambda$ é finita, digamos $\displaystyle\int_\gamma ds_\lambda = c$, $c \in \mathbb{R}$. Usando a desigualdade (4.3) temos

$$b^{-1}c = b^{-1}\int_\gamma ds_\lambda \leq \int_\gamma ds \leq a^{-1}\int_\gamma ds_\lambda = a^{-1}c.$$

Isto é uma contradição, pois ds é completa. Portanto, ds_λ é completa.

De forma completamente análoga, usando a desigualdade (4.2), prova-se a recíproca.

(ii) Considere a e b como na prova do item (i). Então

$$\begin{aligned}
b^{-4}K &= \frac{16b^{-4}}{(|g|+|g|^{-1})^4}.\mid \frac{dg}{g\phi}\mid^2\\
&= \frac{-16}{(b|g|+b|g|^{-1})^4}.\mid \frac{dg}{g\phi}\mid^2\\
&\leq \frac{-16}{(b|g|+a|g|^{-1})^4}.\mid \frac{dg}{g\phi}\mid^2\\
&= K_\lambda\\
&\leq \frac{-16}{(a|g|+a|g|^{-1})^{-4}}.\mid \frac{dg}{g\phi}\mid^2\\
&= \frac{-16a^4}{(|g|+|g|^{-1})^4}.\mid \frac{dg}{g\phi}\mid^2\\
&= a^{-4}K.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$b^{-4}K \leq K_\lambda \leq a^{-4}K, \tag{4.4}$$

onde K e K_λ é a curvatura Gaussiana de ψ e ψ_λ, respectivamente.

De forma análoga ao item (i), podemos obter a outra desigualdade

$$a^4K_\lambda \leq K \leq b^4K_\lambda. \tag{4.5}$$

Suponha que a curvatura total de ψ é finita, isto é, $\displaystyle\int_M KdA = m$, $m \in \mathbb{R}$. A partir da desigualdade (4.4) obtemos

$$b^{-4}m = b^{-4}\int_M KdA \leq \int_M K_\lambda dA \leq a^{-4}\int_M KdA = a^{-4}m.$$

Portanto $\displaystyle\int_M K_\lambda dA$ é finito e ψ_λ tem curvatura total finita.

De maneira análoga, usando a desigualdade (4.5), pode-se provar a recíproca. ■

Os próximos resultados darão propriedades importantes a respeito da λ - deformação em termos de mergulhos.

4.3 LEMA. *Seja $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima. Se $p \in M$ é um ponto onde o vetor normal é vertical, então, para toda vizinhança D de p, existe $\lambda > 0$ tal que $\psi_{\lambda/D}$ é não injetiva.*

Prova. Suponha que p é um ponto onde vetor normal é $N(p)$=$(0,0,-1)$. Podemos assumir que $g(p) = 0$.

Tome coordenadas conformes nas proximidades de p tais que os dados de Weierstrass de ψ são dados por $g(z) = z^k$, $\phi = z^k(a + zh(z))\, dz$ em $|z| < \epsilon$, onde k é um número inteiro positivo, a um número complexo diferente de zero e h uma função holomorfa.

A seguir, para estudarmos ψ em torno de p consideramos a nova coordenada conforme $\xi = \lambda^{\frac{1}{k}} z$ definida em $|\xi| < \lambda^{\frac{1}{k}}\epsilon$. Então ψ_λ é determinada por

$$g_\lambda(\xi) = \xi^k, \quad \phi_\lambda = \frac{\xi^k}{\lambda^{1+\frac{1}{k}}}(a + \frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{k}}} h(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{k}}}))d\xi.$$

Agora, expandindo homoteticamente ψ_λ com fator $\lambda^{1+\frac{1}{k}}$, obtemos uma nova imersão mínima $\lambda^{1+\frac{1}{k}}\psi_\lambda$ com dados de Weierstrass $(g_\lambda,\ \lambda^{1+\frac{1}{k}}\phi_\lambda)$.

4.1 AFIRMAÇÃO. *A imersão $\lambda^{1+\frac{1}{k}}\psi_\lambda$ converge uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C}$ para a imersão mínima cujos dados de Weierstrass são $g_\infty = \xi^k$, $\phi_\infty = a\xi^k d\xi$, $\xi \in \mathbb{C}$.*

Prova. Dado um conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, $\forall \xi \in K$, temos

$$\begin{aligned}
|(g_\lambda, \lambda^{1+\frac{1}{k}}\psi_\lambda) - (g_\infty, \phi_\infty)| &= |(\xi^k, \xi^k(a + \frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{k}}}h(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{k}}}))d\xi) - (\xi^k, a\xi^k d\xi)| \\
&= |(0, \frac{\xi^{k+1}}{\lambda^{\frac{1}{k}}}h(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{k}}})d\xi| \\
&\leq |\frac{\xi^{k+1}}{\lambda^{\frac{1}{k}}}h(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{k}}})d\xi| \\
&= |\frac{\xi^{k+1}}{\lambda^{\frac{1}{k}}}||h(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{k}}})d\xi| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \lambda \longrightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

pois $|\frac{\xi^{k+1}}{\lambda^{\frac{1}{k}}}| \longrightarrow 0$ e h é uma função contínua.

Esta superfície limite é uma k-superfície de Enneper, que é não mergulhada no infinito, portanto tem auto-intersecção e $\psi_{\lambda/D}$ é não injetiva para λ suficientemente grande, como queríamos. ■

4.4 LEMA. *Se $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima com um fim planar, então para toda vizinhança D deste fim, existe $\lambda > 0$ tal que $\psi_{\lambda/D}$ é não injetiva.*

Prova. Um fim planar é parametrizado pelos dados de Weierstrass

$$g(z) = z^k, \quad \phi = z^k(\frac{a}{z^2} + h(z))dz, \quad 0 < |z| < \epsilon,$$

onde $k \geq 2$ é um número inteiro, $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ e h é uma função holomorfa. Com o mesmo argumento da prova do Lema 4.3 aplicado a estes dados de Weierstrass dá uma superfície limite determinada por $g_\infty(\xi) = \xi^k$, $\phi_\infty = \frac{a}{\xi^{2-k}}dz$ com fim não mergulhado no infinito, logo $\psi_{\lambda/D}$ é não injetiva para λ suficientemente grande, como queríamos. ■

Enunciamos e demonstramos a Proposição 4.5 cujo Corolário 4.6 será utilizado na demonstração da Proposição 4.7.

4.5 PROPOSIÇÃO. *Sejam M e N superfícies, com M compacta e $\varphi : M \to N$ uma aplicação contínua e sobrejetiva. Então φ é homeomorfismo se, e somente se, φ é injetiva.*

Prova. É imediato que se φ é um homeomorfismo, então φ é injetiva. Provemos agora a recíproca.

Sejam $b = \varphi(a) \in N$ e $y_n = \varphi(x_n)$ uma seqüencia de pontos em N, com $y_n \to b$. Devemos mostrar que φ^{-1} é contínua, ou seja, $\varphi^{-1}(y_n) = x_n \to a = \varphi^{-1}(b)$. Como $x_n \in M$, a sequência x_n é limitada, então x_n admite uma subseqüência convergente. Seja x_j uma subseqüência convergindo para c. Como M é compacto temos $c \in M$. Além disso, $y_j = \varphi(x_j)$ ainda converge para b. Como φ é contínua no ponto c, temos que $\varphi(c) = \lim \varphi(x_j) = b$. Sendo φ injetiva, devemos ter $a = c$. ■

4.6 COROLÁRIO. *Sejam $M = \overline{M} - \{p_1, ..., p_r\}$ uma superfície, onde $\overline{M}$ é uma superfície compacta e $\varphi : M \to \varphi(M) \subset \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima. Então φ é homeomorfismo se, e somente se, φ é injetiva.*

Prova. Sejam $y_n \in \varphi(M)$, tal que $y_n \to y$ e $x_n = \varphi^{-1}(y_n) \in M = \overline{M} - \{p_1, ..., p_r\}$, podemos assumir que existe uma subseqüência $x_j \to x_0 \in \overline{M}$. Podemos afirmar que $x_0 \neq p_i$, $i = 1, ..., r$, onde p_i corresponde a um fim qualquer de M. De fato, se $x_j \to x_0 = p_i$, então $\varphi(x_n) \to \infty$, mas $\varphi(x_j) = y_j \in \varphi(M)$. Portanto, $x_0 \in M$ e pela Proposição 4.5, φ é um homeomorfismo. ■

Para o próximo resultado necessitamos do conceito de aplicação de recobrimento.

Uma aplicação $P : \widetilde{X} \to X$ chama-se uma *aplicação de recobrimento* ou, simplesmente, um *recobrimento* quando cada ponto $x \in X$ pertence a um aberto $\mathbb{V} \subset X$ tal que

$P^{-1}(\mathbb{V}) = \bigcup_\alpha \mathbb{U}_\alpha$ é uma reunião de abertos $\mathbb{U}_\alpha$, dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por P homeomorficamente sobre $\mathbb{V}$.

4.7 PROPOSIÇÃO. *Se $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima propriamente mergulhada com curvatura total finita e as imersões ψ_λ são bem-definidas para todo $\lambda > 0$, então ψ_λ é um mergulho para todo $\lambda > 0$.*

Prova. Observe primeiramente alguns fatos. Como a imersão ψ_λ é bem-definida para todo $\lambda > 0$ e ψ tem curvatura total finita, segue-se pelo item (ii) da Proposição 4.2 que a imersão ψ_λ também tem curvatura total finita para todo $\lambda > 0$, logo existe fins da imersão ψ_λ para todo $\lambda > 0$. Os dados de Weierstrass $(g_\lambda = \lambda g, \phi)$ da deformação ψ_λ , não mudam nem zeros nem polos de g e ϕ, assim os fins de ψ_λ nos pontos p_j de $M = \overline{M} - \{p_1, ..., p_r\}$ são os mesmos de ψ para todo $\lambda > 0$, isto é, fins tipo planares permanecem planares e fins tipo catenóide permanecem catenóide; mais do que isso seus crescimentos logarítmicos $\alpha = -Res\phi(p)$ são independentes de λ.

Pelo Corolário 4.6, para provar a proposição basta mostrar que ψ_λ é injetiva.

Defina $\Delta = \{\lambda > 0/\psi_\lambda$ é injetiva$\}$ e observe que $\Delta \neq \emptyset$, pois, $\psi_1 = \psi$ é um mergulho por hipótese, logo $1 \in \Delta$. A proposição será provada se deduzirmos que Δ é aberto e fechado em $]0, \infty[$.

Fixe λ_0 e considere dois fins distintos, p_i e p_j, com $i \neq j$. Escolha vizinhanças disjuntas D_i, D_j de p_i e p_j de modo que $\psi(D_i)$ e $\psi(D_j)$ são representantes desses fins.

Suponha que ψ_{λ_0} é um mergulho. Se estes fins têm crescimentos logarítmicos distintos, isto é, se $\alpha_i \neq \alpha_j$, a função distância de $\psi(D_i)$ e $\psi(D_j)$ não se aproxima de zero e é ilimitada. Isto porque os fins são assintóticos a um catenóide (ou a um plano se um dos $\alpha' s$ é zero) com diferentes crescimentos logarítmicos. Já que estes crescimentos são independentes de λ, segue-se que $\psi_\lambda(D_i) \cap \psi_\lambda(D_j) = \emptyset$ para λ suficientemente próximo de λ_0. No caso $\alpha_i = \alpha_j$, $\psi_{\lambda_0}(D_i)$ e $\psi_{\lambda_0}(D_j)$ são assintóticos a fins com o mesmo crescimento logarítmico e a distância entre estes fins mergulhados se aproxima de zero, isto é, eles não são assintóticos no infinito. Recorrendo ao Princípio do Máximo para superfícies mínimas, obtemos que $\psi_\lambda(D_i) \cap \psi_\lambda(D_j) = \emptyset$ para λ suficientemente próximo de λ_0. Isto mostra que ψ_λ é injetiva fora de um conjunto compacto.

4.2 AFIRMAÇÃO. *ψ_λ converge uniformemente para ψ_{λ_0} em conjuntos compactos de M, quando λ é suficientemente próximo de λ_0.*

Prova. Seja $K \subset M$ um compacto. Para qualquer $z \in K$, temos

$$\begin{aligned}
|\psi_\lambda(z) - \psi_{\lambda_0}(z)| &= |Re \int_{z_0}^{z} [\frac{1}{2}(\lambda^{-1}g^{-1}(z) - \lambda g(z)), \frac{i}{2}(\lambda^{-1}g^{-1}(z) + \lambda g(z)), 1]\phi \\
&- Re \int_{z_0}^{z} [\frac{1}{2}(\lambda_0^{-1}g^{-1}(z) - \lambda_0 g(z)), \frac{i}{2}(\lambda_0^{-1}g^{-1}(z) + \lambda_0 g(z)), 1]\phi| \\
&= |\lambda - \lambda_0||Re \int_{z_0}^{z} [\frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda\lambda_0}g^{-1}(z) + g(z)), \frac{i}{2}(\frac{1}{\lambda\lambda_0}g^{-1}(z) - g(z)), 0]\phi| \\
&= |\lambda - \lambda_0||\beta(z)|.
\end{aligned}$$

Como a função contínua

$$\beta(z) = Re \int_{z_0}^{z} [\frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda\lambda_0}g^{-1}(z) + g(z)), \frac{i}{2}(\frac{1}{\lambda\lambda_0}g^{-1}(z) - g(z)), 0]\phi$$

está definida no compacto K, existe $c > 0$ tal que $|\beta(z)| < c$. Além disso, como λ é suficientemente próximo de λ_0, significa que para todo $\frac{\epsilon}{c} > 0$ dado implica em $|\lambda - \lambda_0| < \frac{\epsilon}{c}$. Assim

$$|\psi_\lambda(z) - \psi_{\lambda_0}(z)| = |\lambda - \lambda_0||\beta(z)| < \frac{\epsilon}{c}.c = \epsilon, \quad \forall z \in K,$$

como afirmamos.

Uma conseqüência da Afirmação 4.2 é que ψ_λ é injetiva dentro de um conjunto compacto para λ suficientemente próximo de λ_0. De fato, suponha que ψ_{λ_0} é injetiva e devido à convergência uniforme de ψ_λ para ψ_{λ_0} num compacto $K \subset M$, dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$ temos $|\psi_\lambda(z) - \psi_{\lambda_0}(z)| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall z \in K$.

Considere q_1, $q_2 \in K$. Podemos escrever a diferença entre $\psi_{\lambda_0}(q_1)$ e $\psi_{\lambda_0}(q_2)$ como a seguir

$$\psi_{\lambda_0}(q_1) - \psi_{\lambda_0}(q_2) = \psi_{\lambda_0}(q_1) - \psi_\lambda(q_1) + \psi_\lambda(q_1) - \psi_\lambda(q_2) + \psi_\lambda(q_2) - \psi_{\lambda_0}(q_2).$$

Pela desigualdade triangular e da igualdade acima, obtemos que

$$|\psi_{\lambda_0}(q_1) - \psi_{\lambda_0}(q_2)| \leq |\psi_\lambda(q_1) - \psi_{\lambda_0}(q_1)| + |\psi_\lambda(q_1) - \psi_\lambda(q_2)| + |\psi_\lambda(q_2) - \psi_{\lambda_0}(q_2)|.$$

Suponha agora $\psi_\lambda(q_1) = \psi_\lambda(q_2)$, então

$$|\psi_{\lambda_0}(q_1) - \psi_{\lambda_0}(q_2)| < \frac{\epsilon}{2} + 0 + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

Assim $\psi_{\lambda_0}(q_1) - \psi_{\lambda_0}(q_2) = 0$, isto é, $\psi_{\lambda_0}(q_1) = \psi_{\lambda_0}(q_2)$. Como ψ_{λ_0} é injetiva, devemos ter $q_1 = q_2$ e ψ_λ é injetiva. Portanto ψ_λ é injetiva em toda parte e Δ é aberto. Resta mostrar que Δ é fechado.

Suponha que $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em Δ que converge a λ_0 e suponha que ψ_{λ_0} não é um mergulho, isto é, $\psi_{\lambda_0}(q_1) = \psi_{\lambda_0}(q_2)$ para pontos q_1 e $q_2 \in M$ e $q_1 \neq q_2$.

4.3 Afirmação. *As imersões ψ_{λ_k} converge uniformemente para ψ_{λ_0} em conjuntos compactos de M.*

Prova. A prova deste fato é análoga a prova da Afirmação 4.2.

Devido a convergência uniforme de ψ_{λ_k} a ψ_{λ_0} em conjuntos compactos de M, alguma vizinhança Θ_1 de q_1 é aplicada por ψ_{λ_0} de modo a estar em um mesmo lado da imagem de alguma vizinhança Θ_2 de q_2. De fato, suponha que a interseção entre $\psi_{\lambda_0}(\Theta_1)$ e $\psi_{\lambda_0}(\Theta_2)$ ocorre em mais de um ponto, então podemos encontrar seqüencias $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\widetilde{q}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ num compacto $K \subset M$, tais que $q_n \to q_1$, $\widetilde{q}_n \to q_2$ e $\psi_{\lambda_0}(q_n) = \psi_{\lambda_0}(\widetilde{q}_n)$. Podemos escrever a diferença entre $\psi_{\lambda_k}(q_n)$ e $\psi_{\lambda_k}(\widetilde{q}_n)$ como a seguir

$$\psi_{\lambda_k}(q_n) - \psi_{\lambda_k}(\widetilde{q}_n) = \psi_{\lambda_k}(q_n) - \psi_{\lambda_0}(q_n) + \psi_{\lambda_0}(q_n) - \psi_{\lambda_0}(\widetilde{q}_n) + \psi_{\lambda_0}(\widetilde{q}_n) - \psi_{\lambda_k}(\widetilde{q}_n).$$

Da desigualdade triangular e da igualdade acima, obtemos

$$|\psi_{\lambda_k}(q_n) - \psi_{\lambda_k}(\widetilde{q}_n)| \leq |\psi_{\lambda_k}(q_n) - \psi_{\lambda_0}(q_n)| + |\psi_{\lambda_0}(q_n) - \psi_{\lambda_0}(\widetilde{q}_n)| + |\psi_{\lambda_k}(\widetilde{q}_n) - \psi_{\lambda_0}(\widetilde{q}_n)|.$$

Pela convergência uniforme de ψ_{λ_k} a ψ_{λ_0} num compacto $K \subset M$, para todo $\frac{\epsilon}{2} > 0$ dado $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica em $|\psi_{\lambda_k}(z) - \psi_{\lambda_0}(z)| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $z \in K$. Logo da desigualdade acima, temos

$$|\psi_{\lambda_k}(q_n) - \psi_{\lambda_k}(\widetilde{q}_n)| < \frac{\epsilon}{2} + 0 + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Então $\psi_{\lambda_k}(q_n) - \psi_{\lambda_k}(\widetilde{q}_n) = 0$, ou seja, $\psi_{\lambda_k}(q_n) = \psi_{\lambda_k}(\widetilde{q}_n)$, como ψ_{λ_k} é injetiva, isto força $q_n = \widetilde{q}_n$ que implica em $q_1 = q_2$, uma contradição.

Aplicando o Princípio do Máximo para superfícies mínimas obtemos que $\psi_{\lambda_0}(\Theta_1) = \psi_{\lambda_0}(\Theta_2)$ e $\psi_{\lambda_0} : M \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação de recobrimento finito, cuja imagem $S = \psi_{\lambda_0}(M)$ é uma superfície mínima mergulhada completa de curvatura total finita em $\mathbb{R}^3$. Mostraremos que ψ_{λ_0} é de fato injetiva.

Dado dois pontos removidos distintos p_i, p_j, $i \neq j$, a quantidade

$$d = Re \int_{p_i}^{p_j} \phi_\lambda = Re \int_{p_i}^{p_j} \phi$$

é a medida da distância vertical entre os dois fins. Note que d é independente de λ.

4.4 AFIRMAÇÃO. *$d = Re \int_{p_i}^{p_j} \phi$ é maior do que zero.*

Prova. Como ψ é um mergulho, o valor absoluto desta integral é infinito se os crescimentos logarítmicos em p_i e p_j são diferentes. Se os crescimentos logarítmicos são os mesmos, esta distância não é zero, caso contrário, essa distância seria zero no infinito e pelo Principio do Máximo para superfícies mínimas estes fins teriam que ser iguais, o que não ocorre. Portanto $d > 0$, como afirmamos.

A aplicação ψ_{λ_0} leva uma vizinhança suficientemente pequena de qualquer p_j em um fim de S, e cada fim de S é a imagem de alguma vizinhança de algum ponto removido p_j. Portanto o número de fins de S não é maior que o número de fins de $\psi(M)$, isto é, não é maior que r. Se vizinhanças de dois pontos removidos distintos, p_i, p_j, $i \neq j$, são aplicados por ψ_{λ_0} no mesmo fim de S, então

$$d = Re \int_{p_i}^{p_j} \phi = 0,$$

que é impossível, pela Afirmação 4.4. Portanto o número de fins de S é igual a r e, além disso, podemos encontrar vizinhanças suficientemente pequena de p_j, $1 \leq j \leq r$, tal que cada vizinhança é aplicada por ψ_{λ_0} em um diferente fim de S. Isto significa que ψ_{λ_0} é injetiva próximo de pontos removidos p_j, $1 \leq j \leq r$ e portanto injetiva por toda parte devido a convergência uniforme de ψ_{λ_k} a ψ_{λ_0} em conjuntos compactos de M. Logo Δ é fechado e encerramos a prova da proposição. ■

Capítulo 5

Teoremas de caracterização do catenóide

Neste capítulo atingimos o objetivo principal deste trabalho. Vamos caracterizar o catenóide apresentando alguns teoremas que trazem propriedades que só verificamos nesta superfície mínima. O primeiro resultado que mostramos, conhecido há bastante tempo, é o fato do catenóide ser a única superfície mínima de revolução não-plana. Os outros resultados são um pouco mais recentes. Para algumas provas, faremos uso de nossa principal ferramenta, a Representação de Weierstrass e dos conceitos e propriedades de curvatura total finita, força e λ-deformação, abordadas nos capítulos anteriores. Diante disto, estamos aptos a descrever tais teoremas e prova-los.

5.1 TEOREMA. *A única superfície mínima de revolução não-plana é o catenóide.*

Prova. Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular plana definida por $\alpha(v) = (\varphi(v), 0, \phi(v))$, $\varphi(v) > 0$.

Considere a superfície obtida pela rotação da curva α em torno de um eixo do plano (vamos considerar o eixo vertical) que não encontra a curva. Podemos parametrizar tal superfície por

$$\psi(u, v) = (\varphi(v)\cos(u), \varphi(v)sen(u), \phi(v)),$$

onde $0 < u < 2\pi$ e $-\infty < v < +\infty$.

Os coeficientes da primeira e segunda forma quadrática nesta parametrização são dados por

$$E = \varphi^2, \quad F = 0, \quad G = (\varphi')^2 + (\phi')^2$$

e

$$e = \frac{-\varphi\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\phi')^2}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{\phi'\varphi'' - \phi''\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\phi')^2}}.$$

Além disso, a curvatura média pode ser expressa em termos destes coeficientes por

$$H = \frac{1}{2}(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}).$$

Daí, podemos observar que a superfície de revolução é mínima se, e somente se,

$$\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 0.$$

Como $EG - F^2 \neq 0$, então $eG = -gE$, que é equivalente a

$$\phi'[(\varphi')^2 + (\phi')^2] = \varphi[\phi'\varphi'' - \phi''\varphi']. \tag{5.1}$$

Considere agora a catenária $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(v) = (a\cosh(v), 0, a\text{v})$. Para provar o teorema mostremos que essa curva é a única solução da equação (5.1). De fato, considere φ, ϕ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $\varphi(v) = a\cosh(v)$ e $\phi(v) = av$. Então

$$\begin{aligned}
\phi'[(\varphi')^2 + (\phi')^2](v) &= a[a^2\sinh^2(v) + a^2] \\
&= a^3[\sinh^2(v) + 1] \\
&= a^3[\cosh^2(v)] \\
&= a\cosh t[a^2 cosh(v)] \\
&= \varphi[\phi'\varphi'' - \phi''\varphi'](v).
\end{aligned}$$

Portanto, ψ é o catenóide. ■

Para o próximo teorema fazemos a seguinte observação. Quando M é conformemente equivalente a $\overline{M} - \{p_1, p_2\}$ com $\overline{M}$ de gênero zero, dizemos que M é do tipo *anel.*

5.2 TEOREMA. *O único anel mínimo mergulhado completo com curvatura total finita é o catenóide.*

Prova. Seja M do tipo anel com curvatura total finita. Logo pelo item (i) do Teorema 2.1, $M = \overline{M}$ - $\{p_1, p_2\}$, onde p_1, p_2 correspondem aos fins de M.

Para mostrar este resultado note que um tal anel não pode ter fins tipo planares, pois um fim tipo planar implicaria em x_3 limitada superiormente ou inferiormente e daí x_3 seria constante. Logo os fins de M devem ser do tipo catenóide e a diferencial altura ϕ tem dois polos simples nos fins e é holomorfa em M. Como a superfície compacta $\overline{M}$, obtida agregando dois fins a M, é uma esfera deduzimos que ϕ não se anula em M, portanto a aplicação de Gauss meromorfa g não assume os valores 0, ∞ em M. Como g tem um zero simples e um polo simples nos fins tipo catenóide, seu grau deve ser um e M pode ser parametrizado pelos dados de Weierstrass $M = \mathbb{C} - \{0\}$, $g(z) = z$ e $\phi = a\frac{dz}{z}$, onde a é um número complexo diferente de zero.

Finalmente, para resolver o problema do período, a deve ser um número real. De fato, considere γ uma curva fechada em M.

$$\begin{aligned} x_3(z) &= Re \int_\gamma \phi \\ &= Re \int_\gamma a\frac{dz}{z} \\ &= Re(2a\pi i). \end{aligned}$$

Como x_3 é bem definida, devemos ter $x_3(z) = Re \displaystyle\int_\gamma \phi = 0$, logo $a \in \mathbb{R}$. Portanto M é o catenóide. ■

5.3 Teorema. *A única superfície mínima não-plana completa propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e força vertical é o catenóide.*

Prova. Seja $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ um mergulho próprio mínimo completo não-plano com curvatura total finita e força vertical. Como ψ tem força vertical segue-se pela Proposição 4.1 que ψ_λ é bem-definida para todo $\lambda > 0$ e daí, pela Proposição 4.7, que ψ_λ é um mergulho para todo $\lambda > 0$. Em particular, ψ_λ é injetiva, logo dos Lemas 4.3 e 4.4 podemos concluir que $\psi(M)$ não tem pontos onde o vetor normal é vertical nem possui fins tipo planar. Desse modo, os fins de ψ devem ser tipo catenoíde e a aplicação de Gauss de ψ não assume os valores 0, ∞ em M. Assim, a coordenada vertical de $\psi(M)$ é própria e não tem pontos críticos. Isto implica que $\psi(M)$ é um anel e conseqüentemente, pelo Teorema 5.2 deve ser o catenóide. ■

5.4 Teorema. *A única superfície mínima não-plana completa propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e gênero zero é o catenóide.*

Prova. Seja $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ um mergulho próprio mínimo completo não-plano com curvatura total finita e gênero zero. Pelo item (i) do Teorema 2.1, $M = \overline{\mathbb{C}}$ - $\{p_1, ..., p_r\}$ é conformememte equivalente a uma esfera com um número finito de pontos removidos, correspondentes aos fins do mergulho. De acordo com a observação (iv) da Proposição 2.4 estes fins são do tipo planar ou catenóide e, segundo o item (v) do Teorema 2.1, podemos assumir que o vetor normal nestes fins são verticais. Pela Proposição 3.3, sabemos que a força nos fins é o vetor $2\pi\alpha N$, onde α é o crescimento logarítmico e N é o vetor normal nos fins. Segue-se daí que ψ tem força vertical, pois N é vertical. Portanto, pelo Teorema 5.3, a superfície $\psi(M)$ é o catenóide. ■

5.5 Teorema. *A única superfície mínima completa propriamente mergulhada em* $\mathbb{R}^3$ *com* $\int_M KdA = -4\pi$ *é o catenóide.*

Prova. Seja $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ um mergulho próprio mínimo não-plano completo com $\int_M KdA = -4\pi$. Pelo item (iv) do Teorema 2.1 temos que a curvatura total é um múltiplo de 4π e satisfaz

$$\int_M KdA \leq -4\pi(k + r - 1),$$

onde k e $r \in \mathbb{N}$ são o gênero e o número de fins mergulhado da imersão, respectivamente. Usando a desigualdade acima e o fato da curvatura total ser -4π temos

$$-4\pi \leq -4\pi(k + r - 1), \quad \text{ou seja,} \quad k + r \leq 2.$$

Segundo a Proposição 2.2 $r > 1$, pois a imersão não é plana, logo devemos ter $r = 2$ e $k = 0$. Pelo Teorema 5.4 temos se k = 0, então a superfície $\psi(M)$ é o catenóide. ■

5.6 Teorema. *A única superfície mínima não-plana completa propriamente mergulhada em* $\mathbb{R}^3$ *com* $\int_M KdA > -8\pi$ *é o catenóide.*

Prova. Seja $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ um mergulho próprio mínimo não-plano completo com $\int_M KdA > -8\pi$. Pelo item (iv) do Teorema 2.1, temos que a curvatura total é um múltiplo de 4π e satisfaz

$$\int_M KdA \leq -4\pi(k + r - 1),$$

onde k e $r \in \mathbb{N}$ são o gênero e o número de fins mergulhado da imersão, respectivamente. Pela Proposição 2.3 podemos descartar as possibilidades em que a curvatura total é zero, já que a superfície não é plana e o fato da integral $\int_M KdA$ ser maior do que zero, pois isto implicaria em $k + r < 1$ na desigualdade acima, o que não é possível visto que $r \geq 1$. Assim, como $\int_M KdA > -8\pi$, resta o caso em que $\int_M KdA = -4\pi$. Então, pelo Teorema 5.5, a superfície $\psi(M)$ é o catenóide. ■

5.7 Teorema. *A única superfície mínima completa propriamente mergulhada em* $\mathbb{R}^3$ *com curvatura total finita cuja a aplicação normal de Gauss é injetiva é o catenóide.*

Prova. Seja $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ um mergulho próprio mínimo com curvatura total finita cuja a aplicação normal de Gauss N é injetiva. Logo o grau de N é igual a um, então pela Fórmula Jorge-Meeks, temos

$$grau(N) = k + r - 1 = 1, \quad \text{ou seja,} \quad k + r = 2.$$

Sabemos que aplicação normal de Gauss do plano não é injetiva, logo ψ não é plana e daí, segundo a Proposição 2.2, devemos ter $r \geq 2$ e portanto $k = 0$. Assim, pelo Teorema 5.4, a superfície $\psi(M)$ é o catenóide. ■

5.8 Teorema. *A única superfície mínima completa propriamente mergulhada em* $\mathbb{R}^3$ *com curvatura total finita e dois fins mergulhados é o catenóide.*

Prova. Para a prova deste teorema referimos [Sc].

Nos Teoremas 5.5 e 5.7 se retirarmos a hipótese de que a superfície é mergulhada, temos o contra exemplo da superfície de Enneper com curvatura total igual a -4π e aplicação normal de Gauss injetiva.

Bibliografia

[BC] Barbosa, J.L & Colares – *Minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$(1986), Lect. Notes Math. 1195. Springer, Berlin Heidelberg, New York.

[dC1] do Carmo, M. P. – *Differential Geometry of Curves ans Surfaces* (1980), Math Intelligencer, 9, (1987), 53-57.

[dC2] do Carmo, M. P. – *Geometria Riemanniana* (1988), IMPA (Projeto Euclides),$2^{a.}$ edição, Rio de Janeiro.

[DHKW] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Küster A. & Wohlrab, O. – *Minimal Surfaces I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1992, 296.

[HK] Hoffman, David & Hermann Karcher – *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature, Vol. 90*, 1995, Encyclopedia of Mathematics, Geometry V, Springer Verlag, 5-93.

[JM] Jorge, L. & Meeks III, W. H. – *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, Topology, 1983, 22(2):203-221.

[Li] Lins Neto, A. – *Funções de uma variável complexa* (1996), IMPA (Projeto Euclides), $2^{a.}$ edição, Rio de Janeiro.

[Os1] Osserman, R. – *A survery of minimal, Vol.1* (1989), Cambridge Univ. Press, New York.

[Os2] Osserman, R. – *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n*,Math. Ann., 80(2),1973, 340-364.

[PR1] Pérez, Joaquín & Ros Antonio – *Properly embedded minimal surfaces with finite total curvature*, Comm. Math. Helv., 68, (2000),538-578.

[PR2] Pérez, Joaquín & Ros Antonio – *Some uniqueness and nonexitence theorems for embedded minimal surfaces*, Math. Ann. 295(3), (1993), 513-525.

[Sc] Schoen, R. – *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*, J. of Differential Geometry, 18, (1983), 791-809.

Universidade Federal da Bahia-UFBa

Instituto de Matemática/Depto. de Matemática

Campus de Ondina, Av. Adhemar de Barros s/n, CEP:40170-110

www.im.ufba.br/hpinst/mestrado